Centro Ricerche Didattiche “Ugo Morin” Paderno del Grappa

Seminario 2012: “*Passo dopo passo verso l’infinito*”

Seminario per la Scuola secondaria di II grado – 27 agosto

Il principio di induzione matematica: considerazioni didattiche

Luigi Tomasi
Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Adria
luigi.tomasi@unife.it

Indicazioni nazionali per i Licei (2010) “linee generali e competenze”

“Lo studente al termine del percorso del liceo avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico:

- *la matematica nella civiltà greca*
- *il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico*
- *la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.*

Dai tre momenti della storia della Matematica agli obiettivi di studio…

Da questa schematizzazione della storia della matematica:

- Si ricavano di conseguenza i “gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio” nei licei, elencati in otto punti.

Quelli riportati di seguito sono riferiti al liceo scientifico (ci sono alcune variazioni per gli altri tipi di liceo).

Concetti e metodi matematici oggetto di studio nei Licei

Dalle Indicazioni nazionali di matematica riportiamo dalle "linee generali e competenze" (riguardano tutti i licei)

I gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

1. *gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);*
2. *gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana; una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;*
3. *gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;*
4. *la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;*

Concetti e metodi matematici oggetto di studio nei Licei

5. *il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);*
6. *costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;*
7. *una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;*

Concetti e metodi matematici oggetto di studio nei Licei

8. *una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.*

Concetti e metodi matematici oggetto di studio nei Licei

8. *una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre*

   un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"),

   della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e

   di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Indicazioni a volte difficili da intepretare…

- I precedenti “gruppi di concetti e metodi” sono senz’altro apprezzabili, ma alcuni sono scritti in modo poco adatto a delle indicazioni
- In particolare il punto 8 dell’elenco precedente propone un’interpretazione del **principio di induzione matematica**, a confronto con l’induzione in fisica, che ha suscitato qualche discussione dal punto di vista didattico

Il principio di induzione: qual è la sua origine?

Friedrich Waismann (*Introduzione al pensiero matematico,* 1936, trad. it. 1939 di L. Geymonat), afferma:

- *Nella costruzione dell'aritmetica è evidente l'importanza straordinaria del principio di induzione*
- *Ma qual è la sua base? L'origine di questo principio non è ancora, a tutt'oggi, completamente spiegata.*
- *Secondo Poincaré l'importanza del procedimento induttivo consiste in ciò: esso raggruppa in sé* ***infiniti sillogismi.***

Friedrich Waismann (*Introduzione al pensiero matematico*, 1936)

La proposizione A vale per 1, allora deve valere anche per 2

Se essa vale per il numero 2, allora vale anche per il numero 3;

Se essa vale per il numero 3, vale anche per il numero 4;

e così via…

Infiniti sillogismi secondo Poincaré

Il principio di induzione: qualche nota storica

- Usato dai matematici in “modo implicito” ben prima della sua formulazione: si può dire che lo stesso Euclide lo utilizza nella prop. 20, del Libro IX, (i numeri primi s
- Maurolico, Pascal, …
- Eulero?
- Il nome è stato dato da De M
  circa)
- Grassmann, Dedekind
- Giuseppe Peano (1889 , Arit

(da Mario Ferrari, articolo 1988…)

Il principio di induzione (Peano)

Si assumuno come *concetti primitivi* quelli di **numero**, di **1 (uno)** e di ***successore***.

Sia dato un insieme **N**, per cui valgono i seguenti assiomi:

- 1 appartiene a **N** (… **N** non è vuoto).
- Esiste una corrispondenza biunivoca tra **N** ed **N** \ **{1}**. Il corrispondente di *n* tramite questa funzione viene detto *successore* di *n* e indicato con succ(*n*).
- **Sia A un sottoinsieme di N. Se 1 appartiene ad A e per ogni numero *n*, se *n* appartiene ad A allora si ha che succ(*n*) appartiene ad A,**

  allora A coincide con N.

Il principio di induzione

$$\left[P(1) \wedge (\forall k)\left(P(k) \rightarrow P(k+1)\right)\right] \rightarrow (\forall n)\left(P(n)\right)$$

Tipico schema di dimostrazione per induzione

Teorema. P(n)

Dimostrazione di P(1)

Ipotesi induttiva: assumiamo P(k)

Passo d'induzione: dimostrazione di P(k+1) a partire dall'ipotesi induttiva.

Formulazioni (che si dimostra essere) equivalenti al Principio di Induzione

Principio del Buon Ordinamento

Ogni insieme non vuoto di numeri naturali contiene un minimo elemento.

Principio di Ricorsione

Se per ogni naturale k,

la validità di P(i) per ogni i<k, implica quella di P(k),

allora P(n) vale per ogni naturale n.

Il principio di induzione: osservazioni didattiche

- Il principio di induzione non è altro che uno degli assiomi dell’aritmetica (con all’interno un “teorema”).
- A differenza degli assiomi delle geometria, si “limita” però ad offrire una strada per dimostrare dei risultati che si è riusciti ad individuare per altra via.
- Ad esempio, prima di dimostrare che i numeri primi sono infiniti, o le proprietà del triangolo di Pascal o la formula $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$, occorre aver “scoperto” per altra via questi risultati.
- Raramente lo stesso Principio di Induzione ci permette di immaginare o enunciare la proprietà in questione.
- Di qui l’importanza del produrre **congetture**.

Il principio di induzione: osservazioni didattiche

- Nella ricerca della proprietà da dimostrare (congetture), si può effettivamente utilizzare un processo che ha molte somiglianze con l'induzione usata nelle scienze sperimentali.
- Si effettuano una serie di "prove" e di "esperimenti" su una proprietà che "riguarda i naturali", finché non si arriva a stabilire una "legge" che sembra valere in tutti i casi esaminati.
- Abbiamo quindi stabilito una **congettura**.

Il principio di induzione: osservazioni didattiche

- Dopo questa fase di congettura, si prova a dimostrare quel che si è scoperto, utilizzando il principio di induzione.
- Parafrasando Hegel, il principio di induzione è come la "nottola di Minerva" che "inizia il suo volo sul far del crepuscolo", quando già si è scoperta la "proprietà".
- E' comunque fondamentale che gli allievi si convincano come solo dopo questa dimostrazione saremo autorizzati a ritenere valida la "legge" precedentemente scoperta.

Il principio di induzione: osservazioni didattiche; difficoltà psicologiche

- Spesso gli studenti affermano che nel Principio di induzione si assume come ipotesi ciò che si vuole dimostrare …
- Perciò occorre fare attenzione all'uso del quantificatore "per ogni".
- Fornire alcuni degli errori tipici dell'uso del Principio di induzione, ad es. "ogni numero naturale è uguale al suo successivo", oppure "sostituendo un qualsiasi naturale n in n^2+n+41 si ottengono solo numeri primi".
- Precisare che le due "tappe" del Principio di induzione sono entrambe necessarie.

Il principio di induzione: difficoltà psicologiche

La principale difficoltà psicologica del principio di induzione secondo Efraim **Fischbein** è questa:

- Lo studente è portato a dare una valore di verità assoluto all’ipotesi induttiva nell’ambito del passo di induzione $P(k) \rightarrow P(k+1)$.
- Quindi l’allievo non riesce a capire come un’affermazione che deve essere provata (il teorema) possa diventare una premessa nella struttura della dimostrazione stessa.

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima delle congetture):

Congetturare il risultato:

- $1+2+3+....+(n-1)+n$
- $1+3+5+7+...+(2n-1)$
- $1+8+27+64+....+n^3$
- $1+2+4+8+ ... + 2^{n-1}$
- $1+4+9+16+...+n^2$

- Il numero delle strette di mano (*n* partecipanti a una festa)

- Congetturare il risultato:

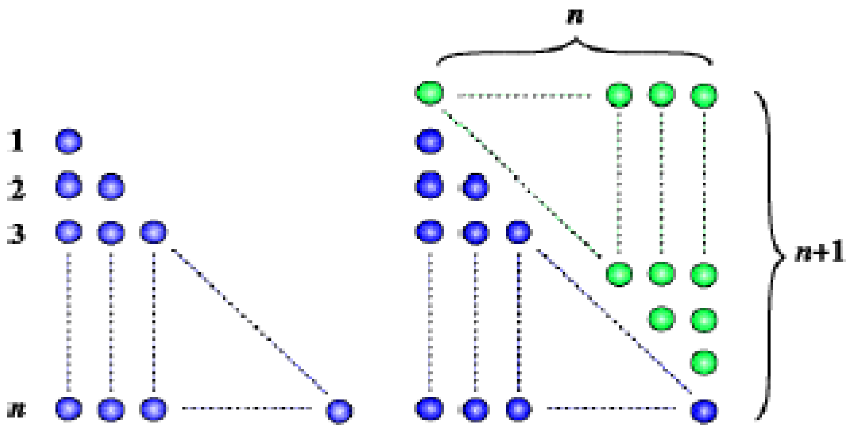
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{n(n+1)}$$

- $1*2+2*3+3*4+ ... + n(n+1)$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima delle congetture):

Congetturare il risultato:

- 1+2+3+….+(n-1)+n



Aneddoto su Gauss:

1 + 2 + 3 + 4+………+99+100
100+ 99 +98 + 97………+ 2 + 1

101+101+101+…………..101+101= 101*…..

Pertanto la somma è: ………… n*…………
L'induzione dov'è ?

Oppure fare un disegno (ma ci vogliono i puntini…)

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima una congettura):

Congetturare il risultato:

- $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$
- 1
- $1+3$
- $1+3+5$
- ….

Congettura facile!

Interpretazione geometrica: gnomone.

Usata da Galileo (per il moto uniformemente accelerato: ad esempio

piano inclinato): gli spazi percorsi successivamente, negli stessi intervalli di tempo, nel moto uniformemente accelerato, sono proporzionali ai numeri dispari.

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima una congettura):

Congetturare il risultato:

$1+2+4+8+ \ldots + 2^{n-1} = \ldots..$

1

1+2=3

1+2+4=7

1+2+4+8=15

……..

Quindi:

$1+2+4+8+ \ldots + 2^{n-1} = \ldots..$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima delle congetture):

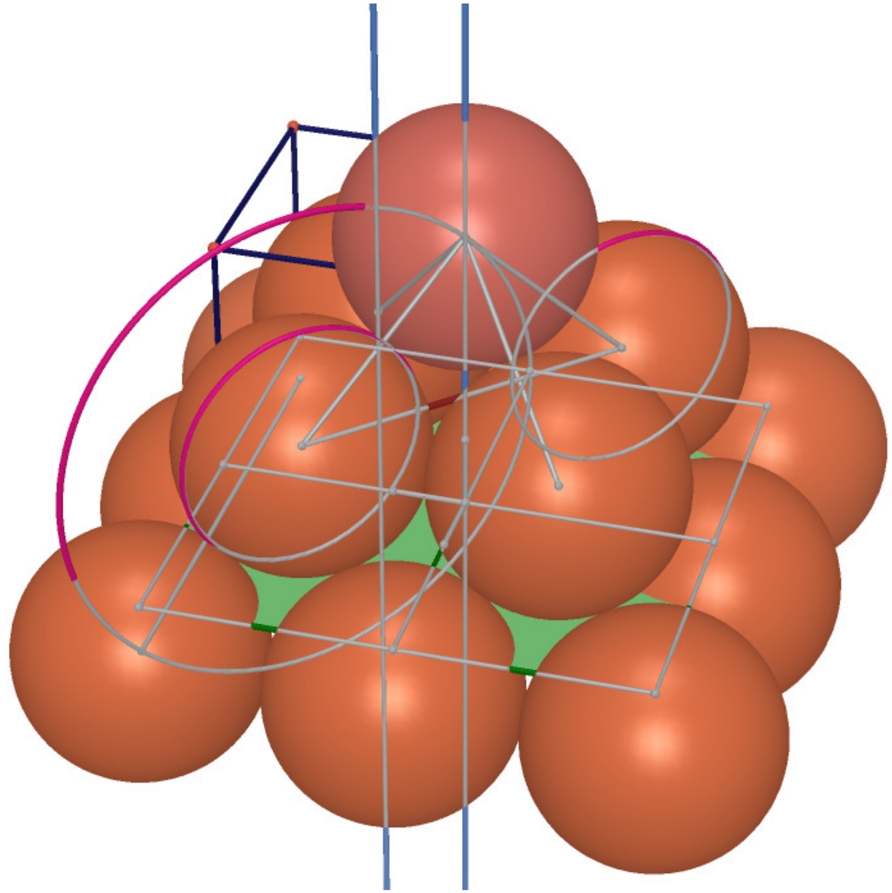
Congetturare il risultato:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{n\left(n+1\right)}$$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima delle congetture: difficile!):

Congetturare il risultato:

$1+4+9+16+........+n^2$



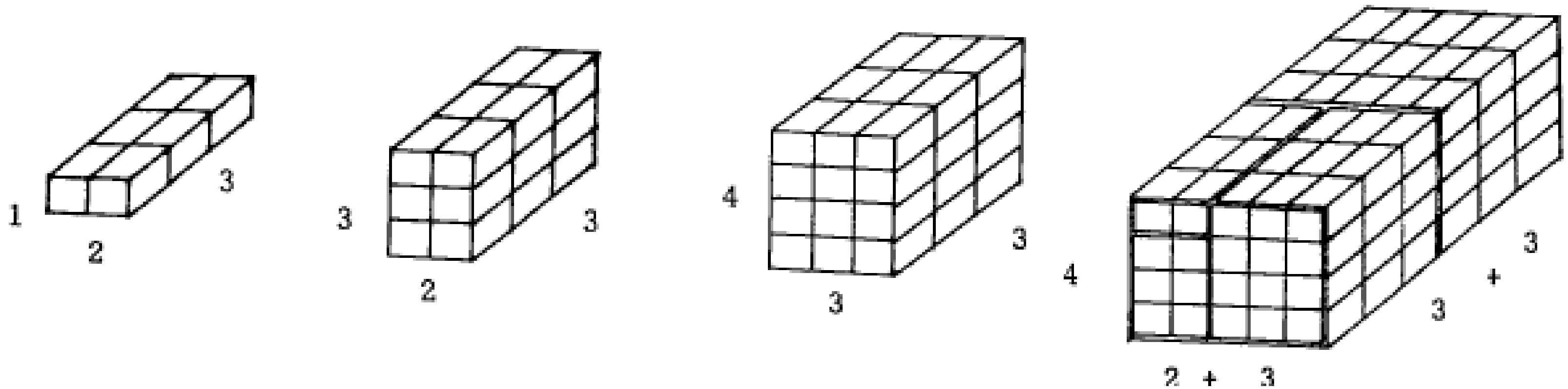
Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima delle congetture):

Congetturare il risultato:

- 1*2+2*3+3*4+ … + n(n+1)

Moltiplichiamo per 1*2+2*3+3*4+4*5 per **3**:

- **3***1*2+**3***2*3+**3***3*4+**3***4*5



4*5*6

Quindi, sommando 4 termini si ha: (4*5*6)/3

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (formulare prima delle congetture):

Congetturare il risultato:

- Il numero delle strette di mano (*n* partecipanti a una festa)

Foglio elettronico…

Congettura: …..

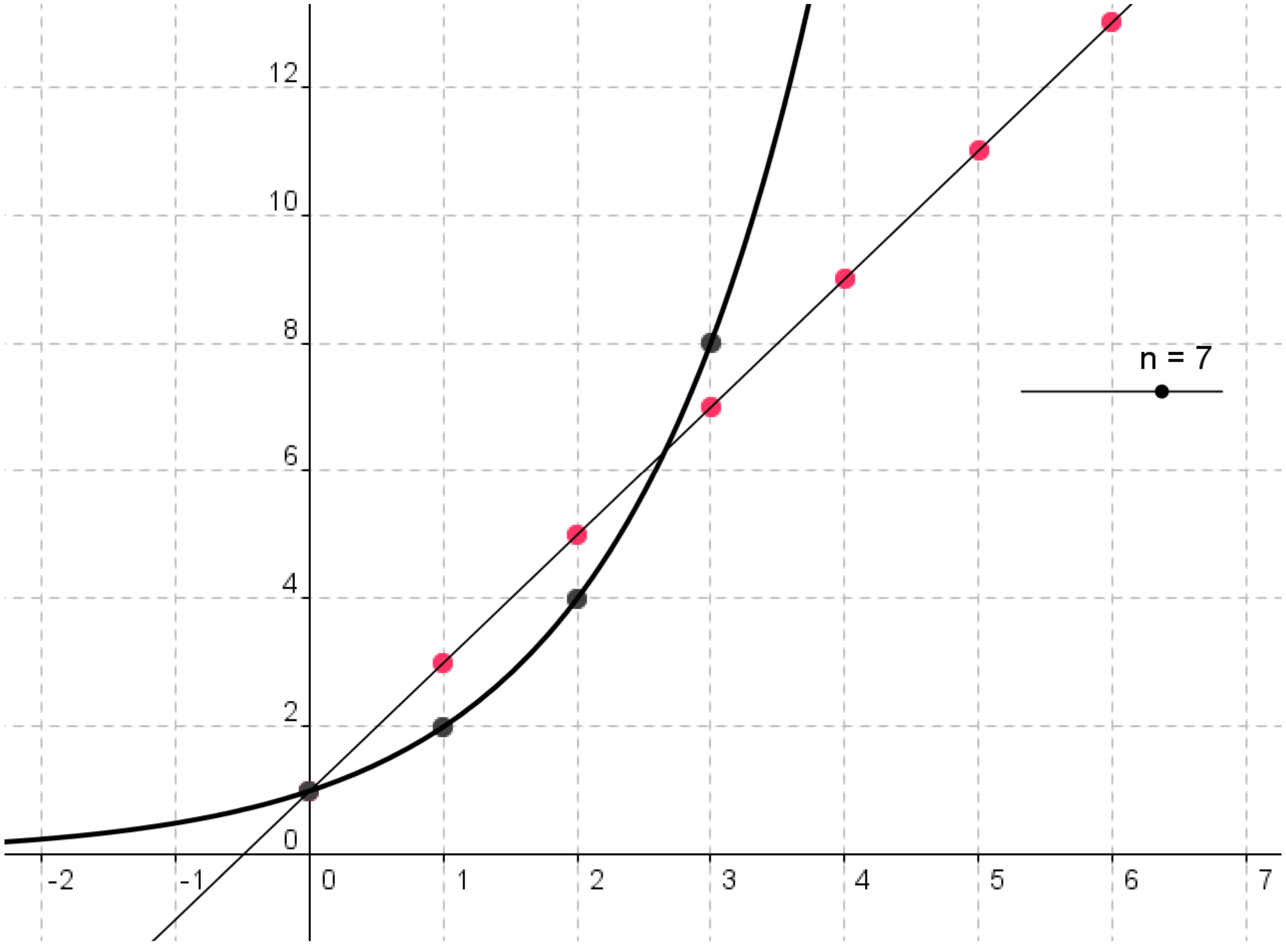
Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (fare prima qualche esplorazione numerica in classe)

Non si parte sempre da n = 1 !

- $2^n > 2n+1$ (per quali naturali n?)
- $2^n > n^2$ (per quali naturali n?)
- La somma degli angoli (interni) di un poligono è .....

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (qui c'è bisogno della congettura?):

$2^n > 2n+1$ (per quali naturali n ?)



Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (dov'è la congettura?):

$$2^n > 2n+1 \text{ (per quali naturali } n \text{ ?)}$$

- Per n=3 la proprietà vale ($2^3 > 2*3+1$)
- Supponiamo che valga per k (k>2). Ipotizziamo quindi (ipotesi induttiva):

$$2^k > 2k+1.$$

- Aggiungiamo 2^k ad entrambi i lati:

$$2^k + 2^k > 2k+1 + 2^k$$

$$2^k + 2^k > 2k+1 + 2^k \geq 2k+1 + 2$$

(per k>0, si ha $2^k \geq 2$)

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1$$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (la congettura qual è?):

$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$ ($\alpha>-1$, $\alpha\neq 0$ per quali naturali n ?)

- Per n=2 la proprietà vale $(1+\alpha)^2 > 1+2\alpha$.
- Supponiamo che valga per k (con k>1). Ipotizziamo quindi (ipotesi induttiva):

$$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha.$$

- Moltiplichiamo per $(1+\alpha)$ ad entrambi i lati:

$$(1+\alpha)^k (1+\alpha) > (1+k\,\alpha)(1+\alpha)$$

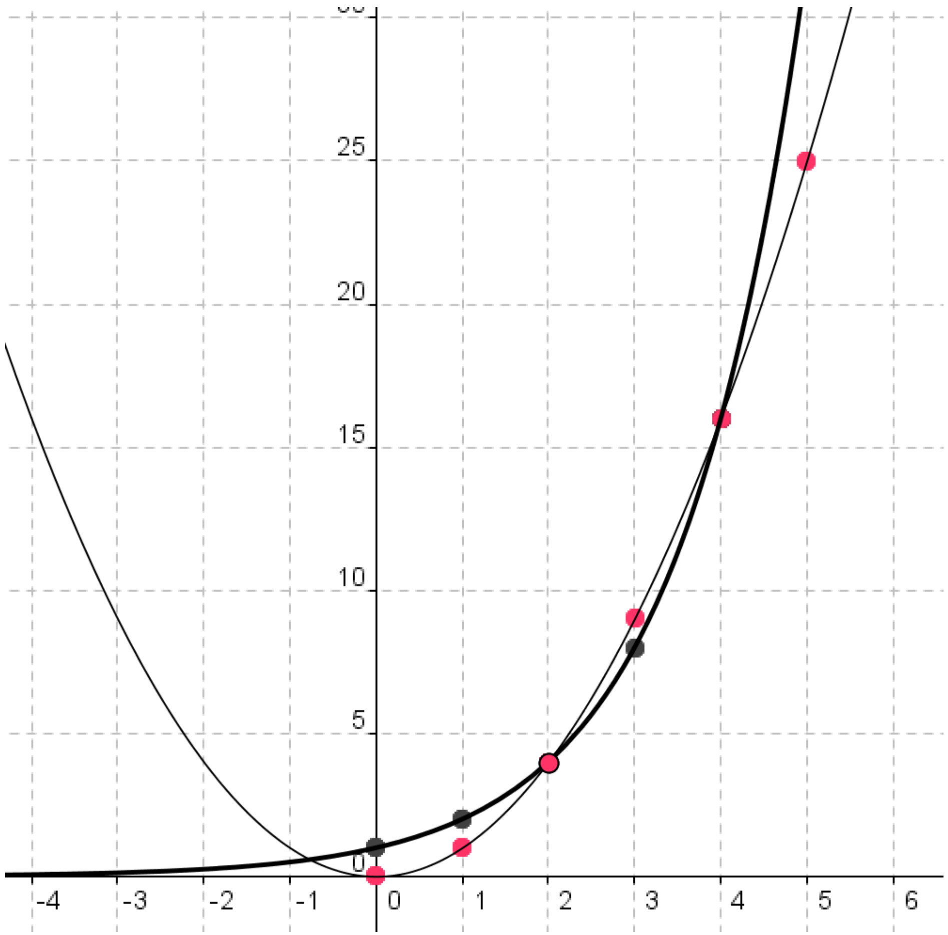
$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha + k\,\alpha^2$$

da cui (essendo $k\,\alpha^2>0$)

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha$$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (dov'è la congettura?):

$2^n > n^2$ (per quali naturali n ?)



Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (potenza di un numero complesso):

$$(\cos x + i \sin x)^n =$$

$$\cos(nx) + i \sin(nx) \qquad \text{(De Moivre)}$$

- Per n=1 la proprietà vale.
- Supponiamo che valga per k, ovvero:

$$(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$$

e dimostriamo che allora vale per k+1:

$$(\cos x + i \sin x)^{k+1} = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x + i \sin x) =$$

$$(\cos(kx) + i \sin(kx))(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \cos((k+1)x) + i \sin((k+1)x)$$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado (la congettura qual è?):

$$2^n > n^2 \text{ (per quali naturali } n \text{ ?)}$$

- Per n=5 la proprietà vale ($2^5 > 5^2$)
- Supponiamo che valga per k (con k>4). Ipotizziamo quindi (ipotesi induttiva): $2^k > k^2$.
- Aggiungiamo 2^k ad entrambi i lati:

$$2^k + 2^k > k^2 + 2^k$$

$$2^k + 2^k > k^2 + 2^k > k^2 + (2k + 1)$$

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1$$

$$2^{k+1} > (k + 1)^2$$

Qualche esempio per la scuola secondaria di II grado: media geometrica e media aritmetica (difficile):

Per i numeri positivi a_1, a_2, a_3, …, a_n, si ha

$$m_{geom} \leq m_{aritm}$$

- Per n=2 la proprietà vale (vedi visualizzazione geometrica).
- Supponiamo che valga per k (con k>2) e dimostriamo che vale per k+1.
- Difficile…

Una via geometrica (visuale) per la scoperta di alcune formule da dimostrare per induzione (i puntini…)

- E’ comunque fondamentale che gli allievi si convincano come solo dopo questa dimostrazione saremo autorizzati a ritenere valida la legge precedentemente scoperta.

Principio di induzione come strumento per definire (vedi articolo di M. Ferrari)

Definizioni per induzione (o per ricorrenza):

Definizione per ricorrenza del **fattoriale di n (n!):**

$0! = 1$

$n! = n*(n-1)!$

La prima uguaglianza fissa il valore iniziale;

la seconda dice come il fattoriale si calcola per gli altri numeri naturali.

Anche questa definizione non dice che cos'è il fattoriale, ma dice come si può calcolare (il metodo è lungo se n non è piccolo).

Principio di induzione come strumento per definire (vedi articolo di M. Ferrari…)

Definizioni per induzione (o per ricorrenza):

Definizione di **addizione con i numeri naturali:**

$$a+0 = a$$

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

Una definizione come questa (andrebbe un po' esplicitata: dov'è l'ipotesi induttiva?) non dice che cos'è a+b, ma fornisce un algoritmo (lento) per calcolarla.

Definire in modo ricorsivo una progressione aritmetica

Se n=0, allora …..,

altrimenti

Definire in modo ricorsivo una progressione geometrica

Se n=0, allora …..,

altrimenti

Definire in modo ricorsivo i numeri triangolari (1, 3, 6, 10, …

Se n=1, allora …..,

altrimenti ….

Alcune successioni si definiscono meglio in modo ricorsivo (esempio, la successione di Fibonacci, ma questa è piu' complicata…)

Se n=1, allora …..,

altrimenti ….

Un gioco famoso: la torre di Hanoi

Se n=1, allora .....,
altrimenti ....

Siano i paletti etichettati con A, B e C, e i dischi numerati da 1 (il più piccolo) a *n* (il più grande). L'algoritmo si esprime come segue:

- Sposta i primi *n*-1 dischi da A a B. (Questo lascia il disco *n* da solo sul paletto A)
- Sposta il disco *n* da A a C
- Sposta *n*-1 dischi da B a C

Un’osservazione informatica

Non tutti i software permettono di definire oggetti in modo ricorsivo.

La ricorsione può essere deleteria per il computer data la quantità di calcoli che lascia “aperti” prima di arrivare alla conclusione….

Principio di induzione e libri di testo

Fino a non molto tempo fa erano pochi i libri che introducevano il principio di induzione.

Tra i primi primi occorre citare

School Mathematics Project (trad. it. UMI)

G. Prodi, E. Magenes, *Elementi di Analisi matematica,* Progetto “Matematica come scoperta”, D’Anna, Firenze-Messina, 1982

L. Lombardo Radice-L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, vol. 3°, Principato, Milano.

Principio di induzione e libri di testo

Oggi ci sono libri che lo riportano, ma poi al momento opportuno non sempre lo usano, ad es. *Lamberti-Mereu-Nanni (per i licei scientifici)*

Nuova edizione 2012 del *Lamberti-Mereu-Nanni (per i licei scientifici)*

Progressioni aritmetiche

Termine ennesimo di una progressione geometrica

Termine ennesimo di una progressione geometrica

Torniamo alle
Indicazioni nazionali di matematica
per i Licei …

Concetti e metodi matematici che sono oggetto di studio nei Licei

una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Il principio di Induzione nelle Indicazioni nazionali per i Licei

Le frasi tra virgolette di chi sono?

Sembra siano ispirate ad alcuni passi dell’opera *La Science et l’Hypothèse* del 1902, di Henri Poincaré (1854 - 1912) (blog del prof. Giorgio Israel)

La Science et l'Hypothèse del 1902,
di Henri Poincaré (1854 - 1912)

LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE 31

L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

Principio di induzione e *Matematica 2003*

Nella Commissione UMI che ha prodotto *Matematica 2003* si è discusso molto se inserire il principio di induzione nella proposta di curricolo di matematica.

Alla fine si è votato…

La maggioranza della Commissione si è pronunciata per inserirlo nella proposta di curricolo (“matematica per il cittadino”):

Applicare in semplici casi il principio di induzione (Abilità, 2^ Biennio, Nucleo: Argomentare, congetturare, dimostrare).

Commenti finali sul Principio di induzione

- Nelle *Indicazioni nazionali per i Licei* sull'induzione matematica paragonata con l'induzione in fisica, forse conveniva essere più chiari e non introdurre una particolare visione di questo principio.
- In generale, dal punto di vista didattico, si può dire che l'uso del principio di induzione nelle dimostrazioni sia piuttosto delicato e che convenga introdurlo solo negli ultimi anni, accanto a una riflessione sulle diverse forme di dimostrazione presenti in matematica.
- Il principio di induzione non è da privilegiare rispetto ad altri tipi di dimostrazione.
- Il principio di induzione riguarda soprattutto proprietà relative ai numeri naturali.

Commenti finali sul Principio di induzione

- Non esiste solo il principio di induzione come forma di dimostrazione; anzi è forse il tipo di dimostrazione più tecnico.
- Quando si utilizza il principio di induzione occorre aver già scoperto in precedenza la proprietà che si vuol dimostrare.
- Il principio di induzione è un metodo che spesso nasconde il processo di scoperta e viene utilizzato per “mettere a posto” la teoria, dopo aver scoperto la proprietà per altra via.