Insiemi infiniti e loro gerarchia

Sergio Zoccante
CDRM, sergiozoccante@tin.it

Premessa

Il materiale di questo laboratorio è stato usato per anni con le classi PNI, terze o quarte. L'argomento non è mai stato oggetto di verifiche scritte, perché è oggettivamente difficile, pur nella semplicità espositiva, come tutti i temi che coinvolgono l'*infinito*. L'obiettivo infatti consiste nel fornire agli studenti *strumenti minimi* che permettano di distinguere tra infinito ed infinito nei casi di loro conoscenza, e di mostrare come sia necessario *precisare* i confini entro cui i concetti sono applicabili, se non si vuole arrivare ad un'idea vaga e confusa, che facilmente porta a contraddizioni.
Nell'affrontare il tema si usano alcuni strumenti matematici che possono essere utili in altri contesti: saranno evidenziati nel seguito.

Riferimenti curricolari
Esplicitamente, i riferimenti sono piuttosto scarsi:
Indicazioni nazionali: "… approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come *introduzione alla problematica dell'infinito matematico* (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico)."

In realtà, il tema è **necessario**, almeno per l'insegnante, ed è più ampio del titolo di questo laboratorio.
Infatti l'infinito si incontra:

- negli oggetti matematici, quali sistemi numerici, enti geometrici, eventi e spazi degli eventi,…
- nelle definizioni, ad esempio nelle definizioni ricorsive,

- nei processi, quali dimostrazioni e algoritmi.

L'infinito negli oggetti matematici è l'argomento di questo laboratorio; il tema, storicamente, ha origine dalla matematica greca, ma lo sviluppo significativo è della fine dell'Ottocento.
Nel seguito è riportato il materiale usato in classe; nelle *note per l'insegnante* si ritrovano delle considerazioni di carattere matematico, storico o didattico; si tratta usualmente di punti che gli allievi trovano di difficile comprensione.

CALCOLO SUGLI INSIEMI

Per gli insiemi infiniti, la teoria è dovuta a G. Cantor (1845 - 1918), ma va ricordato anche B. Bolzano (1781 – 1848).
Gli unici prerequisiti richiesti sono

- *concetto di insieme*
- *operazioni tra insiemi: unione, intersezione e prodotto cartesiano*

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\ \}$$
$$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \text{ e } x \in B\ \}$$
$$A \times B = \{\ (x, y) \mid x \in A \text{ e } x \in B\ \}.$$

Un primo strumento consente il confronto tra insiemi.

Insiemi equipotenti
Definizione: *A e B sono* equipotenti *se esiste una corrispondenza biiettiva (o biunivoca) tra A e B.*

Si prova facilmente che la definizione precedente stabilisce una *relazione di equivalenza tra insiemi*, detta *equipotenza*.
Una classe di equipotenza è detta *potenza*, o *cardinalità*.

La cardinalità di un insieme A è indicata usualmente con $|A|$.

Note per l'insegnante:
Questa è una definizione sensata, e dà la possibilità di *confrontare insiemi senza usare numeri*. Si tratta di una tecnica di uso comune (si veda anche Bellissima, *Fondamenti di matematica*, pag. 64). Storicamente, si trova già nella preistoria (tacche su bastoni, in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un gregge, presumibilmente), e più esplicitamente, nella civiltà assiro-babilonese (corrispondenza biunivoca tra segni e contenuto delle bulle).
È importante notare che Cantor esplicitamente applica la definizione anche ad *insiemi infiniti*, contrariamente a quello che fece Galilei.

Operazioni tra cardinalità

Siano A e B insiemi di cardinalità rispettivamente α e β.

Definizione*:* $\alpha + \beta = |A \cup B|$, se A e B sono disgiunti.
Definizione*:* $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$.
Definizione*:* $\alpha^\beta = |A^B|$, dove A^B indica l'insieme delle funzioni da B in A.

Note per l'insegnante:
Mentre le prime due definizioni/operazioni sono note da tempo agli allievi, l'ultima definizione risulta nuova e di non facile comprensione. In realtà si tratta di una definizione ricca di significato e di applicazioni, non appena si imparino a rappresentare in modo efficace le funzioni.
Nel caso degli insiemi finiti, una funzione è descritta da una tabella a due righe del tipo:

B	b_1	b_2	b_3	b_4					b_β
A	a_1	a_2	a_3	…					…

dove gli elementi b_i sono tutti diversi, mentre gli elementi a_j di A possono essere anche ripetuti.
Se assumiamo di tenere in un ordine fisso gli elementi dell'insieme B, una funzione è descritta ugualmente bene *dalla sola seconda riga* della tabella, ossia da una sequenza di β elementi di A.

In conclusione, nel caso degli insiemi finiti abbiamo la possibilità di contare/ elencare/ descrivere tutte le funzioni come "parole" di β lettere prese tra α.
Analogamente, se $|A| = \alpha$ **finito***, e* B = $\boldsymbol{N}$ *(insieme dei naturali),* abbiamo la possibilità di "contare"/ elencare/ descrivere tutte le funzioni come *rappresentazioni* in base α dei numeri reali compresi tra 0 e 1.

L'esperienza ci mostra che un insieme finito ***non è mai*** equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

Allora,
definizione: un insieme è *infinito* se è *equipotente a qualche suo sottoinsieme proprio*.

Note per l'insegnante: si noti come, comunemente, dapprima si parli di insiemi finiti, e gli insiemi infiniti siano definiti per negazione, come "non finiti". Qui sembra che la definizione sia indipendente dal concetto di insieme finito, e forse dal punto di vista logico lo è, ma non è così nella sua radice storica e cognitiva.
Qui, dal punto di vista didattico, si tratta di dare un senso alla definizione. Dal punto di vista matematico, si deve poi provare che non è "vuota".
È implicito, e diamo come già acquisito, che possiamo concepire e trattare **infiniti in atto**.

Proveremo ora che esistono insiemi infiniti.

Confronto dei naturali con i pari e i dispari
La corrispondenza $f: n \to 2\,n$,
tra $\boldsymbol{N}$ e l'insieme P dei pari, che associa ad un numero naturale il suo doppio è una corrispondenza biiettiva. Verificalo.

La corrispondenza $g: n \to 2\,n + 1$,
tra $\boldsymbol{N}$ e l'insieme D dei dispari, che associa ad un numero naturale il suo doppio + 1 è una corrispondenza biiettiva. Verificalo.

Quindi: ***N*** è equipotente sia a *P*, sia a *D*, anche se *P* e *D* sono suoi sottoinsiemi propri.

N è pertanto un insieme infinito. La sua cardinalità è detta *cardinalità del numerabile* ed è indicata normalmente con $\aleph_0$ (*aleph con zero*).

Concludiamo anche che i pari sono "tanti quanti" i naturali, come diceva Galilei, che però non riusciva a convincersene.
PRIMA LEZIONE: Non identificare l'inclusione tra insiemi con la relazione d'ordine tra cardinalità!

Confronto dei naturali con gli interi
La corrispondenza tra ***Z*** e ***N*** che associa:

0	allo 0
un positivo	al suo doppio
un negativo	al suo doppio +1, cambiato di segno

è biiettiva. Verificalo.

Z quindi ha la stessa cardinalità di ***N***: è anch'esso *numerabile*.

Confronto dei naturali con i razionali
Notiamo che l'insieme dei naturali è un insieme *discreto*, mentre i razionali sono un insieme *denso*.
Ciò significa che, mentre ad esempio tra il 2 e il 3 non ci sono altri interi, ci sono invece infiniti razionali, così come tra 1/8 e 1/9, e tra 2 razionali qualsiasi.
Nonostante questa diversità, Cantor dimostrò che l'insieme dei razionali ha la stessa cardinalità dei naturali. Il fatto risultò talmente inatteso allo stesso Cantor, che in una sua lettera del 29 giugno 1877 a Dedekind, scrisse: "Lo vedo ma non ci credo!".

Cantor dimostrò questo risultato direttamente, costruendo una corrispondenza biunivoca tra $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{Q}^+$ (i razionali non negativi) nel modo che segue.

Disponiamo tutte le frazioni in una tabella, come nella tabella seguente.
Osserviamo che tutti i numeri della prima colonna hanno numeratore 1, quelli della seconda hanno 2, e così via, mentre quelli della prima riga hanno denominatore 1, quelli della seconda 2, e così via.
In generale, una qualsiasi frazione si troverà all'incrocio tra la colonna il cui numero coincide con il numeratore e la riga il cui numero coincide con il denominatore. Con molte ripetizioni (le varie frazioni equivalenti), la tabella infinita contiene tutti i razionali.

0

1	2	3	4	5	6	....
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	...		
1/4	2/4	3/4	.....			
1/5	2/5	....				
1/6	....					

Ora, seguendo il percorso nella tabella indicato dalle frecce, otteniamo la corrispondenza desiderata, e possiamo costruire la seguente tabella:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	1/2	2	3	1/3	1/4	2/3	3/2	

Come si vede, si salta ogni frazione equivalente ad una già comparsa, e il percorso a frecce ci indica i vari numeri razionali da associare e, inoltre, è evidente che ad ogni razionale è associato uno ed un solo numero naturale: la corrispondenza è biunivoca.
Dalla definizione segue immediatamente che l'insieme $\boldsymbol{Q}^+$ dei razionali è *numerabile*.
SECONDA LEZIONE: Attenzione a non confondere cardinalità con densità.

Insiemi non equipotenti
Definizione: $|A| \leq |B|$ se esiste una corrispondenza iniettiva tra A e B.

E poi:
definizione: $|A| < |B|$ se $|A| \leq |B|$, ma $|A| \neq |B|$

Si noti che, per verificare la disuguaglianza stretta, sia *necessario* escludere che esistano funzioni *biettive* tra i due insiemi.

Il teorema di Cantor-Schroeder-Bernstein
Tale teorema afferma:
anche per gli insiemi infiniti, se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, allora $|A| = |B|$

Note per l'insegnante: prima di procedere con la dimostrazione dell'esistenza di insiemi di cardinalità maggiore del numerabile, si affronta il problema dell'infinito in geometria. Il motivo è che la retta è "il" modello per l'insieme dei numeri reali: ne costituisce una "radice cognitiva". I risultati sui reali consentiranno poi di trattare insiemi in spazi di dimensione maggiore di 1.

In Geometria

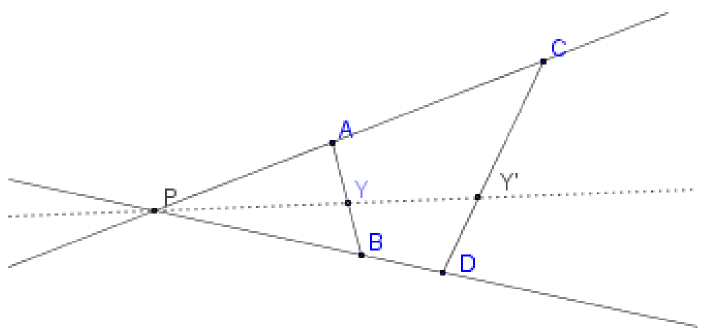
Il postulato della continuità della retta

In Geometria si richiede che *i punti di una retta siano in corrispondenza biiettiva con i numeri reali.*

La cardinalità della retta di conseguenza è la stessa cardinalità dell'insieme ***R*** dei numeri reali.

La cardinalità dei segmenti

TERZA LEZIONE: attenzione a non confondere la *cardinalità* di segmenti (intesi come insiemi di punti) con la *lunghezza* degli stessi; infatti, si mostra facilmente che due qualsiasi segmenti sono equipotenti.



Basta considerare la proiezione, da un particolare punto P, del segmento AB sul segmento CD. Il centro di proiezione P si ottiene come intersezione delle rette AC e BD.

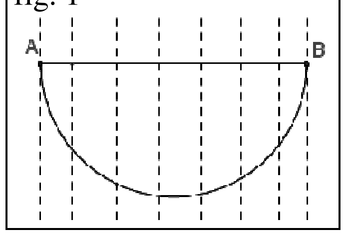
(Se AC e BD sono rette parallele, si usa invece una proiezione per raggi paralleli alle due rette.)

Si ha subito che ad ogni punto *Y* di *AB* corrisponde un ben preciso punto *Y'* di *CD*, e viceversa.

Confronto tra rette e segmenti

Attenzione anche alle confusioni sui concetti *di insieme limitato - insieme illimitato*.

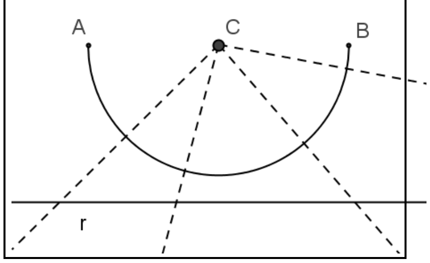
fig. 1



Osserviamo i seguenti passaggi:

1. Una *semicirconferenza* è equipotente ad un *segmento* (fig. 1). Una proiezione per raggi paralleli mostra la corrispondenza biiettiva tra i due insiemi.
2. Una *semicirconferenza* è equipotente ad una *retta* (fig. 2): la proiezione dal centro della semicirconferenza mostra la corrispondenza biiettiva con la retta.
3. Ora si può capire come un *segmento* può essere messo in corrispondenza con una *retta*: basta comporre le due proiezioni precedenti e così ad ogni punto del segmento *AB* corrisponde uno ed un solo punto della retta *r*, e viceversa.

fig. 2



La cardinalità di R è maggiore della cardinalità di N

Dimostreremo che la cardinalità dell'intervallo (0; 1) di numeri reali è *maggiore* della cardinalità del numerabile (anche questo teorema è dovuto a Cantor).

Per assurdo, supponiamo che l'intervallo (0; 1) possa essere messo in corrispondenza biunivoca con ***N***.
In tal caso, la corrispondenza può essere rappresentata in forma di tabella infinita, come nell'esempio seguente:

N		(0; 1)
1	$\rightarrow$	$x_1 = 0{,}2318098...$
2	$\rightarrow$	$x_2 = 0{,}4561087...$
3	$\rightarrow$	$x_3 = 0{,}9230876...$
4	$\rightarrow$	$x_4 = 0{,}0021045....$
...		...
...		...
n	$\rightarrow$	$x_n = 0{,}a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5...a_n...$
	...	...

Se l'ipotesi di partenza è esatta e c'è davvero una corrispondenza biunivoca, allora ogni numero reale dell'intervallo (0; 1) deve comparire nella colonna di *destra*, e deve corrispondere ad un particolare numero naturale della colonna di *sinistra*.

Consideriamo ora un numero b, la cui scrittura decimale $0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5...$ sia così determinata:
- scegliamo per b_1 una cifra decimale - ma non 0 o 9 - diversa dalla prima cifra decimale di x_1 ;
- scegliamo per b_2 una cifra decimale - ma non 0 o 9 - diversa dalla seconda cifra decimale di x_2;
- scegliamo per b_3 una cifra decimale - ma non 0 o 9 - diversa dalla terza cifra decimale di x_3 ;
e, in generale,
- scegliamo per b_n una cifra decimale - ma non 0 o 9 - diversa dalla n-sima cifra decimale di x_n.

Consideriamo ora questi due fatti:

1) *b* è un numero reale perché è stato costruito con uno sviluppo decimale infinito e parte intera 0.
Inoltre, l'esclusione delle cifre 0 e 9 permette di affermare che *b* non è 0,00000..= 0, né 0,9999...= 1.
Quindi, *b* cade all'interno dell'intervallo (0; 1) e perciò *deve* comparire in qualche punto nella colonna di destra della tabella.

2) *b non può* essere nessuno dei numeri x_1 , x_2 ,...x_n ,.., in quanto certamente
- $b \neq x_1$ perché *b* e x_1 differiscono per la prima cifra decimale,
- $b \neq x_2$ perché *b* e x_2 differiscono per la seconda cifra decimale,
e, in generale,
- $b \neq x_n$ perché *b* e x_n differiscono per la *n*-sima cifra decimale.

Perciò, mentre la 1) ci assicura che *b deve stare* nella colonna di destra, 2) garantisce che *b non può* farne parte.
Questa *contraddizione* dimostra che la nostra ipotesi iniziale, cioè che esista una corrispondenza biiettiva tra i naturali e tutti i reali di (0; 1), è falsa. Pertanto possiamo concludere che *i due insiemi non sono equipotenti*.

Dobbiamo ora escludere la possibilità che la cardinalità di (0; 1) sia minore del numerabile.
E infatti: consideriamo l'insieme $\{x | x = 1/n$, con n naturale positivo$\}$; tale insieme è in corrispondenza biunivoca con $\boldsymbol{N}$, e inoltre è sottoinsieme di (0; 1).

Pertanto, $|(0; 1)| \geq |\boldsymbol{N}|$, ma $|(0; 1)| \neq |\boldsymbol{N}|$; perciò $|(0; 1)| > |\boldsymbol{N}|$.

La cardinalità di (0; 1) è detta *cardinalità del continuo*.

Altri esempi classici.
Hanno la cardinalità del continuo anche:
Irr (l'insieme degli irrazionali), perché $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Irr}$, e $\boldsymbol{Q}$ è numerabile;
Tr (l'insieme dei trascendenti).

Note per l'insegnante: per l'insieme dei trascendenti la dimostrazione è più complessa, perché si basa sulla numerabilità del suo complementare, l'insieme dei numeri algebrici, e il calcolo di quest'ultima cardinalità non è semplice. In ogni caso il risultato è importante perché mostra che il salto di cardinalità dai razionali ai reali è dovuto alla presenza dei trascendenti.
Si osservi infine che gli irrazionali non formano un insieme continuo, ma hanno la cardinalità del continuo: attenzione all'uso di termini uguali con significati diversi!

Confronto tra un segmento e un quadrato
Consideriamo ora un segmento e un quadrato (figura convessa) avente quel segmento come lato.
Vogliamo confrontare le cardinalità dei due insiemi: teniamo conto che il segmento S è un oggetto di *dimensione* 1, il quadrato Q di *dimensione* 2.

Identifichiamo sul piano cartesiano il segmento S con l'intervallo numerico (0; 1) e il quadrato Q con l'insieme di punti $\{ (x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 \}$.
Conveniamo inoltre di scrivere i decimali finiti come illimitati aggiungendo una sequenza di 0 dopo l'ultima cifra significativa: in questo modo, ogni reale dell'intervallo considerato è associato in modo

univoco ad una sequenza infinita di cifre, periodica o no (non accetteremo il periodo 9).

Costruiamo ora una corrispondenza tra Q e S nel modo seguente: preso un punto di Q, poniamo (x, y), x abbia rappresentazione decimale $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5...$ e y abbia $0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5...$
Associamo allora alla coppia (x, y) il numero $z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 a_5 b_5...$

La corrispondenza è certamente iniettiva, e questo ci garantisce che $| S | \geq | Q |$.

D'altra parte, è possibile mostrare facilmente che $| Q | \geq | S |$, e quindi, per il teorema di Cantor-Schroeder-Bernstein, possiamo concludere che S e Q sono equipotenti.

QUARTA LEZIONE: non confondere cardinalità e dimensione!

Conclusione
Gli insiemi "scolastici" sembrano allora essere o numerabili (stessa cardinalità dei naturali) o con la cardinalità del continuo (cardinalità dei numeri reali).
Hanno la cardinalità del continuo anche:
l'insieme dei punti della retta
l'insieme dei punti del piano
l'insieme dei punti dello spazio…

Gli ultimi casi sembrano paradossali. È possibile una graduazione "più fine" tra infiniti? La *dipendenza lineare* fornisce una parziale risposta, tramite il concetto di *dimensione.* Ma questo è un altro discorso.