CORSO DI AGGIORNAMENTO DOMENICALE

IN

MATEMATICA

PER INSEGNANTI DELLA SCUOLA DI BASE

Paderno del Grappa, anno scolastico 2003-2004.

Dipartimento di matematica dell'Università di Pavia

Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin

MATEMATICA: UN MONDO DI RELAZIONI

Appunti delle lezioni del professor Mario Ferrari

INTRODUZIONE

Questo corso di aggiornamento è un po' diverso dai precedenti. Questi, infatti, vertevano su argomenti delimitati, anche se vasti, come aritmetica, geometria, misura statistica, probabilità.
Anche questo corso ha un nome preciso "Relazioni", ma è un "Mondo di relazioni" e si realizza all'interno dei vari settori della matematica che si studia nella scuola di base.
E' un corso impegnativo, soprattutto dal punto di vista teorico. Per questo sono stati preparati in anticipo gli appunti. Essi devono essere letti e studiati possibilmente prima degli incontri in modo da poter fare domande e ricevere risposte su punti oscuri, su concetti poco familiari; fare domande di approfondimento, di esplorazione di situazioni nuove.
Sono proposti anche tanti esercizi la cui risoluzione aiuta la comprensione. Queste soluzioni dovrebbero essere possibilmente individuali, fatte a casa, e poi discusse e confrontate nei lavori di gruppo.
In questi lavori si dovranno studiare, proporre, discutere percorsi didattici da confrontare nelle riunioni plenarie.
Un lavoro impegnativo, quindi, ma anche gratificante, almeno lo spero.
Per gli insegnanti, come per gli allievi, lo studio della matematica è come la scalata di una montagna: la fatica, il sudore, l'impegno per arrivare in cima sono abbondantemente ripagati dalla gioia della conquista, dalla felicità di contemplare nuovi e più vasti orizzonti, dalla soddisfazione di poter dire "ce l'ho fatta".

Buon lavoro!

MATEMATICA: UN MONDO DI RELAZIONI
Corso di aggiornamento domenicale 2003-2004

INTRODUZIONE

La nostra vita quotidiana è intessuta di relazioni. Basta pensare alle relazioni di parentela, di amicizia, di appartenenza ad un gruppo, di vicinanza. Le relazioni sono di tipo diverso.
Ci sono **relazioni uno a uno:** un marito – una moglie; un figlio – una mamma; un impiegato – una scrivania, ecc.
Ci sono **relazioni uno – molti** (nel senso di più di uno): insegnante – bambini della classe; parroco – parrocchiani; padrone – dipendenti, ecc.
Ci sono **relazioni molti – uno**: bambini di una classe – insegnante; docenti universitari – rettore, ecc.
Ci sono **relazioni molti – molti:** femmine di una classe – maschi della stessa classe; insegnanti di un plesso – scolari dello stesso plesso, ecc.

In ogni relazione entrano in gioco due "gruppi di oggetti" che possiamo chiamare A e B. Gli "oggetti" del gruppo A, come quelli del gruppo B, possono essere i più diversi, essere tanti o pochi o anche uno solo. La relazione fra gli oggetti del gruppo A e quelli del gruppo B può interessare un solo oggetto di A ed un solo oggetto di B, oppure uno solo di A e molti di B, oppure alcuni di A ed alcuni di B, oppure tutti gli oggetti di A e tutti gli oggetti di B.
I due "gruppi di oggetti" possono anche coincidere e quindi la relazione si verifica in un solo gruppo di oggetti. Questo è il caso, per fare un esempio, della relazione "è più alto di" riferita agli alunni di una classe.

La parola "relazione" viene usata anche in matematica ed il suo significato rispecchia abbastanza fedelmente quello del linguaggio comune. Le relazioni sono importantissime in matematica. Vien voglia di dire che *ogni ente matematico è una ragnatela di relazioni* e che la *matematica stessa è una sinfonia di relazioni.*

Tutto il corso sarà dedicato allo studio delle relazioni matematiche che gli studenti incontrano dalla prima elementare in poi.

CHE COSA E' UNA RELAZIONE?

La parola *relazione* deriva dal latino *relatio* legata a *relatus* participio passato di *referre*, raccontare, riferire. Nel linguaggio comune essa indica un nesso, un legame, un rapporto (non necessariamente numerico) tra due gruppi di oggetti.
Dare la definizione matematica di relazione significa precisare il senso delle parole su riportate. L'impresa non è semplice e qualunque sia la strada che si vuol seguire bisogna disturbare gli insiemi. **Incominciamo, allora, con qualche preliminare sugli insiemi.**

In matematica non si può definire tutto. Per definire un concetto abbiamo bisogno di altri concetti già noti i quali, a loro volta, devono essere definiti usando altri concetti già noti, i quali a loro volta… Se si vuole evitare un "regresso all'infinito" o un "circolo vizioso" che non approdano a nessuna definizione è giocoforza scegliere alcuni **termini** senza darne alcuna definizione. Questi termini vengono chiamati **termini primitivi.** Il loro comportamento viene fissato **dai postulati o assiomi**. I termini primitivi vengono utilizzati per dare le definizioni, cioè per introdurre i termini definiti.

Nella costruzione di una **teoria degli insiemi** in termini “insieme”, “elemento”, “appartenenza” sono, in generale, assunti come primitivi e il loro comportamento e le loro proprietà vengono descritti attraverso un certo numero di assiomi.
La teoria degli insiemi è abbastanza giovane perché ha mosso i primi passi verso la fine del secolo XIX per opera di Georg Cantor (1845 – 1918), matematico tedesco fra i più arditi e i più discussi. Di lui si può veramente dire che fu “segno d’immensa invidia e di pietà profonda, d’inestinguibil odio e d’indomato amor”. Sono rimaste celebri due valutazioni dell’opera di Cantor. David Hilbert (1862 – 1943), tedesco, affermò che “nessuno ci caccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi”; per Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), francese, invece, la teoria degli insiemi era “una malattia da cui i matematici farebbero bene a guarire al più presto”.
La teoria di Cantor si rivelò subito fonte di diversi guai (antinomie, contraddizioni), ma Ernst Zermelo (1871 – 1953), nel 1908, riuscì a presentarne una impostazione assiomatica che sistemava le cose. Oggi i matematici non possono fare a meno della teoria degli insiemi.

Come è noto la teoria degli insiemi, con il nome di “insiemistica”, verso la fine degli anni sessanta è entrata nella scuola elementare italiana e gli insegnanti se ne servivano per introdurre il concetto di numero e le operazioni aritmetiche. La moda è durata una decina di anni, ma poi l’interesse, per fortuna, è andato scemando.
Il linguaggio degli insiemi, però, è entrato ufficialmente nei programmi della scuola media del 1979. Se ne parla nelle “Osservazioni sui contenuti” e compare nel titolo del tema “Insiemi numerici”.
I programmi del 1985 per la scuola elementare ne fanno un breve cenno nel tema “Logica”, ma solo nel secondo ciclo.
Le **Bozze delle Indicazioni nazionali per la scuola primaria**, del 2002 e del 2003, non contengono la parola “insieme”in nessuno dei temi previsti; le **Raccomandazioni**, nel commento al tema “Il numero” ne escludono l’uso per introdurre i numeri e le loro operazioni, mentre nel commento al tema “Introduzione al pensiero razionale” prevedono per i ragazzi di “acquisire alcuni concetti e strutture formali (insiemi e loro rappresentazioni, relazioni e loro proprietà, formalismo logico elementare del calcolo delle proposizioni).
Le Bozze delle Indicazioni nazionali per la scuola secondaria di primo grado, del 2002 e del 2003, prevedono, nel tema “Introduzione al pensiero razionale” la “intuizione della nozione di insieme e introduzione delle operazioni elementari tra essi.”

Un consiglio. Non usare mai gli insiemi per introdurre i numeri e le operazioni aritmetiche per i seguenti motivi:
1 – c’è l’esplicita proibizione dei programmi
2 – la teoria degli insiemi è più difficile della aritmetica
3 – la teoria degli insiemi non è necessaria per introdurre l’aritmetica
4 – i numeri sono più familiari e intuitivi delle corrispondenze biunivoche e delle relazioni di equipotenza
5 – per usare la teoria degli insiemi per introdurre le operazioni aritmetiche bisogna introdurre concetti estremamente controintuitivi come quello di insieme vuoto e di insieme unitario.
En passant dirò che, a differenza di quanto pensano molti insegnanti, c’è un **solo insieme vuoto.**

Ritorniamo agli insiemi (a livello adulto).
Una delle operazioni fra insiemi, e che ci serve per introdurre il concetto di relazione, è quella di **prodotto cartesiano.**
E’ indubbiamente l’operazione più difficile (rispetto a unione, intersezione, complementazione) perché il risultato dell’operazione è un nuovo insieme i cui elementi sono completamente diversi dagli elementi degli insiemi di partenza.
La sua **definizione** è la seguente:

dati due insiemi **A** e **B** si chiama prodotto cartesiano di **A** per **B,** e lo si indica con **AxB,** l'insieme delle **coppie ordinate** (a, b) con $a \in$ **A** e $b \in$ **B.**
L'espressione "coppia ordinata" è ormai familiare anche nella scuola elementare.
Se ne parla, per esempio, nelle operazioni binarie della addizione e della moltiplicazione e, ancor di più, nella sottrazione e nella divisione. Se ne parla quando in un segmento si vuole distinguere il primo dal secondo estremo e nelle frazioni per distinguere il numeratore dal denominatore.
L'espressione "coppia ordinata" fa pensare che esistano anche "**coppie non ordinate**". E' vero.

Che cosa è una coppia non ordinata? E' un qualunque insieme X formato da due elementi:
X = {c,d}.
Siccome l'insieme {d,c} è uguale all'insieme X perchè ha esattamente gli stessi elementi, ne consegue che {c,d} ={d,c}. Quindi in un insieme non conta l'ordine nel quale sono elencati gli elementi.

Molto più difficile è definire la coppia ordinata.
Di solito si dice che è una coppia nella quale c'è un primo ed un secondo elemento. Solo che bisognerebbe aver introdotto un ordinamento. La definizione che presento è dovuta a N. Wiener (1894 – 1964) e K. Kuratowski (1896 – 1980) ed è certamente molto poco intuitiva.
La coppia ordinata (a, b) è un insieme che ha come elementi l'insieme formato dal solo elemento a e l'insieme formato dalla coppia non ordinata a e b.
La scrittura simbolica è più semplice: (a, b)= { {a}, {a, b}}.
Ci vuole indubbiamente una bella fantasia ad inventare una simile definizione ed una notevole dose di coraggio dato che essa non ha alcuna plausibilità intuitiva. Eppure è stata inventata per rispettare una proprietà molto intuitiva delle coppie ordinate.
Quando due coppie ordinate (a,b) e (c, d) sono uguali? L'intuizione ci dice quando a=c e b=d.
Ebbene questa proprietà è facilmente verificata se assumiamo la definizione data di coppia ordinata.
Infatti (a, b) = (c, d) significa { {a}, {a, b}}={ {c}, {c, d}}. Questa uguaglianza comporta che i due insiemi abbiano gli stessi elementi. Quindi deve essere {a}= {c} e perciò a=c e {a, b}= {c, d}. Essendo a=c ne segue che b = d.
E' ovvio che $(a,b) \neq (b, a)$.
Questo lo si vede bene usando i numeri per indicare i punti del piano. Dato un riferimento cartesiano ortogonale il punto $(2, 3) \neq (3, 2)$

Per arrivare alla definizione di Relazione abbiamo bisogno di un altro concetti insiemistica molto semplice: quello di **sottoinsieme. Dato un insieme A, un insieme B è sottoinsieme di A se e solo se tutti gli elementi di B sono elementi di A.**

Per esempio, dato l'insieme N dei numeri naturali, l'insieme P dei numeri pari è sottoinsieme dell'insieme N.

Adesso possiamo definire il concetto di **relazione binaria.**
Dati due insiemi A e B si chiama relazione di A verso B un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB.

Siccome gli elementi del prodotto cartesiano sono coppie ordinate, segue che una relazione è un **qualunque** insieme di coppie ordinate.
Notare l'aggettivo "qualunque".
Una generica relazione di A verso B (o di A in B) viene indicata di solito con la lettera **R.**

Nella definizione di relazione entrano in gioco **tre insiemi**: A, che è detto insieme di partenza, B che è detto insieme di arrivo, G che è il sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB e viene detto grafico (o grafo) della relazione R. Possiamo, quindi, rappresentare la relazione R con una terna

ordinata di insiemi: R = (A, B, G). Solitamente si identifica R con G.

Il sottoinsieme G potrebbe essere l'**insieme vuoto.** Si parla, allora, della **relazione vuota**.
Esempio: A= { 1, 2, 3}; B={ 7, 10}. La relazione è quella di uguaglianza formata da tutte le coppie ordinate (a, b) nelle quali a=b. Nessuna delle sei coppie del prodotto cartesiano AxB la verifica. Quindi la relazione è vuota.

Il sottoinsieme G può coincidere con tutto il prodotto cartesiano. Si parla allora della **relazione totale.**

Fra questi due casi estremi ci sono tutte le altre possibilità.

- Ci può essere un solo elemento di A che è in relazione con un solo elemento di B.
Esempio. A= { 1, 2, 3}; B={6, 7, 10}. La relazione è: b è il doppio di a cioè b=2a
Delle nove coppie del prodotto cartesiano solo la coppia (3, 6) verifica la relazione.

- Ci può essere un solo elemento di A che è in relazione con più (anche tutti) elementi di B.
Esempio. A= { 1, 2, 3}; B={5, 7, 11}. La relazione è: b è divisibile per a. La relazione è formata dalle coppie ordinate (1,5), (1, 7), (1, 11).

- Ci possono essere più elementi di A (anche tutti) che sono in relazione con uno stesso elemento di B.
Esempio. A= { 6 , 2, 3}; B={6 , 5, 7, 11}. La relazione è: a è divisore di b. Le coppie che formano la relazione sono (6, 6), (2, 6), (3, 6).

- Ci possono essere più elementi di A (anche tutti) che sono in relazione con più elementi di B (anche tutti).
Esempio. A= { 13, 6 , 2, 3}; B={6 , 5, 7, 11, 9}. La relazione è: a è minore di b. Scrivere le coppie che formano la relazione.

Gli esempi sono fatti con insiemi numerici finiti, ma potremmo usare insiemi numerici infiniti come i numeri naturali, i pari, i dispari, gli interi relativi, ma anche un insieme di rette con le relazioni di incidenza, perpendicolarità, parallelismo, ecc.

Dal punto di vista didattico una rappresentazione efficace delle relazioni è quella che fa ricorso ai diagrammi di Eulero-Venn per rappresentare gli insiemi di partenza e di arrivo ed alle frecce per unire gli elementi che sono in relazione fra di loro.

Qualche esercizio.
1 – Rappresentare iconicamente le relazioni viste finora.
2 – Quante sono le coppie ordinate della relazione $a<7$? Quale può l'insieme di partenza? E quello di arrivo?
3 – Quali sono le coppie ordinate che verificano la relazione $x^2 + y^2 = 5$? Qual è l'insieme di partenza? E quello di arrivo?
4 – Trovare le coppie della relazione $a + b = 10$. Qual è l'insieme di partenza? E quello di arrivo?

5 – Una relazione definita con le stesse parole può cambiare se si cambiano l'insieme di partenza o quello di arrivo? Se si dare qualche esempio.
6 – Considerare la relazione R={ (1,2), (2,3), (3,4),(4,5)}, determinare l'insieme di partenza e quello di arrivo ed esprimere la relazione in forma generale.

Nota
Nei programmi della scuola media del 1979 le relazioni sono esplicitamente richiamate nel tema "Corrispondenze- Analogie strutturali": Richiami, confronti e sintesi dei concetti di relazione, corrispondenza, funzione.
Negli altri temi sono nominati alcune delle relazioni più familiari: isoperimetria, equivalenza, multipli, divisori, proporzionalità, ecc.
Nei programmi di "Matematica 2001" elaborati da una commissione dell'Unione Matematica Italiana, vi è un tema specifico "Relazioni" che si sviluppa dalla prima elementare alla terza media.
Nelle Indicazioni nazionali del 2002 non compare mai la parola Relazione, ma solo esempi di relazioni nei vari temi, come multipli, divisori, congruenza ecc.

Nei programmi della scuola elementare del 1985 si parla esplicitamente di relazioni nel tema "aritmetica" e nel tema "logica".
In quelli del 2001 abbiamo già visto.
Nelle Indicazioni nazionale del 2002 e 2003, nel primo biennio si chiede di "descrivere e costruire relazioni significative" nel tema "Introduzione al pensiero razionale" e nel secondo biennio si trova "relazioni tra oggetti" sempre nello stesso tema. Anche in altri temi si parla di relazioni, non sempre a proposito come nel tema "Il numero": "riconoscere e costruire relazioni tra numeri naturali (multipli, divisori, numeri primi). Questi ultimi non sono relazioni.

PROPRIETA' DELLE RELAZIONI - 1

Un vezzo dei matematici, molto ragionevole ed utile, una volta definito un certo ente, è di andarne a cercare le proprietà. Anche il concetto di relazione deve sottostare a questa norma. Sono proprio le diverse proprietà che servono a classificare le relazioni.
Incominciamo ad esaminare il caso nel quale **i due insiemi A di partenza e B di arrivo siano diversi**.
1 – Può succedere che la relazione interessi **tutti gli elementi** dell'insieme A e che ciascuno abbia, in B, uno ed un solo **corrispondente.** In altre parole ad ogni elemento di A è associato uno ed un solo elemento di B. Questo elemento viene detto il **corrispondente** o anche **l'immagine** dell'elemento di A con il quale è in relazione.
In questo caso la relazione prende il nome di **corrispondenza o funzione,** e viene di solito indicata con la **lettera f.** Invece di scrivere che la coppia ordinata (a, b) appartiene alla relazione R si scrive: f(a) = b.
Esempio. A ={ 1, 2 ,3 }; B ={ 2, 4 ,6, 7 ,10}. La relazione è espressa con la frase: b è il doppio di a, cioè b=2 a. Le coppie che formano la relazione sono: (1, 2), (2, 4), (3, 6).
Tutti gli elementi di A sono interessati, cioè hanno un corrispondente in B e quindi si tratta di una funzione. Al posto di scrivere le coppie, possiamo scrivere: f(1) = 2; f(2)= 4, f(3)= 6.
Con una sola espressione: per ogni $n \in A$ si ha f(n) = 2n.
Considerando globalmente la funzione da A in B si scrive: $f: A \rightarrow B$.

Come risulta dalla definizione, e come si vede dall'esempio considerato, per avere una funzione è importante che siano interessati tutti gli elementi di A.
E gli elementi di B?
Possono essere tutti interessati, come in questo
Esempio. Sia **A=N** l'insieme dei numeri naturali e **B=P** quello dei numeri pari. La relazione è quella che associa ad ogni numero naturale il suo doppio, cioè $f(n) = 2\ n$.
Ovviamente **ogni** numero naturale è interessato perché ogni numero naturale ha un doppio e quindi la relazione è una funzione. Anche ogni numero di **P** è interessato perché essendo pari è il doppio di un numero naturale.

Possono essere interessati solo alcuni, come nel primo esempio riportato.

Può essere interessato un solo elemento. In questo caso, che può sembrare un po' strano, la **funzione si dice costante.**

Esempio. A ={ 1, 2 ,3 }; B ={ 2, 4 ,6, 7 ,10}. La relazione è formata dalle coppie (1, 10), (2, 10), (3, 10). Possiamo scrivere: $f(1) = 10$; $f(2) = 10$; $f(3) = 10$. In modo compatto: $\forall n \in A \;\; f(n) = 10$.

Un classico **esempio di funzione costante**, che si fa sempre nella scuola di base, è quello della probabilità nel lancio di un dado onesto, nel quale cioè tutte le facce hanno la stessa probabilità di uscire.
Se A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} è l'insieme dei possibili esiti del lancio di un dado, a ciascuno di essi è associata la probabilità 1/6 di uscita. Come si vede, tutti gli elementi di A sono interessati e ciascuno di essi ha la stessa probabilità La probabilità, quindi, è una funzione costante.

Di funzioni, nella prassi didattica della scuola elementare e nei programmi, se ne incontrano parecchie.
La più semplice, e la più importante, è la funzione **"successivo".**
Giuseppe Peano (1858 – 1932), il primo che ha dato una sistemazione assiomatica alla aritmetica, ha posto la funzione di successivo tra i concetti primitivi, cioè tra i concetti fondamentali da usare nelle definizioni successive.
In prima elementare si chiede sempre, dato un numero, di trovare il suo successivo. **Ogni** numero naturale ha un successivo ed uno solo. Quindi la relazione di successivo è una funzione.
L'insieme di partenza è **N.** Come insieme di arrivo possiamo considerare ancora **N** ed allora c'è un numero, lo zero, che non è interessato perché zero non è il successivo di nessun numero. Se, invece, come insieme di arrivo, e lo possiamo sempre fare, consideriamo i numeri naturali ad incominciare da 1, allora tutti i numeri sono interessati.
Se come insieme di partenza, come si fa nella scuola media, consideriamo l'insieme **Z** dei numeri interi relativi e come insieme di arrivo consideriamo lo stesso insieme, allora sono interessati tutti i numeri dell'insieme di partenza, perché ciascuno ha un successivo ed uno solo, e tutti i numeri dell'insieme di arrivo perché ciascuno è il corrispondente, è l'immagine, è il successivo di un numero.
Se facciamo un passo in avanti e consideriamo l'insieme **D** dei numeri decimali, la relazione di "successivo" non esiste più. Come mai? Tutto dipende dalla definizione di "successivo" che noi siamo abituati a legare con il +1, mentre conviene mettersi da un punto di vista più generale.
Definizione di successivo.
Consideriamo un insieme **A totalmente ordinato**, nel quale cioè, sia sempre possibile confrontare due elementi per stabilire se essi sono uguali oppure quale è il maggiore.
Prendiamo un elemento qualunque x. Chi è il successivo di x, che possiamo indicare con Sc(x)?
Se c'è il successivo di x è un elemento che verifica queste due proprietà:

- $Sc(x) > x$
- Non esiste alcun elemento z che sia maggiore di x e minore di Sc(x), cioè nessun z è tale che $x < z$ e $z < Sc(x)$.

In altre parole fra x ed il suo successivo non ci deve essere nessun elemento dell'insieme A. E' questo il motivo per cui in N ed in Z ogni x ha un successivo ed uno solo, e è uguale ad x+1, mentre in D non esistono i successivi perché fra due numeri decimali qualunque esistono sempre altri (infiniti) numeri decimali.

Osservazione
Parlando di successivo abbiamo "tradito" l'ipotesi iniziale di considerare l'insieme di partenza diverso dall'insieme di arrivo. Abbiamo semplicemente anticipato il caso in cui i due insiemi coincidono.

Dato che il "tradimento" è già stato consumato portiamo un altro esempio di funzione che ha come insieme di partenza N e come insieme di arrivo N. Si tratta della funzione **"fattoriale".** E' una funzione che non viene esplicitamente trattata nella scuola elementare, ma è bene che l'insegnante la conosca.
Dato un numero $n > 0$ qualsiasi chiamiamo fattoriale di n, e lo indichiamo con n!, il prodotto di tutti i numeri da 1 ad n.
Quindi: $1! = 1$; $2! = 1x2 = 2$; $3! = 1x2x3 = 6$, ecc.
Per non lasciare orfano lo 0 possiamo convenire che $0! = 1$.
Con questa convenzione il fattoriale è una funzione perché interessa tutti i numeri dell'insieme di partenza; non sono interessati, però, tutti i numeri dell'insieme di arrivo. Per esempio i numeri 3, 4, 5 non sono fattoriali di nessun numero.
Questa funzione viene usata nella scuola elementare in alcuni problemi combinatori come questo:
Problema. Marco possiede un po' di automobiline e vorrebbe assegnare a ciascuna una targa. Ha a disposizione solo le cifre 1, 2, 3. Se decide di fare targhe usando tutte e tre le cifre senza mai ripeterle, quante targhe riesce a fare?
La risposta è $3! = 6$ che è il numero delle permutazioni di tre elementi.

Nella scuola media gli studenti imparano che in Z ad ogni numero a possiamo associare il suo opposto -a. La relazione che lega ogni numero al suo opposto, cioè l'insieme delle coppie ordinate (a, -a) è una funzione perché interessa tutti gli elementi di Z e ciascuno di essi ha un solo opposto.
Le funzioni che abbiamo visto finora lavorano sempre su un elemento alla volta. Per questo sono spesso chiamate **funzioni unarie.** L'aggettivo è brutto o, almeno, inconsueto, ma ormai è entrato nell'uso matematico.
Funzioni di questo tipo le usiamo anche in geometria.
Noi sappiamo, per esempio, che per ogni retta r del piano esiste una simmetria che ha quella retta come asse. La relazione retta – simmetria assiale è una funzione.
E' una funzione anche la relazione che lega ogni punto con la simmetria centrale che ha quel punto come centro.

Nella scuola di base siamo più abituati a trattare con **funzioni binarie**, cioè con funzioni che lavorano su coppie ordinate di elementi. E' il caso classico della addizione e della moltiplicazione fra numeri naturali.
In queste due operazioni l'insieme di partenza **non è N**, ma l'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali cioè gli elementi di **NxN**, del prodotto cartesiano di N per se stesso, mentre l'insieme di arrivo è **N**, perché il risultato delle due operazioni è un numero naturale.
Quello che abbiamo detto per N vale anche per Z e per Q (insieme dei numeri razionali).

Tutti noi sappiamo che cosa è la **media aritmetica di due numeri.** Anch'essa è una operazione binaria. L'insieme di partenza può essere NxN, ZxZ, QxQ, ma l'insieme di arrivo è sempre Q.

In geometria ad **ogni coppia di punti distinti** del piano possiamo sempre associare la **unica retta** che passa per quei due punti. La relazione che lega le coppie di punti distinti alla retta che passa per essi è una funzione binaria. Il suo insieme di partenza è **Pd** (insieme delle coppie di punti distinti) ed il suo insieme di arrivo è **R** (insieme delle rette del piano).

Nel piano ad ogni punto P e ad ogni segmento s noi possiamo associare la circonferenza che ha centro P e raggio s. Se indichiamo con **Π** l'insieme dei punti del piano, con **S** l'insieme dei segmenti e con **C**(P,s) l'insieme delle circonferenze di centro P e raggio s, la relazione prima descritta è un funzione binaria che ha come insieme di partenza il prodotto cartesiano **Π**x**S** e come insieme di arrivo **C**(P,s).

Esercizi

1 – Consideriamo l'insieme N e la relazione di massimo comun divisore fra due numeri. Si tratta di una operazione binaria? Perché?
2 – Consideriamo l'insieme N e la relazione di minimo comun multiplo fra due numeri. Si tratta di una operazione binaria. Perché?
3 – Consideriamo l'insieme N e la relazione di "precedente". Si tratta di una operazione? Perché? In quale insieme è una operazione?
4 – Consideriamo l'insieme N e la relazione di elevamento a potenza, cioè l'insieme delle coppie ordinate (m, n) alle quali è associato m elevato a n. Si tratta di una operazione? Perché?
5 – Consideriamo l'insieme Q dei numeri razionali e la relazione che ad ogni numero razionale associa il suo inverso: x--->1/x. Si tratta di una operazione? Perché?
6 – Ho scritto all'inizio che ogni ente matematico è una ragnatela di relazioni. Far vedere che questo è vero, per esempio, per il numero 10.

Le particolari relazioni che abbiamo chiamato funzioni possono avere o non avere alcune proprietà che ora illustriamo brevemente. Possiamo illustrarle tutte guardando quello che succede nell'insieme di arrivo.
La prima proprietà che una funzione può avere è la **iniettività.** Il termine sa di infermeria, soprattutto quando si dice che la funzione iniettiva è una iniezione, ma la realtà è diversa.

Una funzione f da A in B: f: A→ B si dice **iniettiva** quando ogni elemento di B è immagine, è il corrispondente **al più** di un elemento di A.

Se rappresentassimo la funzione con delle frecce che vanno da A a B succederebbe che ad ogni elemento di B arriva o nessuna freccia o una sola freccia.

Si può esprimere questa proprietà usando anche l'insieme di partenza A: una funzione è iniettiva quando elementi diversi di A hanno corrispondenti diversi in B.

Esempi

La funzione di **successivo** è iniettiva perché numeri diversi hanno successivi diversi.
La funzione **doppio** cioè f: N→N (o da N in P (numeri pari)) con f(n) = 2 n è iniettiva perché numeri diversi hanno doppi diversi.

Sono iniettive anche le funzioni **triplo, quadruplo**, ecc.
La funzione **fattoriale** se togliamo $0! = 1$ è iniettiva, altrimenti no perché ci sono due numeri diversi, 0 e 1, che hanno lo stesso fattoriale.
La funzione che ad ogni punto del piano, fissato un asse di simmetria, associa il suo **simmetrico** è iniettiva.

In Z le funzioni di **opposto e di precedente** sono iniettive.

Ci sono, però, anche funzioni **non iniettive.**
Una funzione **costante** non è iniettiva.
L'addizione non è iniettiva perché coppie ordinate diverse di numeri possono avere la stessa somma come (5, 1), (3, 3), ecc. Questo può essere scoperto in prima elementare giocando con i numeri amici nella addizione.
Per lo stesso motivo anche la **moltiplicazione** non è iniettiva.
Anche la funzione elevamento a potenza non è iniettiva perché tutte le diverse coppie (1, n) hanno lo stesso risultato. Si pensi anche alle coppie (2, 2) e (4, 1) che hanno risultato 4.

Osservazione
Il fatto che una funzione sia o non sia iniettiva dipende dall'insieme di partenza in cui è definita.
Per esempio la funzione **quadrato** che ad ogni numero a associa il suo quadrato: $a x a = a^2$, se il suo insieme di partenza è Z non è iniettiva perché alle due coppie diverse (-2, 2) e (2, 2) associa lo stesso risultato 4; se il suo insieme di partenza è Z^0 (insieme dei numeri relativi non negativi) allora è iniettiva.

Una seconda proprietà di cui una funzione può godere è la **suriettività.** Il termine è abbastanza giustificato perché significa che l'insieme di partenza va a finire su tutto l'insieme di arrivo.

Una funzione f: A→B è **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine, è il corrispondente di **almeno** un elemento di A.
In termini di frecce possiamo dire che una funzione è suriettiva se ad ogni elemento di B arriva almeno una freccia.

Esempi
La funzione **doppio** con f: N→P, cioè, f(n) = 2 n è suriettiva perché ogni numero pari è il doppio di un numero naturale.
La funzione **successivo** con f: Z→Z è suriettiva perché ogni numero intero relativo è il successivo di un numero.
L'**addizione,** in qualunque insieme numerico, è suriettiva perché ogni numero è somma di una coppia di numeri. (In genere è somma di più coppie, ma l'importante è che lo sia di una).
La stessa cosa vale per la **moltiplicazione**.
La funzione che ad ogni punto del piano fa corrispondere il suo **simmetrico**, rispetto ad un fissato asse, è suriettiva perché ogni punto del piano è il simmetrico di un altro punto del piano.
La funzione **opposto** in Z è suriettiva perché ogni numero è l'opposto di un altro numero.

Naturalmente ci sono anche funzioni non suriettive.
La funzione di **successivo** in N non è suriettiva per via dello 0.
La funzione di **fattoriale** non è suriettiva.

Ci sono, infine, funzioni che sono **iniettive e suriettive.** Queste funzioni sono dette **biiettive o biunivoche.**

Esempi
Tutte le **isometrie** (simmetrie assiali, centrali, traslazioni, rotazioni, glissosimmetria) sono funzioni biunivoche.
Le **similitudini** nel piano sono funzioni biunivoche.
La funzione **doppio** da N a P è biunivoca.
Le funzioni **successivo e precedente** in Z sono biunivoche.

Nota
Se due insiemi sono in corrispondenza biunivoca si dice che sono equipotenti o equinumerosi o che hanno la stessa cardinalità. Quando questa cardinalità è infinita succedono fenomeni che a prima vista hanno del paradossale.
Per esempio, siccome l'insieme dei numeri naturali è in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri pari i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi anche se a prima vista i naturali sembrano il doppio di quelli pari.
Anche l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei loro quadrati sono in corrispondenza biunivoca sono in corrispondenza biunivoca e quindi hanno la stessa numerosità anche se i quadrati sembra, a prima vista, più rari dei numeri naturali. Proprio davanti a questa fatto Galileo si è fermato ed ha scritto che al nostro intelletto finito non è lecito discorrere dell'infinito e che nell'infinito non si può parlare di maggiore, minore, uguale.
E' seguendo questa strada che si può dimostrare che i numeri interi relativi ed i numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali. E qui ci fermiamo.

Esercizi
1 – Costruire una funzione tra due insiemi finiti che non sia né iniettiva né suriettiva e rappresentarla con le frecce.
2 - Costruire una funzione tra due insiemi finiti che sia iniettiva, ma non suriettiva e rappresentarla con le frecce.
3 - Costruire una funzione tra due insiemi finiti che non sia iniettiva, ma sia suriettiva e rappresentarla con le frecce.
4 - Costruire una funzione tra due insiemi finiti che sia iniettiva e suriettiva e rappresentarla con le frecce.
5 – Quando si usava l'insiemistica si usavano le corrispondenze biunivoche. A che proposito? Con quali risultati?

PROPRIETA' DELLE RELAZIONI – 2

Ora consideriamo le relazioni per le quali insieme di partenza ed insieme di arrivo coincidono. Si parla, allora, di **relazioni in un insieme.**

Abbiamo già visto alcuni esempi. Eccone altri.

I programmi del 1985 prevedono, per il primo ciclo, di calcolare il doppio, il triplo, il quadruplo di un numero. E' chiaro che l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo coincidono perchè sempre si tratta dell'insieme **N** dei numeri naturali. Queste relazioni, doppio, triplo, quadruplo, sono relazioni nell'insieme **N.**

Più in generale, la relazione “essere multiplo di” è una relazione nell’insieme **N** oppure nell’insieme **Z** dei numeri interi relativi.

Anche per queste relazioni i matematici hanno esplorato le possibili proprietà e se ne sono serviti per classificare le relazioni stesse.

Proprietà riflessiva

Iniziamo la nostra ricerca con qualche esempio.

Riprendiamo la relazione **“essere multiplo di”** nell’insieme **N.** Alla domanda: è vero che ogni numero è multiplo di se stesso? c’è chi risponde affermativamente e chi nega recisamente. Per risolvere la questione conviene dare la definizione di multiplo.
Definizione.
Un numero m si dice multiplo di n se e solo se esiste un numero k naturale in modo che valga la uguaglianza: $m=kn$. (1)

Se prendiamo $k= 0$ deriva che $m=0*n = 0$ qualunque sia il numero n. La conclusione, forse un po’ inaspettata, è che 0 è multiplo di ogni numero. Questa, però, non è la risposta alla nostra domanda.

Prendiamo $k = 1$. Otteniamo $m = 1*n = n$. La uguaglianza (1) è verificata. Siccome $m = n$ allora m è multiplo di se stesso. Questo vale qualunque sia m. In altre parole, nella relazione “essere multiplo di” **ogni numero è in relazione con se stesso**. Se indichiamo la relazione genericamente con il simbolo $\Re$ possiamo dire che per **ogni m si ha $m\Re m$.**

Consideriamo la familiare relazione di **uguaglianza** nei numeri naturali (o negli interi relativi, o nei razionali o nei reali). Non c’è nessuna difficoltà ad ammettere che **ogni numero è uguale a se stesso.** Possiamo scrivere che per **ogni numero a si verifica $a=a$.**

Consideriamo ora la relazione di **parallelismo** tra le rette del piano.
La definizione di parallelismo che ora adottiamo è la seguente: una retta x del piano è parallela alla retta y se e solo se x coincide con y oppure x e y non hanno punti in comune.[Parallelismo in senso largo.]
Con questa definizione è chiaro che **ogni retta è parallela a se stessa.**
Se indichiamo il parallelismo con il simbolo // possiamo scrivere che per **ogni retta x vale x//x.**

Questi esempi ci servono per introdurre la prima proprietà di cui una relazione può godere: la

Proprietà riflessiva.
Come abbiamo visto negli esempi precedenti, perché una relazione $\Re$ sia riflessiva è necessario che ogni elemento dell’insieme in cui la relazione è definita sia in relazione con se stesso.

Definizione.
Se chiamiamo A l’insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **riflessiva** se e soltanto se
$\forall a\in A$ si ha $a\Re a$.
Se rappresentiamo la relazione con delle frecce, la proprietà riflessiva fa si che da ogni elemento parta una freccia che ritorna all’elemento stesso (si ha il cappio).

Nella scuola di base si studiano svariate relazioni che godono della proprietà riflessiva. Oltre alle tre che abbiamo visto prima è da ricordare la relazione di **maggiore o uguale ($\geq$)**. Si tratta di una

relazione complessa perché composta da due relazioni: quella di maggiore (>) e quella di uguale (=) combinate fra loro dal connettivo “o” in senso debole, cioè come disgiunzione inclusiva.
La prima relazione non è riflessiva, la seconda si come quella composta dalle due.
Di questa relazione è necessario parlare già nella scuola elementare quando si vuole introdurre qualche riflessione sulla sottrazione in modo che gli studenti si rendano conto quando essa si può eseguire e quando si tenta di spiegare perché nella tabella della sottrazione c'è tutta una zona vuota.
Prima di questa riflessione la relazione può essere introdotta operativamente combinando fra di loro la tabella del maggiore con la tabella dell'uguale.
A dire il vero questa relazione suscita perplessità anche negli insegnanti. Di fronte a domande come: è vero che **3≥3** oppure **7≥5** spesso si ottengono risposte negative perché 3 è uguale a 3 e 7 è maggiore di 5. Evidentemente tutto si gioca sul significato del connettivo “o”.
Le difficoltà dovrebbero scomparire se teniamo presente la definizione di **≥.**

Definizione.
Dati due numeri naturali qualunque a e b diciamo che **a≥b** se e solo se esiste **c** in modo che valga l'uguaglianza **a = b + c.**

Per rispondere correttamente alla domanda: è vero che per ogni numero a a≥a dobbiamo verificare se esiste un numero c in modo che valga l'uguaglianza a = a + c. Questo numero ovviamente esiste ed è c = 0. Quindi la nostra relazione è **riflessiva.**

Nella scuola elementare e nella scuola media si parla di **frazioni uguali o equivalenti.**
Di solito si da la regola per trasformare una frazione in una equivalente: basta moltiplicare (o dividere quando si può) numeratore e denominatore per uno stesso numero diverso da zero. Spesso si dice anche che due frazioni, pensate come operatori, sono uguali (o equivalenti) quando “producono lo stesso risultato”. Molto raramente si ha il coraggio di dare una definizione matematicamente corretta, anche se è molto semplice. A livello adulto, però, è bene conoscerla anche per decidere se è il caso di proporla in classe.

Definizione.
Due frazioni a/b e c/d sono equivalenti se e solo se vale l'uguaglianza: ad = cb.

Come si vede la strumentazione concettuale richiesta è semplicissima: solo la moltiplicazione fra numeri naturali.
Si tratta di vedere se la relazione di equivalenza tra frazioni è riflessiva. Tutti sono concordi, ma vogliamo ugualmente applicare, come esercizio, la definizione. Per essere riflessiva deve verificarsi: a/b **=** a/b cioè, per definizione, ab = ab. Il che è evidentemente vero. La nostra relazione, quindi, è **riflessiva.**

Un'altra relazione riflessiva è la **congruenza (o uguaglianza)** tra figure. Comunque si definisca la congruenza (con la sovrapponibilità, con la corrispondenza in una isometria, ecc.) ogni figura è congruente a se stessa, cioè la relazione è **riflessiva.**

Nella scuola di base si studiano anche relazioni non riflessive come la relazione di maggiore tra numeri, la relazione di incidenza e di perpendicolarità tra rette.

Nella vita quotidiana molte sono le relazioni non riflessive come: “essere padre di”, “essere figlio di”, “essere marito di” perché nessuno è padre di se stesso, nessuno è figlio di se stesso, nessuno è marito di se stesso.

Osservazione 1.
Una relazione è riflessiva quando coinvolge tutti gli elementi di un insieme e li mette in relazione con se stessi. Basta che un solo elemento sfugga a questa regola e la relazione non è riflessiva.
Ecco un esempio.
Nell'insieme A = { 1, 2, 3 } prendiamo la relazione definita da queste coppie ordinate: (1,1), (2,2), (1,3), (3,1). [Per soddisfare l'occhio si può scrivere una tabella a doppia entrata e usare le crocette.]
Questa relazione **non è riflessiva** perché manca la coppia (3,3).

Osservazione 2.
Le relazioni non riflessive nominate prima (maggiore, incidenza, perpendicolarità, essere padre di, essere figlio di, essere marito di) hanno una particolarità: **nessun elemento è in relazione con se stesso**. Per questo vengono chiamate **antiriflessive**. (Le altre, come quelle della osservazione 1 sono dette ariflessive.)

Esercizi
1 - Nella scuola di base, oltre a quelle ricordate, si studiano altre relazioni che sono riflessive? Se si darne una definizione e mostrare la riflessività.
2 – Costruire, usando tabelle a doppia entrata, relazioni ariflessive e relazioni antiriflessive.
3 –Nella scuola di base si studiano, oltre a quelle ricordate, relazioni antiriflessive? Se si darne una definizione e mostrarne la antiriflessività.
4 – La relazione "essere fratello di" è riflessiva?
5 – Nei numeri naturali la relazione "essere il quadrato di", cioè l'insieme delle coppie (n,n^2) è riflessiva? E' antiriflessiva? E' ariflessiva? E la relazione "essere il doppio di"?
6 – Una frazione dice ad un'altra: se io sono uguale a me stessa e tu sei uguale a me, allora io e te siamo la stessa frazione. Ragiona bene la frazione? Perché?
7 – Nella scuola di base si chiamano per nome certe proprietà delle operazioni: commutativa, associativa, distributiva, ecc. E' il caso di parlare anche di proprietà riflessiva? Perché? (Vedere Rossi-Gardelli, Più fatti che parole,vol. 2 pag. 37).
8 – Quali sono i significati della parola "riflessiva" nel linguaggio comune? C'è qualche rapporto con il significato matematico?

Proprietà simmetrica.

La parola simmetria, dal greco sym metria, richiama alla mente la misura come le parole geometria e isometria. Come proprietà di una relazione, però, la simmetria non ha nessuna relazione con la misura.

Iniziamo la nostra ricerca con qualche esempio.
Il primo riguarda la relazione di **uguaglianza.** Accettiamo senza difficoltà che **se** un primo "oggetto" è uguale ad un secondo "oggetto", **allora** il secondo è uguale al primo. Questa proposizione è ipotetica retta da "se…allora". Questo significa che in ordine alla proprietà simmetrica non è necessario, come era richiesto per la riflessiva, che la relazione riguardi tutti gli elementi dell'insieme in cui è definita. Possiamo esprimere in forma simbolica questa proprietà dell'uguaglianza:
$\forall$ a $\forall$ b se a = b allora b = a.

Il secondo esempio riguarda il **parallelismo fra rette.** Comunque si definisca il parallelismo (in senso largo come abbiamo visto, o in **senso stretto** cioè due rette sono parallele quando sono complanari e non hanno punti in comune) è ovvio che **se** la retta x è parallela alla retta y **allora** la retta y è parallela alla retta x. Proprio per questo fatto nella definizione di parallelismo abbiamo adottato l'espressione "due rette sono parallele" al posto di quella più corretta "una retta è parallela ad un'altra quando…".

La relazione di parallelismo non riguarda necessariamente tutte le rette dell'insieme che considero. Posso prendere, per esempio, un insieme formato da sei rette di cui due parallele fra di loro e le altre tutte incidenti. La proprietà simmetrica del parallelismo continua a valere. In forma simbolica possiamo scrivere:
$\forall$ x $\forall$ y se x// y allora y // x.

Il terzo esempio riguarda l'**equivalenza tra frazioni** che abbiamo definito prima. E' ovvio che **se** una frazione a/b è equivalente alla frazione c/d **allora** anche la frazione c/d è equivalente alla frazione a/b. Anche se ovvio proviamo a verificarlo (non fa male lavorare qualche volta con i simboli e non con i numeri).
La nostra ipotesi è che a/b sia equivalente a c/d, cioè che valga, per definizione, l'uguaglianza
ad = cb. (1)
La nostra tesi è che c/d è equivalente a a/b, cioè per la definizione data, deve valere la uguaglianza:
cb = ad. (2).
La cosa è davvero ovvia poiché la (2) è ottenuta dalla (1) applicando la proprietà simmetrica della uguaglianza.

Veniamo ora alla definizione generale.
Definizione.
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **simmetrica** se e soltanto se
$\forall$ a$\in$ A e $\forall$ b$\in$ A se a$\Re$b allora b$\Re$a.

Nella scuola di base, oltre a quelle ricordate, si studiano diverse relazioni con la proprietà di simmetria.
Una molto familiare è la relazione di **perpendicolarità tra rette.** I modi di definirla sono diversi:
- una retta x è perpendicolare ad una retta y se incontrandola forma un angolo congruente al suo adiacente;
- una retta x è perpendicolare ad una retta y se incontrandola forma un angolo retto;
- una retta x è perpendicolare ad una retta y se nella simmetria di asse y la retta x è unita, cioè si trasforma in se stessa.

Definizioni diverse, che usano strumenti concettuali diversi, ma equivalenti, nel senso che due rette perpendicolari secondo una delle tre definizioni lo sono anche secondo le altre due.
La relazione di perpendicolarità è **simmetrica.**

Anche la relazione di **congruenza** tra figure geometriche è **simmetrica.**

Talvolta nella scuola di base si introducono le *"aritmetiche finite"*, cioè le operazioni di addizione e di moltiplicazione come operazioni interne su un insieme finito di numeri. Si parla, per esempio, della aritmetica delle stagioni, dell'aritmetica della settimana, dell'orologio, ecc. Per arrivarci, cioè per avere operazioni interne, è necessario definire una relazione fra i numeri. Il termine tecnico è *"relazione di congruenza modulo m"*. Possiamo prenderci un po' di libertà e volendo fare l'aritmetica delle stagioni possiamo chiamare **"cugini"** *due numeri che divisi per 4 danno lo* ***stesso resto***. In questo modo sono **cugini**, per esempio, 0 e 4, 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7.
Questa relazione di **essere cugini** gode della proprietà simmetrica.
In generale le relazioni, in matematica come nella vita comune, che si esprimono usando "lo stesso", "il medesimo", ecc. sono simmetriche.
Relazioni come: avere la stessa lunghezza, avere lo stesso numero di cifre, terminare con la stessa cifra, sono simmetriche.

Naturalmente nella scuola di base si studiano anche relazioni che non sono simmetriche. Per esempio la relazione di maggiore, di minore, di maggiore o uguale, di minore o uguale, di essere multiplo, non sono simmetriche.

Esercizi.
1 – Oltre a quelle illustrate si studiano altre relazioni simmetriche nella scuola di base? Se si definirle.
2 – Costruire la tabella della addizione e della moltiplicazione dei numeri **cugini** rispetto a 4. C'è qualche osservazione da fare?
3 – La relazione generale di "parentela" è simmetrica? Esaminare qualche particolare relazione di parentela e verificare se è o no simmetrica.
4 – Diciamo che x è *parente* di y se $x+2y = 4$ (nei numeri naturali). Trovare le coppie della relazione. E' vero che y è *parente* di x?
5 – La relazione di *"vicinanza"* fra due stati (vicinanza = essere confinanti) è certamente simmetrica. E' anche riflessiva?
6 – Tutti ricordano la definizione di "numeri primi fra loro". Questa relazione è simmetrica? E' riflessiva?
7 – Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ consideriamo la relazione formata dalle coppie (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3). E' una relazione simmetrica? Perché? E' riflessiva? Perché?
8 – Come si rappresenta con le frecce la proprietà simmetrica di una relazione?
9 – Consideriamo una simmetria assiale di asse r e diciamo che il punto A è in relazione con il punto B se B è il simmetrico di A rispetto ad r. Questa relazione è simmetrica? Perché?
10 – Sia ABC un triangolo isoscele con l'asse di simmetria r che passa per C. Consideriamo la relazione "essere simmetrici rispetto ad r". Scrivere le copie della relazione. E' una relazione simmetrica? E' riflessiva? E' antiriflessiva?
11 – Nell'insieme considerato nell'esercizio 7 definire una relazione che non sia riflessiva né antiriflessiva né simmetrica.
12 – Se so che una relazione $\Re$ è simmetrica e so che gli elementi a, b, c, sono in relazione con z, che cosa posso dedurre?
13 – Per indicare la equivalenza tra frazioni si usano diversi simboli: =, ≅, ≡, ~. Quali sono i più usati nei libri di testo? Che cosa preferite e perché?

Proprietà antisimmetrica.

L'aggettivo antisimmetrico è poco usato nel linguaggio comune. La sua introduzione anche nel linguaggio matematico è abbastanza recente (secolo XX secondo la Stella Baruk). La sua composizione fa pensare a qualcosa che è contro la simmetria. In certo senso è vero anche se di questa proprietà si usa dare una definizione in positivo.
La proprietà antisimmetrica non è molto popolare e neppure molto nota fra i docenti della scuola di base, ma ha la sua importanza. Perciò ne parliamo, anche se con un po' di titubanza.

Incominciamo la nostra ricerca con qualche esempio.

Riprendiamo la relazione di "essere multiplo" nell'insieme dei numeri naturali e ricordiamo la **definizione:**
Un numero m si dice multiplo di n se e solo se esiste un numero k naturale in modo che valga la uguaglianza: $m=kn$. (1)
Supponiamo che m sia multiplo di n, cioè valga la (1).
Supponiamo anche che n sia multiplo di m e cioè che valga la uguaglianza $n = hm$ (2)
dove h è un numero naturale.

La reazione più spontanea è di dire che le due supposizioni sono incompatibili, cioè non possono essere vere contemporaneamente. Proviamo a lasciar perdere la reazione spontanea e cerchiamo di ragionare. Supponiamo, quindi, che le due affermazioni siano vere ed andiamo a vedere che cosa succede.
Partiamo dalla (1): $m = kn$ e al posto di n mettiamo il suo valore dato dalla (2). Otteniamo:
$m = kn = khm$, cioè $m = khm$ (3) (qui senza dirlo abbiamo usato la proprietà transitiva della uguaglianza che vedremo dopo).
Ora dividiamo per m i due membri della uguaglianza (3) (per questo dobbiamo supporre $m>0$ dato che siamo nei numeri naturali).
Otteniamo: $1 = kh$.
Nell'insieme N se il prodotto di due numeri è uguale ad 1 allora i due numeri sono uguali ad 1. Quindi $k = h = 1$. Se sostituiamo questo valore nella (1) e nella (2) otteniamo $m = n$. Potevamo aspettarcelo. Si dice allora che la relazione di "essere multiplo" è **antisimmetrica.**

Come secondo esempio consideriamo **la relazione di inclusione fra insiemi.**
Essa si indica di solito con il simbolo $\subset$ o con il simbolo $\subseteq$.
La **definizione** è ben nota: si dice che un insieme A è incluso in un insieme B (o che A è un sottoinsieme di B e si scrive $A \subset B$) se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B.
Se si rappresentano gli insiemi con i diagrammi di Venn, allora il diagramma di A sta tutto dentro il diagramma di B.
Supponiamo che sia $A \subset B$ e **supponiamo** che sia anche $B \subset A$ cioè che tutti gli elementi di A siano anche elementi di B e che tutti gli elementi di B siano anche elementi di A. Che cosa possiamo concludere? Una cosa sola: che i due insiemi sono uguali, cioè $A = B$ perché hanno gli stessi elementi.
Ebbene la relazione di inclusione è **antisimmetrica.**

Per non sparare ora tutte le cartucce (ne abbiamo poche) passiamo alla definizione generale.

Definizione
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **antisimmetrica** se e soltanto se
$\forall$ a$\in$ A e $\forall$ b$\in$ A se a$\Re$b e b$\Re$a allora a = b.

Possiamo dare anche una definizione in negativo.

Definizione
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **antisimmetrica** se e soltanto se
$\forall$ a$\in$ A e $\forall$ b$\in$ A se a$\Re$b non può mai verificarsi b$\Re$a se non quando è a = b.

Possiamo riformulare questa definizione in modo leggermente diverso.
Definizione
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **antisimmetrica** se e soltanto se
$\forall$ a$\in$ A e $\forall$ b$\in$ A se a $\neq$ b e a$\Re$b allora non può mai verificarsi b$\Re$a.

Nella scuola di base, oltre a quelle viste, si studiano alcune relazioni che sono antisimmetriche.
La più familiare è la relazione di **uguaglianza**. E' immediato vedere che essa è antisimmetrica applicando la definizione. Interpretando $\Re$ come = si ha: se $a = b$ e $b = a$ allora $a = b$.

Forse resta un po' di amaro in bocca tanto la cosa è banale perché la conclusione è una delle premesse, ma il ragionamento non fa un grinza. Possiamo aggiungere che la relazione di uguaglianza è l'unica che è contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica.

Un' altra relazione antisimmetrica è la relazione di **maggiore o uguale.**
Supponiamo di prendere due numeri qualsiasi a e b e supponiamo che sia contemporaneamente $a \geq b$ e $b \geq a$. Non abbiamo nessuna difficoltà a concludere che $a = b$.

Forse è meno immediato pensare che anche la relazione di **maggiore è antisimmetrica.**
Utilizzando, però, la terza definizione possiamo convincerci senza troppa difficoltà.
Supponiamo di prendere due numeri qualsiasi a e b e supponiamo che sia $a \neq b$ e inoltre $a > b$.
E' ovvio arrivare alla conclusione che non può essere $b > a$.
Potremmo anche applicare la prima definizione ed utilizzare la tavola di verità del connettivo " se…allora ", ma le cose sarebbero più complicate.

Naturalmente nella scuola di base si studiano tante relazioni che **non** sono antisimmetriche come le relazioni di parallelismo, ortogonalità, di congruenza tra figure, essere numeri primi fra di loro, terminare con la stessa cifra,ecc.

Osservazione 1
La proprietà antisimmetrica fa parte delle caratteristiche irrinunciabili delle relazioni di ordine che sono estremamente importanti in matematica. Per questo ne abbiamo parlato.
Osservazione 2
Quello che abbiamo detto della relazione " maggiore o uguale" e della relazione "maggiore" vale anche per la relazione "minore o uguale" e per la relazione "minore".
Quello che abbiamo detto per la relazione "essere multiplo" vale anche per la relazione "essere divisore".

Proprietà transitiva.

Qui si arriva " in più spirabile aere". La parola "transitiva" deriva dal latino *transire*, passare oltre.
Incominciamo, come al solito, con qualche esempio.
Riprendiamo la relazione di **multiplo** e ricordiamo la
definizione:
Un numero m si dice multiplo di n se e solo se esiste un numero k naturale in modo che valga la uguaglianza: $m = kn$. (1)
Prima di inoltrarci nella teoria facciamo un esempio numerico.
Noi sappiamo che 12 è multiplo di 6 perché $12 = 2*6$; sappiamo anche che 6 è multiplo di 2 perché $6 = 3*2$. Sappiamo, infine, che 12 è multiplo di 2 perché $12 = (2*3)*2 = 6*2$.
Generalizziamo. Prendiamo tre numeri qualunque x, y, z, e supponiamo di sapere che $x = ky$ e $y = hz$, cioè, x è multiplo di y e y è multiplo di z.
Che rapporti ci sono fra x e z? Nessuna difficoltà a dire che x è multiplo di z. Vediamo perché.
Sappiamo che $x = ky$ e $y = hz$. Nella prima uguaglianza sostituiamo il valore di y dato dalla seconda uguaglianza. Otteniamo: $x = (kh)z$, cioè x si ottiene moltiplicando z per il numero kh.
Quindi x è multiplo di z. Si conclude che la nostra relazione è **transitiva.**

Consideriamo la relazione di **parallelismo in senso lato** fra le rette del piano. Prendiamo tre rette qualsiasi a, b, c e supponiamo che sia $a//b$ e $b//c$. Che rapporti ci sono fra a e c?

Nessuna difficoltà ad ammettere che a//c. Quindi la relazione di parallelismo è **transitiva.**

La relazione di **maggiore (>)** tra numeri naturali viene introdotta in prima elementare, ma non sempre, anche da parte degli insegnanti, si sa definirla in modo matematicamente corretto. Ecco la **Definizione:** diciamo che a è maggiore di b (a>b) se e solo se esiste $c \neq 0$ in modo che valga la uguaglianza $a = b+c$.
Rispetto alla definizione di maggiore o uguale (≥) data prima abbiamo aggiunto la condizione
$c \neq 0$.
Siamo tutti d'accordo nel dire che dati tre numeri qualunque a, b, c **se** abbiamo a>b e b>c **allora** è anche a>c. Concludiamo che la relazione di maggiore è **transitiva.**

Ora diciamo le cose in modo generale con la seguente
Definizione
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **transitiva** se e soltanto se
$\forall a\in A, \forall b\in A$ e $\forall c\in A$ se $a\Re b$ e $b\Re c$ allora $a\Re c$.

La formulazione della proprietà è di tipo ipotetico e quindi non coinvolge necessariamente tutti gli elementi di A.
Rappresentando una relazione transitiva con le frecce abbiamo una freccia che va da a verso b, una freccia che va da b verso c ed una freccia che va direttamente da a verso c.
Nella scuola di base, oltre alle relazioni viste, si studiano altre relazioni transitive.
E' transitiva la relazione di **minore o uguale (maggiore o uguale).**
E' transitiva la relazione di **congruenza** tra figure geometriche.
E' transitiva la relazione di **equivalenza** tra frazioni.
E' transitiva la relazione "**è divisibile per**" negli insiemi N e Z.
In generale le relazioni nella cui formulazione entrano le parole " stesso, medesimo, più, meno" sono transitive.
Giocando con insiemi finiti di elementi possiamo inventare tante relazioni transitive.
Sia A = { 1, 2, 3, 4 }. La relazione formata dalle coppie (1, 2), (2, 1), (1,1) è transitiva. Come si vede da questo esempio non è necessario che gli elementi a, b, c, siano distinti.

Naturalmente si studiano anche tante relazioni che non sono transitive come quella di ortogonalità tra rette, di incidenza tra rette. La relazione "essere il doppio (triplo,ecc.) di" non è transitiva.

Esercizi.
1 – Giocare con l'insieme A = { 1, 2, 3, 4 }inventando altre relazioni transitive; relazioni transitive e simmetriche; transitive e non simmetriche.
2 – Far vedere, applicando le definizioni, che le relazioni > e ≥ sono transitive.
3 – Facendo appello a tutte le conoscenze geometriche far vedere che il parallelismo è una relazione transitiva.
4 – Trovare relazioni di parentela transitive e altre non transitive.
5–La relazione di "essere cugini" tra numeri, introdotta nel paragrafo sulla proprietà simmetrica, è transitiva?
6 – La relazione di equivalenza tra figure geometriche è transitiva?
7 – La relazione di "essere numeri primi fra di loro" è transitiva? Perché?
8 – Il numero a dice al numero b : io sono minore di te. Anche il numero c dice la stessa cosa al numero b. Come sono fra loro i numeri a e c?
9 - Sia A = { 1, 2, 3, 4 }. La relazione formata dalle coppie (1, 2), (2, 1), (1,1) è transitiva. Rappresentarla con un grafo.
10 – La relazione di inclusione tra insiemi è transitiva? Rappresentarla con un diagramma di Venn.

11 – Diciamo che l'uomo x è in relazione con l'uomo y se il loro peso differisce per meno di 1 chilogrammo. Si tratta di una relazione transitiva? Perché? E' una relazione simmetrica e riflessiva?
12 – Diciamo che la persona x è in relazione con la persona y se "x comanda a y". Si tratta di una relazione transitiva? Perché?

Proprietà tricotomica (o tripartitiva)

L'aggettivo "tripartitiva", anche se non compare nello Zingarelli 2000 richiama alla mente qualcosa che viene diviso in tre parti. L'aggettivo "tricotomica" è sinonimo di "tripartitiva", non compare sullo Zingarelli 2000 e fa appello al verbo greco "temno" che significa tagliare. Tricotomica vuol dire tagliare in tre parti.

Cominciamo la nostra ricerca con qualche esempio.
Consideriamo l'insieme S dei segmenti del piano e la relazione **"essere più corto di"**. Se prendiamo due segmenti qualunque x e y può succedere che i due segmenti siano uguali, oppure che x sia più corto di y oppure che y sia più corto di x. Una di queste tre eventualità si verifica sempre ed il suo verificarsi esclude il verificarsi delle rimanti due. In altre parole: una si verifica sempre e non se ne possono verificare due. Per questo la nostra relazione è **tricotomica.**

Consideriamo un insieme P di persone e la relazione **"essere più alta di"**. Se prendiamo due qualunque persone ed usiamo strumenti adeguati possiamo sempre decidere se esse hanno la stessa altezza oppure quale delle sue è la più alta. In altre parole le due persone possono sempre essere confrontate in relazione alla loro altezza e dei tre possibili casi se ne verifica sempre uno ed uno solo. La nostra relazione è **tricotomica.**

Passiamo ora alla definizione generale.
Definizione
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\Re$ è definita, allora $\Re$ è **tricotomica** se e soltanto se
$\forall$ a$\in$ A e $\forall$ b$\in$ A si verifica uno ed uno solo dei tre seguenti casi
a = b, oppure a$\Re$b oppure b$\Re$a.

Possiamo dire che quando una relazione è tricotomica nessun elemento dell'insieme in cui è definita sfugge al suo dominio ed ogni elemento è costretto a confrontarsi con tutti gli altri.

Sono relazioni **tricotomiche**, e si studiano nella scuola di base, la relazione di maggiore, di minore, di maggiore o uguale, di minore o uguale.
Sono **tricotomiche** anche tutte quelle relazioni in base alle quali possiamo fare una seriazione.

Una prima grande famiglia di relazioni: le relazioni di equivalenza.

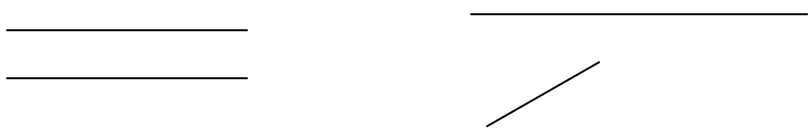
La ricerca che abbiamo fatto sulle possibili proprietà di una relazione non è fine a se stessa, non serve a far vedere l'acutezza dei matematici, ma ha una finalità ben precisa: le proprietà servono per caratterizzare le relazioni, per costruire famiglie di relazioni.

Una prima famiglia, molto importante e nota, è quella delle **relazioni di equivalenza.**

La parola **"equivalenza"** significa genericamente "di egual valore" e può riferirsi ad oggetti diversi ed a "valori" diversi.
Nella scuola, per esempio, parliamo di **frazioni equivalenti** cioè di una equivalenza tra coppie ordinate di numeri interi relativi con il secondo numero diverso da zero; parliamo di **figure equivalenti** e ci riferiamo alla loro area; diciamo anche che una moneta di 1 euro è **equivalente** a due monete di 50 eurocent e ci riferiamo al loro valore venale.
Usiamo spesso anche la parola **"uguaglianza"** parola decisamente più impegnativa di **"equivalenza"** perché esistono figure equivalenti che non sono uguali, mentre tutte le figure uguali sono equivalenti. Non solo, ma in aritmetica , come nella teoria degli insiemi, la parola uguaglianza richiede addirittura la identità logica tra i due membri posti uno a sinistra ed uno a destra del segno di uguaglianza.
Tutti questi fatti, e molti altri, fanno riferimento a relazioni che vengono chiamate **"relazioni di equivalenza".**
Che cosa è una relazione di equivalenza?

Prima di rispondere facciamo qualche esempio.

Noi siamo abituati, anche in classe, a parlare di segmenti e di **lunghezza** di segmenti. Ci sono segmenti diversi, per esempio perché stanno su rette diverse, che hanno la stessa lunghezza (o lunghezza uguale), e ci sono segmenti diversi che hanno lunghezza diversa.



Per esempio i primi due segmenti sono diversi, ma hanno lunghezza uguale, mentre gli altri due sono diversi ed hanno lunghezza diversa. Che cosa è la **lunghezza** di un segmento?
Chiamiamo **S** l'insieme di tutti i segmenti del piano e diciamo che il segmento AB è in relazione con il segmento CD se con una **isometria** possiamo trasformare il primo nel secondo. L'isometria può essere l'identità, una simmetria assiale, una rotazione, una traslazione o una glissosimmetria.
Se non sappiamo che cosa sono le isometrie, possiamo dire che AB è in relazione con CD se possiamo sovrapporre esattamente AB a CD. Questa relazione è quella che di solito chiamiamo "relazione di **congruenza** (o di uguaglianza) tra segmenti".
Questa relazione è certamente **riflessiva**, cioè ogni segmento è in relazione con se stesso. Basti pensare che l'**identità** trasforma ogni segmento in se stesso oppure ogni segmento si può sovrapporre a se stesso.
E' anche **simmetrica** perché se una isometria trasforma AB in CD l'isometria inversa trasforma CD in AB. In altre parole, se con un movimento sovrappongo AB a CD, con il movimento inverso faccio coincidere CD con AB.
Infine, la relazione è anche **transitiva** perché se con una isometria trasforma AB in CD e con un'altra isometria trasformo CD in EF, con la isometria composta dalle due trasformo direttamente AB in EF.

Questa relazione, poiché possiede le tre proprietà ricordate, è una relazione di **equivalenza.**
E la lunghezza? Ci arriviamo subito. Questa relazione, come tutte le relazioni di equivalenza, è creativa cioè da origine ad un nuovo ente matematico.
Mettiamo nella stessa scatola tutti i segmenti che stanno fra loro nella relazione che abbiamo descritto. Costruiamo così tante scatole diverse ciascuna formata da infiniti segmenti fra loro congruenti.
Ormai siamo arrivati: ciascuna di queste scatole, ciascuna di queste **classi di segmenti congruenti** (tecnicamente si chiamano classi di equivalenza) è una **lunghezza**. Precisamente è la lunghezza di ciascun segmento della classe.
Siamo partiti dall'insieme **S** dei segmenti del piano e siamo approdati all'insieme **L** delle lunghezze.

Riprendiamo la relazione **"essere cugini rispetto a 4"** ridandone la definizione: due numeri sono cugini rispetto a 4 se divisi per 4 danno lo stesso resto. Sono cugini, per esempio, 0 e 4, 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8, ecc.
Questa relazione è certamente **riflessiva** cioè ogni numero è cugino di se stesso rispetto a 4 perché un numero fissato diviso per 4 da sempre lo stesso resto.
Inoltre è **simmetrica**, come abbiamo già visto.
E' anche **transitiva** come avete visto negli esercizi.
Quindi è una relazione di **equivalenza.**
Anche questa relazione di equivalenza è creativa? Si!
Possiamo mettere nella stessa scatola tutti i numeri che divisi per 4 danno lo stesso resto.
Nasce così la scatola dello **0** nella quale ci sono i numeri 0,4,8,12,16,ecc., cioè tutti i multipli di 4.
Nasce, poi, la scatola dell'**1** nella quale ci sono tutti i numeri che divisi per 4 danno resto 1 come 1,5,9,13,17, ecc.
Nasce ancora la scatola del **2** nella quale ci sono tutti i numeri che divisi per 4 danno resto 2, come 2, 6, 10, 14, 18, ecc.
Infine nasce la scatola del **3** nella quale ci sono tutti i numeri che divisi per 4 danno resto 3, come 3, 7, 11, 15, 19, ecc.
Le scatole sono finite, non ce ne sono altre perché i resti della divisione per 4 sono solo quattro.
Ognuna di queste scatole è una **classe di resti modulo 4.**

Ormai abbiamo capito che cosa è una relazione di equivalenza. Ecco la definizione formale.
Definizione
Se chiamiamo A l'insieme in cui $\mathfrak{R}$ è definita, allora $\mathfrak{R}$ è **una relazione di equivalenza** se e soltanto se essa è
Riflessiva
Simmetrica
Transitiva

Nella scuola di base si studiano diverse relazioni di equivalenza matematicamente rilevanti anche se non sempre se ne ha coscienza.

A scuola si parla spesso di **direzione di una retta.**
I sussidiari, in genere, non dicono di che cosa si tratta e, spesso, anche i libri di testo della scuola media non si preoccupano di definirla. E' bene che l'insegnante sappia che cosa è la direzione di una retta per comportarsi rettamente a scuola.
Il linguaggio comune non ci aiuta, anzi ci porta fuori strada perché spesso identifica la direzione con il verso. Non ho niente contro il linguaggio comune, ma il linguaggio matematico è più preciso e distingue fra direzione e verso di una retta. Del verso parleremo dopo, ora ci accontentiamo della direzione.

Quando domando agli insegnanti: che cosa è la direzione di una retta, difficilmente ottengo risposte accettabili. Allora parto all'attacco con metodo socratico: due rette perpendicolari hanno la stessa direzione? Risposta corale: No!
Due rette incidenti hanno la stessa direzione? Ancora risposta corale negativa.
Due rette parallele hanno la stessa direzione. Tutti rispondono affermativamente (ed esattamente).
Allora dobbiamo rifarci alla relazione di parallelismo tra rette. Quale parallelismo? Quello che abbiamo chiamato parallelismo in senso lato, quello, cioè, che ammette come parallele due rette coincidenti. Abbiamo visto che questa relazione di **parallelismo è una relazione di equivalenza.**
Nascono le classi di equivalenza di rette parallele in ciascuna delle quale si mette una retta e tutte le sue parallele. Ciascuna di queste classi è una **direzione,** e precisamente la direzione di ciascuna delle rette della classe.
Dal punto di vista logico il concetto di parallelismo precede quello di direzione. Deve precederlo anche dal punto di vista didattico? Può essere un argomento di discussione.

Osservazione
Il parallelismo in senso stretto (due rette complanari sono parallele se non hanno punti in comune) non ha la proprietà riflessiva e quindi non è una relazione di equivalenza e non permette di definire la direzione di una retta. E' per poter dare questa definizione che i matematici hanno introdotto il parallelismo in senso lato.
Il parallelismo in senso stretto non è neppure transitivo. Infatti da a//b e b//c non si può dedurre a//c perché a e c potrebbero coincidere. Per renderlo transitivo bisogna supporre che le tre rette siano distinte.
Per dimostrare la transitività del parallelismo (in senso lato o in senso stretto) bisogna far intervenire in modo essenziale il V postulato di Euclide, cioè la unicità della parallela da un punto ad una retta.

In quarta elementare si introducono le **frazioni equivalenti**, che vengono riprese anche nella scuola media. Abbiamo già visto la definizione ed abbiamo anche visto che questa relazione tra frazioni gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Quest'ultima l'abbiamo solo enunciata. Ora la dimostriamo perché è facile.
Supponiamo che a/b sia equivalente a c/d cioè valga l'uguaglianza ad = cb.
Supponiamo anche che sia c/d equivalente ad e/f, cioè valga l'uguaglianza cf = ed.
Vogliamo far vedere che a/b è equivalente a e/f cioè che vale l'uguaglianza af = eb.
Partiamo da ad = cb e moltiplichiamo i due membri per f (lo possiamo fare perché $f \neq 0$).
Otteniamo: adf = cbf.
Moltiplichiamo la seconda uguaglianza cf = ed per b (lo possiamo fare perché $b \neq 0$).
Otteniamo: cfb = edb.
Per la proprietà transitiva della uguaglianza otteniamo adf = edb.
Dividiamo i due membri per d (lo possiamo fare perché $d \neq 0$).
Otteniamo: af = eb cioè quello che volevamo dimostrare.

Nascono anche qui le **classi di equivalenza.** In ciascuna di esse mettiamo una frazione e tutte le sue equivalenti. Ecco qualche esempio:
[½] = { ½, 2/4, 3/6,...}
[1/3] = {1/3, 2/6, 3/9,…}
[¼] = { ¼, 2/8, 3/12,…}

Ciascuna delle frazioni di una classe può essere il rappresentante della classe, anche se normalmente, si preferisce usare il "capostipite", cioè la frazione ridotta ai minimi termini.

Che cosa sono queste classi di equivalenza di frazioni equivalenti? Sono un nuovo oggetto matematico che si studia nella scuola di base: sono i **numeri razionali.**
Ogni classe di equivalenza è un numero razionale e l'insieme di tutte queste classi sono l'insieme **Q** dei numeri razionali quando per essi si siano introdotte le operazioni di addizione e di moltiplicazione e la relazione di ordine.
Nella scuola elementare si studiano le frazioni e non i numeri razionali; nella scuola media si studiano anche i numeri razionali proprio costruendo le classi di frazioni equivalenti. I programmi del 1979 dicono espressamente:" dalle frazioni (come operatori) ai numeri razionali."
Le Indicazioni nazionali per la scuola secondaria di 1° grado (2003) prevedono nel primo biennio: "La frazione come rapporto e come quoziente; i numeri razionali [nella prima colonna]; riconoscere frazioni equivalenti [nella seconda colonna]."
Ci si potrebbe domandare, a livello adulto, come mai i matematici non si sono accontentati delle frazioni, ma hanno voluto costruire le classi per avere i numeri razionali? La risposta non è semplice e non possiamo discuterne in questo corso. L'insegnante interessato può utilmente consultare il mio articolo "Dalle frazioni ai numeri razionali: come e perché" pubblicato sul numero di novembre-dicembre 1999 della rivista del Centro Morin.

Osservazione
Della abbondante terminologia relativa alle frazioni: frazioni equivalenti, frazioni proprie, frazioni improprie, frazioni apparenti, solo la prima espressione ha significato matematico perché in matematica una frazione non è altro che una coppia ordinata (a, b) di numeri interi relativi con $b \neq 0$. Questo non significa che tale terminologia, ormai consacrata dall'uso e giustificata dal modo con cui si fanno nascere le frazioni nella scuola elementare, debba essere eliminata. Nella scuola media, però, se ne potrebbe fare a meno.

Una relazione di equivalenza molto importante e che si usa continuamente in matematica a tutti i livelli è l'**uguaglianza.** Essa, però, ha significati diversi a seconda del contesto nel quale viene usata.
In **aritmetica** l'uguaglianza significa la **identità logica.** In altre parole, i due numeri scritti a sinistra ed a destra del simbolo = sono lo stesso numero, anche se scritto in forma diversa.
Esempio: $5 = 3 + 2$. A sinistra c'è scritto un solo simbolo numerico, a destra due simboli collegati da un simbolo di operazione. La realtà, però, cioè il numero, è lo stesso.
L'uguaglianza intesa in questo senso, oltre alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, possiede anche la proprietà antisimmetrica. Soprattutto essa ha una rapporto coerente ed armonioso con le operazioni di addizione e di moltiplicazione e con la relazione di ordine. Diciamo tutto con i simboli:
se $a = b$ e $c = d$ allora $a + c = b + d$, $ac = bd$ e se $a > c$ allora anche $b > d$.
L'identità logica genera delle classi di equivalenza, solo che ogni classe contiene un solo numero perché ogni numero è uguale solo a se stesso.

Anche negli **insiemi** l'uguaglianza è **l'identità logica.** Dire che l'insieme A è uguale all'insieme B significa dire che essi hanno gli stessi elementi, cioè sono lo stesso insieme.
I due insiemi possono essere definiti attraverso proprietà diverse, ma avere gli stessi elementi, cioè essere uguali.
Esempio. Sia A l'insieme dei triangoli equilateri e B l'insieme dei triangoli che hanno tre assi di simmetria. Le proprietà definitorie sono diverse , ma gli insiemi sono uguali, sono lo stesso insieme perché gli elementi di A sono tutti e soli gli elementi di B e viceversa.
Questo fatto va tenuto ben presente quando si parla dell'insieme vuoto. La convinzione generale degli insegnanti è che di insiemi vuoti ce ne siano tanti, infiniti perché, per esempio, è vuoto

l'insieme dei numeri pari che sono anche dispari, l'insieme degli uomini che vivono sul sole, l'insieme delle persone qui presenti che hanno più di 100 anni, ecc.
In realtà **l'insieme vuoto è unico** perché tutti gli insiemi vuoti hanno gli stessi elementi, cioè nessun elemento.
Da ultimo non bisogna confondere l'uguaglianza tra insiemi con l'**equipotenza.** Due insiemi uguali sono equipotenti, ma non vale il viceversa. La relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza, ma non è l'identità logica.

Di uguaglianza parliamo a scuola anche in **geometria:** figure uguali, criteri di uguaglianza dei triangoli,ecc. Questo tipo di uguaglianza è una relazione di equivalenza, ma non è l'identità logica, anzi, come diceva un matematico, la prima condizione perché due figure siano uguali è che siano diverse. Dire che il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF non significa dire che sono lo stesso triangolo; significa solo che esiste una isometria che trasforma il primo nel secondo.
Per questo la tendenza attuale, anche a scuola, è di non usare più la parola uguaglianza in geometria, ma, come sostituta, la parola **congruenza** e di non usare più il simbolo $=$, ma qualche altro simbolo come $\cong$, $\equiv$ o simili.

In prima elementare o, al più, in seconda si presenta la suddivisione dei numeri naturali nelle due famiglie dei **pari e dei dispari.**
Detto in modo più raffinato, l'insieme N viene diviso in due sottoinsiemi P e D in modo che
in ciascuno di essi ci sia almeno un elemento (cioè nessuno dei due sottoinsiemi è vuoto)
nessun elemento è comune ai due sottoinsiemi (la loro intersezione è vuota)
i due sottoinsiemi congiuntamente formano tutto l'insieme N (la loro unione da tutto N).
Questa suddivisione di N è una classificazione, una delle tante, di N (i matematici la chiamano **partizione).** Ebbene, ogni classificazione ha origine da una relazione di equivalenza. Noi di solito facciamo con i bambini questa classificazione, ma, forse, anche a livello adulto non sapremmo esprimere la relazione di equivalenza che la genera.
La relazione è la seguente.
Diciamo che m è in relazione con n, e scriviamo m $\Re$ n se e solo se i due numeri sono **entrambi pari oppure entrambi dispari.**
Questa relazione è **riflessiva** perché ogni numero, essendo o pari o dispari, è in relazione con se stesso.
E' **simmetrica** perché se m $\Re$ n perché sono entrambi pari allora n $\Re$ m (lo stesso se sono entrambi dispari).
E' **transitiva** perché se m $\Re$ n (perché sono entrambi pari) e n $\Re$ t (allora anche t è pari) allora
m $\Re$ t (la stessa cosa succede se m ed n fossero entrambi dispari).
Le classi di equivalenza sono due: la classe dei numeri pari e quella dei numeri dispari.

Un'altra classificazione che si fa in quarta o in quinta elementare e che viene ripresa nelle scuola medie è quella dei numeri naturali in **numeri primi** ed in **numeri non primi.**
La relazione di equivalenza che giustifica questa classificazione è la seguente:
due numeri m ed n sono in relazione fra di loro se e solo se essi sono entrambi primi o entrambi non primi.
Nella scuola media, ma io ritengo che possa essere fatto anche nella scuola elementare, si può raffinare questa classificazione costruendo tre sottoinsiemi: quello formato da **0** e **1**, quello formato dai numeri **primi** e quello formato dai numeri **composti.**
Per capire questa classificazione occorre ricordare le definizioni seguenti:
un numero naturale p si dice primo se è maggiore di 1 ed ha esattamente due divisori;

un numero naturale m si dice composto se è maggiore di 1 ed ha più di due divisori.
E' chiaro che 0 e 1 fanno classe a se perché non sono né primi né composti.
Come potremmo formulare la relazione di equivalenza che sta alla base della nostra classificazione? Nel seguente modo:
due numeri m ed n sono in relazione se e solo se essi sono 0 o 1, oppure sono entrambi primi, oppure sono entrambi composti.

Osservazione
Sussidiari e libri di testo danno spesso questa definizione di numero primo: è un numero divisibile solo per se stesso e per l'unità.
Definizione legittima (non per niente la matematica è il regno della libertà) che include 1 fra i numeri primi.
Siccome bisogna coniugare libertà con coerenza allora bisognerà dire che ogni numero composto si può decomporre nel prodotto di numeri primi a meno di fattori unitari (è il teorema fondamentale dell'aritmetica che viene praticato, ma non enunciato, anche nella scuola elementare).
E' meglio, comunque, non mettere 1 fra i numeri primi almeno per motivi estetici. Infatti 1 non soddisfa la "legge del due" tipica dei numeri primi: un numero primo ha solo **due** divisori, è multiplo solo di **due** numeri, nella tabella della moltiplicazione compare solo **due** volte e in quella della divisione nella sua riga ci sono solo **due** risultati.

Nella prassi scolastica oltre alle figure congruenti (o uguali) si studiano anche le figure **equivalenti**, intendendo con questa parola figure che hanno **area** uguale.
Dobbiamo, quindi, domandarci che cosa è l'area di una figura.
C'è chi dice che l'area è l'estensione di una figura, senza precisare, però, che cosa è l'estensione.
C'è chi dice che l'area è la misura dell'estensione, cioè un numero.
I programmi del 1985 e le Indicazioni nazionali del 2003 dicono di "misurare" l'area di una figura. Per essi, quindi, l'area non è una misura.
Noi conosciamo anche le "formule dell'area" di varie figure: triangoli, trapezi, parallelogrammi, poligoni regolari, cerchio. Sappiamo anche che poligoni con diverso numero di lati possono avere area uguale. L'area, quindi, non è un concetto che si esaurisce all'interno di una singola famiglia di poligoni.
Che cosa è, dunque, l'area di cui parlano i programmi?
La risposta sta in una parola: l'area è una **grandezza.**
Come possiamo definirla? Limitiamoci ai poligoni.
Una strada per arrivarci è la seguente.
Nella famiglia **P** dei poligoni introduciamo una relazione che chiamiamo di **equiscomponibilità o di equiestensione** nel seguente modo: diremo che due poligoni A e B sono equiscomponibili o equiestesi se e solo se si possono scomporre nello stesso numero di parti poligonali a coppie congruenti.
Per esempio, un quadrato di lato lungo 6 cm ed un rettangolo di lati lunghi 3 cm e 12 cm si possono scomporre in due rettangoli di lati 3 cm e 6 cm e in due triangoli rettangoli (per figura) di cateti lunghi 3 cm e 6 cm.
La relazione introdotta è una relazione di **equivalenza** (è un po' difficoltoso dimostrare la transitività). Nascono le **classi** di equivalenza: in ognuna mettiamo un poligono e tutti i poligono con esso equiscomponibili. Ognuna di queste classi è **un'area**: l'area di ognuno dei poligoni della classe. L'insieme di tutte queste classi di equivalenza, cioè delle aree, è un insieme di grandezze omogenee che si possono sommare, confrontare e misurare, esattamente come succede per le lunghezze.
La scelta dei programmi comporta alcune attenzioni linguistiche.

E’ corretto, per esempio, dire che l’area di un rettangolo è 24 cm² perché “24 cm²”, essendo un numero seguito da una unità di misura, è una grandezza.
Non è corretto dire che la misura dell’area di un rettangolo è 24 cm² perché la misura è un numero mentre 24 cm² non è un numero.
E’ corretto, invece, affermare che la misura dell’area di un rettangolo, in centimetri quadrati, è 24.
Le stesse osservazioni valgono per il perimetro che è una lunghezza.
Nel Sistema Internazionale di unità di misura, l’area è una grandezza derivata e la sua unità di misura è il m².
Nella pratica quotidiana delle zone agricole si usano unità di misura locali per l’area, come la pertica, il campo, ecc. E’ bene, come suggeriscono i programmi del 1985, studiare anche queste unità che fanno parte della storia locale.

A proposito dell’area i programmi del 1985 raccomandano di “riconoscere l’equiestensione di semplici figure piane mediante scomposizioni e ricomposizioni”,. Non sono da meno le Indicazioni nazionali: “Concetto di equiestensione in contesti concreti”.
Un validissimo strumento è il gioco del Tangram. Oltre che per giocare e costruire figure equiestese esso serve per capire la differenza concettuale tra area e perimetro perché le figure che si ottengono hanno tutte la stessa area, ma perimetro diverso.

Quando era di moda l’**insiemistica,** oso sperare che ora non lo sia più in nessuna classe, ma temo che la realtà mi smentisce, si introduce in prima elementare la relazione di **equipotenza** tra insiemi nella vana illusione di arrivare alla definizione di numero e di rendere più facile e comprensibile l’aritmetica.
Per dare la definizione di equipotenza bisogna far ricorso al concetto di corrispondenza biunivoca che noi abbiamo già introdotto.
Definizione.
Un insieme A è equipotente ad un insieme B se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca di A in B.
Questa relazione è ovviamente di equivalenza. Nascono le classi di equivalenza (le famose scatole) ed ogni classe era un numero naturale. Su questi numeri si definivano le solite operazioni ricorrendo alle operazioni sugli insiemi: l’addizione mediante l’unione di insiemi disgiunti, la moltiplicazione mediante il prodotto cartesiano, la sottrazione mediante la complementazione. Arrivati alla divisione spesso si dimenticavano gli insiemi per rientrare nel solco tradizionale. Per introdurre lo zero si faceva appello all’insieme vuoto.
In questo tipo di attività ci sono delle **difficoltà concettuali** di cui non sempre, per non dire quasi mai, gli insegnanti erano consapevoli. Si pensi alla difficoltà del concetto di corrispondenza biunivoca, di prodotto cartesiano, di insieme vuoto.
Ci sono, inoltre, **difficoltà di tipo psicologico**. La parola insieme richiama alla mente qualcosa composto da una pluralità di oggetti. Qui si doveva introdurre il concetto di “insieme unitario” e, soprattutto di insieme vuoto, che non ha fisicamente, nessun riscontro e nessuna rappresentazione ragionevole.
Infine si commettevano delle storture didattiche come quella di proibire di contare fino a quando “non saprai che cosa è il numero” oppure la proibizione di usare le dita per contare, dita che sono uno strumento naturale ed efficace.
Bene, quindi, hanno fatto i programmi del 1985 a rimandare al secondo ciclo la introduzione delle operazioni sugli insiemi (il prodotto cartesiano non è neppure nominato). Nelle Indicazioni nazionali del 2003 gli insiemi non vengono mai nominati.

Attenzione, quindi, alle riviste “omnibus” per insegnanti elementari che spesso, nelle programmazioni didattiche di inizio anno parlano di insiemi e loro operazioni nel primo ciclo per non nominarle mai nel secondo ciclo.

Nella scuola elementare e nella scuola media si parla spesso di figure che hanno la **“stessa forma”.**
L’espressione “avere la stessa forma” ci fa pensare ad una relazione di equivalenza. Quale?
Dal punto di vista intuitivo questa relazione, se c’è, e vi garantisco che c’è, agisce all’interno di singole famiglie di figure. Nessuno mai direbbe che un triangolo ha la stessa forma di un rettangolo.
Ci sono triangoli che hanno la stessa forma? Tutti i triangoli hanno la stessa forma perché “hanno forma triangolare”? Tutti i rettangoli hanno la stessa forma allo stesso modo che ci sembra che tutti i quadrati hanno la stessa forma?
Per rispondere bisogna precisare che cosa vuol dire **“avere la stessa forma”.**
Nei programmi del 1985 ci sono gli strumenti concettuali per rispondere alla domanda; non ci sono, invece, nelle Indicazioni nazionali del 2003.
Non voglio definire che cosa è la forma di una figura, ma solo dire quando due figure hanno la stessa forma.
Lo strumento concettuale di cui abbiamo bisogno è quello di **“similitudine”.**
Tra i nostri ricordi ci sono certamente i criteri di similitudine fra i triangoli nei quali intervengono lati ed angoli. In realtà noi possiamo presentare la similitudine prescindendo completamente dagli angoli. In sostanza la similitudine è una trasformazione geometrica che riguarda le lunghezze. Possiamo definirla così:

Definizione

La similitudine è una trasformazione biunivoca del piano in se stesso che moltiplica ogni lunghezza per un numero $k>0$. Questo numero è chiamato rapporto di similitudine o scala.

La similitudine è alla base di tutta la attività di modellismo perché il modello deve riprodurre, in piccolo, l’oggetto iniziale conservandone le **proporzioni.**
Nei programmi del 1985 non si parla di similitudine, ma di “rimpicciolimento e di ingrandimento in scala”. Questa è esattamente la similitudine.
Nelle Indicazioni nazionali per la matematica non c’è nulla di tutto questo, ma nei programmi di geografia si parla di “scala”.
Possiamo ora dire quando due figure hanno la stessa forma.

Definizione.

Due figure A e B hanno la stessa forma se e solo se esiste una similitudine che trasforma A in B.

Se diciamo che **A è in relazione con B se A ha la stessa forma di B** otteniamo una relazione di equivalenza perché
È riflessiva perchè l’identità che trasforma ogni figura in se stessa è un similitudine.
E’ simmetrica perché l’inversa di una similitudine è una similitudine.
E’ transitiva perché la composizione di due similitudini è una similitudine.
Le classi di equivalenza che nascono dalla relazione contengono le figure che hanno la stessa forma:

- in una classe ci saranno tutti i segmenti
- in un’altra tutte le rette
- in un’altra tutte le semirette
- in un’altra tutti i poligono regolari con lo stesso numero di lati (classe dei triangoli equilateri, classe dei quadrati, classe dei pentagoni regolari, ecc.)
- in un’altra classe ci sono tutti i cerchi
- poi ci sono tante classi di triangoli simili, tante classi di quadrati simili, ecc.

Per evitare fraintendimenti è bene sottolineare che in una similitudine **tutte** le lunghezze devono essere moltiplicate per lo stesso numero k e, quindi, anche le altezze, le diagonali, ecc.
E' per questo, per esempio, che i rombi non sono tutti simili anche se si passa da un ad un altro moltiplicando la lunghezza dei lati per uno stesso numero.
Figure con la stessa forma hanno i perimetri con lo stesso rapporto di scala delle lunghezze dei lati, cioè k, mentre le loro aree hanno rapporto di scala k^2. Non vale, però, il viceversa.

Dalle relazioni alle partizioni e ritorno.

Abbiamo visto che una relazione di equivalenza in un insieme A ripartisci i suoi elementi in classi di equivalenza in ciascuna delle quali ci sono gli elementi fra loro equivalenti rispetto alla relazione introdotta. Queste classi possono essere poche, tante, infinite. Sono sempre, comunque, dei nuovi oggetti matematici che talvolta prendono dei nomi propri come direzione, numero razionale, ecc.
Queste classi hanno due proprietà fondamentali:

- sono a due a due disgiunte, cioè non hanno elementi comuni
- la loro unione da tutto l'insieme A in cui la relazione è definita.

Una conseguenza immediata è che ogni elemento dell'insieme A appartiene ad una classe e ad una sola.
Quando si suddivide un insieme in sottoinsiemi con le due proprietà appena enunciate si dice che nell'insieme abbiamo operato una **partizione.** Quindi
Ogni relazione di equivalenza in un insieme A genera una partizione.
Il bello è che vale anche il viceversa.
Partiamo da un insieme A e consideriamo una sua partizione, cioè una suddivisione in sottoinsiemi con le due proprietà sopra enunciate. La relazione così definita:
due elementi x e y sono in relazione se e solo se essi appartengono allo stesso sottoinsieme, è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza che essa genera coincidono con i sottoinsieme della partizione.
Solo per fare un esempio, riprendiamo quanto abbiamo detto sui numeri pari o dispari.
Nell'insieme N introduciamo la relazione seguente:
Diciamo che m è in relazione con n, e scriviamo m $\Re$ n se e solo se i due numeri sono **entrambi pari oppure entrambi dispari.**
Otteniamo una partizione di N in due sottoinsiemi: quello dei numeri pari e quello dei numeri dispari.
Ora partiamo dall'insieme N e ripartiamolo nei due sottoinsiemi dei numeri pari e dei numeri dispari. Introduciamo la relazione di equivalenza così definita:
Diciamo che m è in relazione con n se e solo se m ed n appartengono allo stesso sottoinsieme.
Questa relazione è esattamente quella di prima.

Giunti a questo punto ci meritiamo un po' di relax risolvendo qualche problema.

Esercizi
1 – In quasi tutti i sussidiari vi è un capitolo dedicato alle equivalenze del tipo 3m = 30 dm con le varianti dedicate alle aree ed ai pesi. I simboli 3m e 30dm indicano delle lunghezze. E' più corretto parlare di equivalenze o di uguaglianze? Perché?
2 – Studiare un percorso didattico relativo ai numeri pari. Come presentarli, quando, quali sviluppi dare.
3 – Fare la stessa cosa con i numeri primi.
4 – Nell'insieme NxN introdurre la relazione (a,b) è in relazione con (c,d) se e solo se a+d = c+b.

Mostrare che è una relazione di equivalenza. Che cosa sono le classi di equivalenza?
5 – Scrivere a centro pagina il numero 8 e inserirlo in un cerchio. Far partire dal cerchio le frecce che indicano le relazioni di 8 con gli altri numeri (relazioni di maggiore, minore, uguale, potenza, successivo, ecc.)
6 – Un triangolo rettangolo ed uno isoscele hanno sempre la stessa forma, non l'hanno mai, qualche volta si e qualche volta no?
7 - Due rettangoli che hanno ugual perimetro hanno anche la stessa forma? Perché?
8 – Dimostrare che la relazione di parallelismo è transitiva.
9 – E' proponibile nella scuola elementare la definizione di frazioni equivalenti che abbiamo dato prima, sia pure usando numeri e non lettere? Perché?
10 – Disegnare un rettangolo. E' corretta la seguente definizione (Pellerey, Aritmetica, Sei 1992, pag.457): "due frazioni sono equivalenti, cioè hanno lo stesso valore se come operatori sull'intero danno lo stesso risultato". Trattandosi di un rettangolo "lo stesso risultato" dovrebbe significare "parti congruenti".
11 – Dividiamo l'insieme N nei seguenti sottoinsiemi disgiunti:
A = { 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ecc.}
B = { 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ecc.}
C = { 2, 5, 8, 11, 14. 17, 20, ecc.} (in ogni insieme si avanza sempre di 3)
Come si può formulare la relazione di equivalenza che ha generato la partizione?
12 – Considerare qualcuna delle tante classificazioni che si fanno nella scuola elementare e formulare la relazione di equivalenza che la genera.
13 – Nella tabella di addizione con numeri pari e con numeri dispari (P, D, +) c'è un elemento neutro? Trovare altre tabelle simili usando numeri, e usando trasformazioni geometriche.
14 – Se definiamo equivalenti due raccolte di dati che hanno uguale moda, uguale mediana e uguale media aritmetica, possiamo dire che le due raccolte sono uguali, cioè hanno gli stessi dati? Perché?
15 – Le frazioni decimali che hanno a denominatore un numero formato da una sola cifra sono tutte equivalenti fra di loro? Perché?
16 – Rappresentare con una tabella a doppia entrata una relazione di equivalenza.
17 – Rappresentare con le frecce una relazione di equivalenza.
18 – Nell'insieme dei poliedri considerare la relazione di equivalenza "avere lo stesso numero di vertici". Descrivere qualche classe di equivalenza. Nella stessa classe ci possono essere prismi e piramidi? Se si in quali?
19 – Nell'insieme N considerare la relazione "essere multiplo dello stesso numero". Si tratta di una relazione di equivalenza? Perché?
20 – Nell'insieme dei poligoni le relazioni "avere lo stesso numero di lati" e "avere lo stesso numero di diagonali" danno origine a classi di equivalenza diverse? Perché?
21 – Classificare figure in base a due proprietà. Dare qualche esempio.
22 – Ho diviso l'insieme P dei poligoni in due sottoinsiemi:
nell'insieme A ho messo tutti i pentagoni, nell'insieme B ho messo tutti gli altri poligoni.
Scoprire la relazione di equivalenza che ha generato questa classificazione.
23 – Ho suddiviso l'insieme N dei numeri naturali in due sottoinsiemi:
nell'insieme A ho messo solo il numero 2, nell'insieme B ho messo tutti gli altri numeri.
Scoprire la relazione di equivalenza che ha generato questa classificazione.
24 – "Classificare oggetti, numeri e figure in base a due attributi" è un obiettivo previsto in tutti i programmi. Dare esempi sia partendo da proprietà che generano una classificazione, sia partendo da una classificazione per risalire alla relazione generante.
25 – Esistono poligoni regolari nei quali la misura del perimetro è uguale alla misura dell'area? Se si trovarli; se no perché?

Una seconda grande famiglia di relazioni: le relazioni di ordine.

I programmi danno largo spazio alle relazioni di ordine, ma ho l'impressione che nelle attività in classe non si conceda loro altrettanto spazio.

Dai Programmi del 1985.
Aritmetica.
Obiettivi del primo e secondo anno.
Confrontare raggruppamenti di oggetti rispetto alla loro quantità e indicare se essi hanno lo stesso numero di elementi, oppure di più o di meno; Confrontarli e ordinarli [i numeri naturali], anche usando i simboli =, <, >; inoltre disporli sulla linea dei numeri in modo corretto.
Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno.
Confrontare e ordinare i numeri naturali e decimali, utilizzando opportunamente la linea dei numeri; calcolare, in relazione reciproca, multipli e divisori di numeri naturali; confrontare e ordinare le frazioni più semplici, utilizzando opportunamente la linea dei numeri; confrontare e ordinare sulla linea dei numeri gli interi relativi.
Dalle Indicazioni didattiche.
Va, inoltre, tenuto presente che l'insieme dei numeri naturali ha la caratteristica fondamentale di essere ordinato e, pertanto, pè essenziale che il fanciullo acquisisca la capacità di confrontare e ordinare gli stessi numeri, utilizzando anche la cosiddetta linea numerica o retta graduata.
Geometria e misura.
Obiettivi del primo e secondo anno.
Confrontare e misurare lunghezze, estensioni, capacità, durate temporali, usando opportune unità, arbitrarie o convenzionali, e loro successive suddivisioni.
Logica.
Obiettivi del primo e secondo anno.
Rappresentare con schematizzazioni elementari (ad esempio con frecce) successioni spazio-temporali, relazioni di ordine, corrispondenze riferite a situazioni concrete.
Probabilità, statistica, informatica.
Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno.
Confrontare in situazioni di gioco le probabilità dei vari eventi mediante l'uso di rappresentazioni opportune.

Dalle Indicazioni Nazionali (2003)
Primo anno.
Il numero.
Concetto di maggiore, minore, uguale. Usare il numero per contare, confrontare e ordinare raggruppamenti di oggetti.
La misura.
Confronto diretto e indiretto di grandezze. Compiere confronti diretti di grandezze.
Introduzione al pensiero razionale.
Classificazione e confronto di oggetti diversi fra di loro.

Secondo biennio.
Il numero.
Ordinamento dei numeri interi relativi sulla retta numerica. Confrontare e ordinare numeri decimali. Confrontare e ordinare le frazioni più semplici, utilizzando opportunamente la linea dei numeri. Effettuare consapevolmente calcoli approssimati. Confrontare l'ordine di grandezza dei termini di una operazione tra numeri decimali e il relativo risultato.

Introduzione al pensiero razionale.
Ordinare elementi in base ad una determinata caratteristica, riconoscere ordinamenti assegnati.

Dai programmi della scuola media (1979).
Insiemi numerici.
Rappresentazione dei numeri sulla retta orientata. Multipli e divisori di un numero naturale. Approssimazioni successive come avvio ai numeri reali. Disequazioni numeriche di primo grado.

Dalle Indicazioni Nazionali per la scuola secondaria di 1° grado.
Primo biennio.
Il numero.
Multipli e divisori di un numero. Minimo comun multiplo e massimo comun divisore. Confronto tra numeri razionali. Confrontare numeri razionali e rappresentarli sulla retta numerica.

Terzo anno.
Il numero.
Ordine di grandezza, approssimazione. Effettuare semplici sequenze di calcoli approssimati.
Le relazioni.
Alcune relazioni significative […] essere multiplo di, essere maggiore di

Le relazioni di ordine sono di vario tipo, caratterizzate da specifiche proprietà. Esse vanno dalle più esigenti e ricche di proprietà alle più blande ed accomodanti. Tutte si trovano, in modo più o meno consapevole, nella prassi didattica della scuola di base. Ricordo che tutte le attività di seriazione e la costruzione di successioni si fonda sulle relazioni di ordine.
Incominciamo la nostra indagine dalla relazione di ordine che si introduce in prima elementare.

Relazione di ordine stretto e totale.

Prima di arrivare alla definizione esploriamo un esempio familiare.
In prima elementare si introduce la **relazione di maggiore, indicata con il simbolo >.** Essa è strettamente collegata con la **relazione di minore, indicata con il simbolo <** nel senso che dire che $a > b$ è lo stessa cosa che dire $b < a$.

Non c'è nessuna difficoltà ad accettare che **nessun numero è maggiore di se stesso.** Alla domanda: è vero che , per esempio, $3 > 3$? risponderemmo tutti in coro in modo negativo. Anzi, a nessuna persona normale, che non sia un matematico, verrebbe in mente di fare una domanda del genere.
In sostanza: la relazione di maggiore è **antiriflessiva.** A questa proprietà si riferisce l'aggettivo "stretto" del titolo. Ciò lascia intendere che ci sarà anche un "ordine largo", ma di ciò parleremo dopo.

Supponiamo di dover confrontare questi numeri: 3, 7, 4, 15, 8. Se ho già stabilito che $15 > 8$ e che $8 > 3$, posso subito concludere, senza fare ulteriori confronti, che $15 > 3$. La relazione > rispetta rigidamente le gerarchie come nell'esercito. Abbiamo riconosciuto in questo fatto la **proprietà transitiva.** E' una proprietà facile, popolare ed economica perché ci fa risparmiare confronti.

Nei mondi numerici se prendiamo due numeri li possiamo sempre confrontare fra di loro per stabilire se sono uguali o quale dei due è il maggiore. Qui davvero "La legge è uguale per tutti" e non è scritta solo nei tribunali come nel mondo degli umani. In sostanza, la relazione > possiede la **proprietà tricotomica o tripartitiva** di cui abbiamo già parlato prima. E' proprio a questa proprietà

che si riferisce l'aggettivo "totale"del titolo. Ciò lascia intendere che ci sarà anche un ordine "parziale", ma di questo parleremo dopo.
Ora siamo pronti per dare la definizione.

Definizione.
Una relazione $\Re$ in un insieme A è una relazione di ordine stretto e totale se e solo se gode delle seguenti proprietà:
Antiriflessiva: $\forall\ a \in A\ \ \sim a \Re a$ (il simbolo ~ significa "non"). Il senso è chiaro: nessun elemento è in relazione con se stesso. Se come $\Re$ prendiamo > ciò significa che nessun numero è maggiore di se stesso.
Transitiva. In termini di relazione > si scrive: dati tre numeri qualunque a, b, c, se $a > b$ e $b > c$ allora $a > c$.
Tricotomica. In termini di relazione > si scrive: dati due numeri qualunque a e b si verifica uno ed uno solo di questi tre casi: $a = b$ oppure $a > b$ oppure $b > a$.

Come tipica relazione di ordine stretto e totale abbiamo presentato la relazione di maggiore negli insiemi numerici. Siamo tutti d'accordo, ma in matematica , e la cosa dovrebbe valere anche nella vita comune, quando si fa una affermazione corre l'obbligo di dimostrarla.
In matematica, però, non si può dimostrare tutto. Per dimostrare, infatti, una certa affermazione dobbiamo utilizzare altre affermazioni che a loro volta devono essere dimostrate, le quali, a loro volta devono essere dimostrate, ecc. Per evitare il regresso all'infinito dobbiamo scegliere delle affermazioni che decidiamo di non dimostrare, ma che utilizziamo per dimostrare altre proposizioni. Queste affermazioni che decidiamo di non dimostrare vengono chiamate **assiomi o postulati.**
I postulati più celebri per l'aritmetica sono quelli di Peano (1858-1932), elaborati nel 1889. La loro enunciazione va al di la degli scopi di questo corso. Il lettore interessato li può trovare nel volumetto "Il mondo dei numeri naturali" di Bazzini – Ferrari edito dalla SEI. La dimostrazione delle nostre proprietà partendo dalla assiomatica di Peano è piuttosto laboriosa e non la proponiamo.
Decidiamo, invece, di **assumere come postulato**, cioè come proposizione che non dimostriamo, la **proprietà tricotomica della relazione di ordine >.**
Ora la possiamo utilizzare per dimostrare le altre proprietà. Ci costerà, forse, un po' di fatica, ma ci farà rivivere i tempi dell'aritmetica razionale delle magistrali.
Incominciamo con la definizione ambientandola nei **numeri naturali.**

Definizione.
Diciamo che un numero a è maggiore di un numero b e scriviamo $a > b$ se e solo se esiste un numero $c \neq 0$ in modo che valga la uguaglianza $a = b + c$.

Questa definizione è l'espressione matematica pulita di quello che spesso ho sentito dagli insegnanti: per esempio $7 > 3$ perché "7 viene dopo il 3" oppure perché "7 contiene il tre" oppure perché "da 3 per andare a 7 (sulla linea dei numeri) devo fare 4 passi verso destra".
Da notare la condizione posta sul numero c: $c \neq 0$, condizione che non abbiamo posto nella definizione della relazione $\geq$.
Incominciamo la nostra dimostrazione.
Proprietà antiriflessiva. Dobbiamo dimostrare che non può mai essere $a > a$. E' una conseguenza immediata della proprietà di tricotomia. Siccome $\forall$ a si ha $a = a$ non può essere $a > a$ e neppure
$a < a$.
Proprietà transitiva. Dobbiamo far vedere che se $a > b$ e $b > c$ allora $a > c$.
La prima relazione significa $a = b + u$ (1) con u numero naturale maggiore di zero.
La seconda relazione significa $b = c + v$ (2) con v numero naturale maggiore di zero.

Sostituendo la (2) nella (1) otteniamo: $a = (c + v) + u = c + (v + u)$ con $v + u$ maggiore di zero. Questo significa appunto che $a > c$, come volevamo dimostrare.

Tra le proprietà caratteristiche di una qualunque relazione di ordine vi è la **proprietà antisimmetrica.** Non l'abbiamo elencata, finora, perché la possiamo dedurre dalla proprietà di tricotomia.
Ricordiamo l'enunciato: $\forall$ a $\forall$ b **se** $a > b$ e $b > a$ **allora** $a = b$.
La parte dell'enunciato che se il **se** e precede **allora** si chiama antecedente; quella che segue **allora** si chiama conseguente. Come simbolo per il connettivo **se…allora** si usa di solito la freccia ($\rightarrow$).
La tavola di verità di questo connettivo è costruita in modo che quando l'antecedente è falso, allora, qualunque sia il conseguente, la proposizione è vera. La cosa è un po' strana, ma è stata consacrata dai logici greci più di duemila anni fa.
Nel nostra caso l'antecedente è falso per via della proprietà tricotomica. Quindi la proposizione è vera, cioè la relazione $>$ è antisimmetrica.

Questa relazione di ordine nei numeri naturali è chiamata **ordinamento naturale** perché è quello che ci permette di disporre i numeri naturali nella successione che ci è familiare: 0, 1, 2, 3. 4, 5, ecc. Questa relazione possiede anche altre importanti proprietà che ora voglio illustrare brevemente.

Se osserviamo la successione dei numeri naturali ci accorgiamo subito che non c'è un numero che più grande di tutti gli altri numeri. Se prendiamo un numero naturale piccolo ed un altro numero naturale estremamente grande possiamo sempre, con un po' di pazienza, trovare un multiplo di quello piccolo che supera quello grande. Questa proprietà è talmente importante che le è stato dato un nome: si chiama **proprietà di Archimede.**
Questa proprietà che adesso enunciamo è una manifestazione della democrazia dei mondi numerici: *in nessuno* di essi vi è un *"lider maximo"* che comanda a tutti.
Passiamo all'enunciato.
L'ordinamento > è archimedeo.
$\forall$ a $\forall$ b con $b > 0$ esiste $n \in N$ tale che $nb > a$.

Quando si parla di Archimede (287-212 a.C.) si pensa spesso alla leggenda degli specchi ustori con i quali si dice che abbia incendiato le navi romane che assediavano la sua patria Siracusa, o al principio di idraulica che porta il suo nome. Non bisogna dimenticare che Archimede fu il più grande matematico dell'antichità ed i suoi contributi più originali riguardano proprio la matematica.
La proprietà che abbiamo enunciato spesso viene chiamata **"principio di Archimede"** o anche di **"Eudosso-Archimede"** dato che il matematico greco Eudosso (V secolo a.C.) fu il primo ad usarlo.
In matematica è un principio importante perché è una proprietà discriminante. C'è, infatti, una matematica archimedea, quella che noi conosciamo ed insegniamo, ed una matematica non archimedea altrettanto importante anche se meno nota al grande pubblico (diamo per buono che al grande pubblico sia nota la prima matematica).

La relazione di $>$ ha un'altra importante proprietà sulla quale generalmente si sorvola nella scuola dell'obbligo. Cerchiamo di arrivarci per gradi.
Noi sappiamo che 0 è il più piccolo dei numeri naturali, è il **minimo.** Possiamo esprimere questo fatto dicendo che se $a \neq 0$ allora $a > 0$.
Consideriamo **l'insieme** dei numeri pari. Anch'esso possiede un **minimo**, cioè un numero che è il più piccolo di tutti i numeri dell'insieme. In questo caso è ancora lo zero.
Le cose non sono diverse se consideriamo **l'insieme** dei numeri dispari. Anch'esso possiede un **minimo** che, in questo caso, è il numero 1.

Consideriamo **l'insieme** dei multipli di 3 maggiori di zero. Se applichiamo la definizione di multiplo data a suo tempo troviamo che anch'esso ha un **minimo** ed è il numero 3.
Anche se consideriamo **insiemi** finiti di numeri naturali la musica non cambia. Per esempio l'insieme dei numeri maggiori 15 e minori di 34 ha un **minimo** che è 16.
Bisogna, però, fare attenzione. L'insieme dei numeri naturali maggiori di 30 e minori di 31 ha un minimo? E' naturale rispondere di no perché questo insieme è **vuoto.**
La proprietà della relazione di maggiore nella quale entrano le parole scritte in grassetto, insieme, vuoto, minimo, ha un suo nome proprio: si chiama proprietà di **buon ordinamento.**

Diamo la definizione generale.
Una relazione di ordine totale e stretto definita in un insieme A si dice **buon ordinamento** se **ogni** sottoinsieme **non vuoto** di A possiede un **minimo** cioè se possiede un elemento che è più piccolo di tutti gli altri elementi dell'insieme.

Si può capire l'importanza di questa proprietà della relazione di maggiore nei numeri naturali se pensiamo che essa non vale più negli altri insiemi numerici.
Per esempio nell'insieme dei numeri interi relativi il sottoinsieme dei negativi non ha un minimo.
Nei numeri razionali il sottoinsieme dei numeri razionali maggiori di zero e minori di 1 non ha minimo.

La terminologia "buon ordinamento" o anche "insieme bene ordinato" è stata inventata da Georg Cantor (1845-1918) nel 1895, ma il contenuto era già utilizzato da Euclide nella descrizione dell'algoritmo per trovare il massimo comun divisore di due numeri. La proprietà di buon ordinamento viene anche chiamato "*postulato di Campano*", perché Giovanni Campano da Novara (seconda metà del secolo XIII), cappellano presso il papa Urbano IV, fu il primo ad enunciarlo esplicitamente e ad inserirlo come postulato nella sua traduzione latina degli Elementi di Euclide, la prima data alle stampe nel 1482.

Un insieme A nel quale sia definita una relazione di ordine stretto e totale si dice **insieme ordinato.**
Può succedere che in questo insieme siano definite altre relazioni o anche delle operazioni. Si pone, allora, il problema di studiare i rapporti fra la relazione di ordine e le altre relazioni e le operazioni. Può darsi che fra queste diverse strutture ci sia accordo, armonia, ma può anche darsi che non ci sia nessun tipo di accordo.
Per esempio nell'insieme N oltre alla relazione > ci sono le operazioni di addizione e di moltiplicazione. Ci domandiamo: la struttura di ordine e le strutture additiva e moltiplicativa vanno d'accordo, sono coerenti, sono in armonia, sono compatibili fra di loro? Mi rendo conto che le parole sono un po' vaghe, ma adesso cerco di precisarle.

Incominciamo a studiare i rapporti tra **relazione > e addizione**.
Già Euclide aveva incluso fra le sue "Nozioni comuni" cioè principi validi per ogni scienza, la seguente: *"E se a cose disuguali si aggiungono cose uguali, i tutti sono disuguali"*.
Nei numeri naturali possiamo, per esempio, far entrare in gioco i numeri 3, 7 e 5. Abbiamo: $7 > 5$.
Seguendo Euclide aggiungiamo 3 e otteniamo. $7 + 3$ da confrontare con $5 + 3$. Non ci sono dubbi:
$7 + 3 > 5 + 3$. Ovviamente le cose valgono in generale ed ecco allora la
Proprietà di coerenza tra > e +.
Dati tre numeri qualunque a, b ,c , se $a > b$ allora $a + c > b + c$.

Se qualcuno ha un po' di pazienza e di gusto per la dimostrazione può fare un piccolo sforzo: $a > b$ significa $a = b + h$ con $h \neq 0$. Di conseguenza:
$a + c = (b + h) + c = b + (h + c) = b + (c + h) = (b + c) + h$ cioè $a + c > b + c$.

Questa proprietà ha una ovvia interpretazione sulla linea dei numeri. I numeri a e b vengono *traslati* in avanti di c passi tutti di lunghezza 1 e la *distanza* fra i due numeri di partenza, a e b, e quelli di arrivo, a+c e b+c, rimane immutata.

Di ugual tenore sono i rapporti fra relazione di > e moltiplicazione.

Proprietà di coerenza tra > e x.

Se $a > b$ e $c \neq 0$ allora $ac > bc$. Lasciamo al lettore l'interpretazione sulla linea dei numeri.

E' proprio il caso di dire che i matematici sanno fare le cose per bene. Peccato che questa armonia non si propaghi anche al mondo degli umani! E' il caso, però, di dire che anche ai matematici non sempre la ciambella riesce con il buco.

Di relazioni di ordine stretto e totale, oltre a quella nel mondo dei numeri naturali, sulla quale ci siamo soffermati a lungo, nella scuola di base si studiano:

- **La relazione di ordine nei numeri interi relativi.**
  La definizione viene distinguendo vari casi. Pensando i numeri interi relativi come coppie ordinate formate da un segno, + o -, e da un numero naturale, cioè numeri del tipo ± a, la definizione è la seguente: i numeri del tipo + a sono maggiori di 0 e dei numeri del tipo – a; 0 è maggiore di tutti i numeri del tipo – a; + a è maggiore di + b se e solo se a > b; - a è maggiore di – b se e solo se b è maggiore di a.
  Questa relazione di ordine non è un buon ordinamento e nell'enunciato della coerenza fra > e x bisogna apportare una leggera modifica.
- **La relazione di ordine nei numeri razionali**.
  Nella prassi didattica prima si confrontano le frazioni (o i numeri razionali) con lo stesso denominatore, poi quelle con lo stesso numeratore, infine quelle con numeratore e denominatore diversi riducendole a frazioni equivalenti con lo stesso denominatore. Quest'ultimo caso è abbastanza complesso e richiede tre moltiplicazioni e due divisioni.
  La definizione matematicamente corretta evita la suddivisione dei tre casi, non richiede divisioni ma solo due moltiplicazioni. L'unica condizione richiesta è che i denominatori devono essere positivi, cosa sempre possibile. Eccola:
  a/b è maggiore di c/d se e solo se ad > cb. E' il cosiddetto prodotto in croce.
  Questa definizione non ha mai trovato il consenso degli insegnanti neppure sotto forma di frazioni numeriche e non simboliche. E non sono mai riuscito a capire il perché. O meglio: l'obiezione degli insegnanti era come giustificare la definizione ai bambini. Non c'è nessuna giustificazione da dare: le definizioni non hanno bisogno di giustificazioni. Chi mai ha giustificato la definizione di rombo o di numero primo?
  L'ordinamento dei numeri razionali, non è un buon ordinamento. Rispetto ad N e a Z c'è una nuova proprietà che viene chiamata **densità.** Il termine esprime il fatto che fra due numeri razionali diversi vi è sempre un numero razionale. Questa nuova proprietà fa si che nei razionali non esistano più i successivi ed i precedenti.
- **La relazione di ordine nell'insieme delle lunghezze, delle aree, dei volumi.**
  La definizione è esattamente quella che abbiamo dato per i numeri naturali. Questa relazione non è un buon ordinamento e non si può parlare di coerenza fra ordine e moltiplicazione perché in questi insiemi non esiste una moltiplicazione come operazione interna. Questa relazione, oltre alla densità, gode della proprietà di **completezza**, che è troppo difficile spiegare.
- **La relazione di ordine tra i punti di una retta.**
  Di solito questa relazione viene introdotto con un assioma. Le parole che si usano sono, di solito, **precedere o seguire.** Nasce così la retta orientata, il concetto di semiretta e quello di segmento.

Diceva il buon Cantor che “l’essenza della matematica è la sua libertà”. Una manifestazione di questa libertà la possiamo vedere nella introduzione di ordini stretti e totali nei numeri naturali diversi da quello che abbiamo chiamato “ordinamento naturale” e indicato con il simbolo >.
Secondo questo ordinamento i numeri naturali si dispongono nella successione: 0,1, 2, 3, 4, 5, 6,ecc.
Nessuno ci può impedire di disporre i numeri naturali in una successione diversa da questa. Possiamo, per esempio, disporli così:
0, 2, 4, 6, 8, 10, 12…………….. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13…………(1)
Abbiamo messo prima tutti i numeri pari e poi tutti i numeri dispari. Con questo intendiamo dire che **tutti i numeri pari vengono prima, cioè sono minori di tutti i numeri dispari.**
All’interno dei due blocchi vale l’ordinamento naturale. In altre parole: 0<2<4<6<8<…..; 1<3<5<7<9<……, ma anche 4<1, 236<3, 100000000<5, ecc.
Possiamo dare una veste matematica precisa a questo nostro atto di libertà.
Indichiamo questa nuova relazione di ordine con il simbolo « per distinguerla dalla relazione <.
Ecco la definizione della nuova relazione **«.**

∀a ∀b a « b se e solo se a e b sono entrambi pari e a < b oppure
a e b sono entrambi dispari e a < b oppure
a è pari e b è dispari.

Possiamo disporre i numeri naturali in altri modi come:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13…………0, 2, 4, 6, 8, 10, 12…………….(2)
0, 2, 4, 6, 8, 10, 12…………13, 11, 9 , 7 , 5 , 3, 1 (3)
……….12, 10, 8, 6, 4, 2, 0……… 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13…………(4)

Ormai abbiamo capito e possiamo procedere da soli. Concediamoci un po’ di relax con qualche esercizio.

Esercizi
1 – Provare ad esprimere matematicamente l’ordinamento delle successioni (2), (3), (4).
2 – Completare l’elenco delle successioni ed esprimerne matematicamente l’ordinamento.
3– Quale piccolo cambiamento bisogna introdurre nella espressione della coerenza di > con la moltiplicazione in Z ed in Q?
4 – Quali seriazioni temporali, legate alla vita del bambino, si possono proporre in prima elementare? E in seconda? Conviene continuare anche nelle classi successive?
5 – Disporre in successione le monete degli euro secondo la lunghezza del diametro. Questa successione coincide con la successione del loro valore?
6 – Disporre i bambini della propria classe in una successione secondo l’ordine lessicografico del loro cognome. Questo ordinamento è sempre stretto? Perché?
7 – Costruire una breve frase che abbia senso. Trovare, se esistono, cambiamenti dell’ordine delle parole che mantengono inalterato il senso della frase. Disporre, poi, le parole secondo la loro lunghezza. Si tratta di un ordine stretto?
8 –Questa mattina la maestra ha scritto sulla lavagna questa successione di numeri: 10, 32, 45, 16, 78, 19 e pretendeva che noi dicessimo perché li aveva scritti in questo ordine. Siccome nessuno di noi è riuscito ci ha detto di pensarci a casa. Vogliamo aiutarli?
9 – Costruire la tabella a doppia entrata, con i numeri da 1 a 9, della relazione >. Quali osservazioni si possono fare?
10 –La relazione di > è coerente con l’operazione di sottrazione? Fare degli esempi. E con l’operazione di divisione? Fare esempi.

11 – Consideriamo le classi di resti modulo 4 (aritmetica delle stagioni) e definiamo una operazione di addizione in questo modo: prendiamo due numeri, li addizioniamo nel solito modo, dividiamo per 4 il risultato e come risultato della addizione prendiamo il resto della divisione. La relazione di ordine > per la quale 3>2>1>0 è coerente con l'addizione così definita? Perché?
12 – Come si può disporre seriamente i bambini in ordine di altezza crescente?
13 – Per trovare la mediana di una raccolta di dati bisogna ordinarli. L'ordine che si usa è sempre stretto? Perché?
14- Gioco con due dadi ben fatti e come esito considero la somma dei numeri sulle due facce che escono. Quanti sono i possibili esiti? Mettere in ordine crescente le loro probabilità.
15 – C'entra qualcosa l'ordinamento con il gioco della "danza del serpente"?
16- Discutere, dal punto di vista didattico, la definizione di ordinamento dei numeri razionali (frazioni) che ho riportato: se ne può parlare alla scuola elementare? In che modo? E nella scuola media? Vedere che cosa fanno sussidiari e libri di testo.
17 – Una frazione apparente è sempre maggiore di una frazione propria? Perché?
18 – Prova a trovare tutti i numeri che hanno queste caratteristiche:
sono composti da tre cifre,
la prima e la terza cifra sono uguali,
la somma delle tre cifre ' minore di 12.
19 – Le relazioni di ordine delle successione (1), (2), (3), (4) e di quelle che hai costruito tu sono buoni ordinamenti? Perché? Sono coerenti con l'addizione e la moltiplicazione definiti nel solito modo? Perchè?
20 – Siano a/b e c/d due numeri razionali e sia a/b > c/d. Trovare una frazione e/f che sia maggiore di c/d e minore di a/b.
21 – Dare una definizione matematicamente corretta di semiretta e di segmento.
22 – Come faresti a confrontare le lunghezze dei segmenti?
23 – Interpretare sulla linea dei numeri la proprietà di coerenza tra > e moltiplicazione.

Relazione di ordine largo e totale.

Questa relazione si ottiene dalla precedente sostituendo l'aggettivo "stretto" con l'aggettivo "largo". Siccome l'aggettivo "stretto" era legato alla antiriflessività è naturale aspettarsi che l'aggettivo **"largo"** sia legato alla **riflessività.** Effettivamente è così.
Possiamo dare la seguente
Definizione
Una relazione è di ordine largo ed totale quando gode delle seguenti proprietà:
riflessiva
antisimmetrica
transitiva
tricotomica.

La più popolare ed usata relazione di questo tipo è quella di **maggiore o uguale** e quella di **minore o uguale.**
Abbiamo già fatto alcune considerazioni su questa relazione e non è il caso di ripeterle. Qui vogliamo aggiungere che questa relazione viene usata più spesso di quanto si pensa.
In una corsa ciclistica l'ordine di arrivo viene stilato in base al tempo impiegato da ciascun corridore. Può succedere, ma capita molto raramente, che ciascun corridore impieghi un tempo diverso. Allora l'ordine di arrivo si formula basandosi su una relazione di ordine stretto e totale. Può succedere, e capita quasi sempre, che ci siano degli arrivi isolati e che gruppetti di corridori

arrivino insieme. Allora l'ordine di arrivo viene stilato basandosi su un ordinamento totale, ma largo perché tutti i corridori del gruppetto hanno lo stesso tempo.
Lo stesso fenomeno succede nella classifica delle squadre di serie A (B ,C, ecc.) in un dato momento del campionato.

A scuola usiamo spesso l'idea di **successione**, qualche volta in modo esplicito, altre volte implicitamente.
Parliamo, infatti, di successione dei numeri naturali: 0, 1, 2, 3, 4, ecc.; successione dei numeri pari, successione dei numeri dispari.
Queste sono successioni con infiniti termini e rispecchiano l'idea matematica di successione: dato un insieme A si dice successione a valori in A una funzione (applicazione) dell'insieme N dei numeri naturali in A.

Altre volte le successioni che usiamo a scuola sono fatte da un numero finito di termini e usiamo l'idea in modo implicito solo per dire che un certo numero di termini si susseguono uno dopo l'altro con una certa legge o con certa regolarità.
Questo succede, per esempio, quando facciamo costruire dei "ritmi", oppure quando assegniamo alcuni termini numerici per i quali ci sembra chiara la legge che fa passare da un termine al successivo e si e si da la consegna: continua tu.
Esempio. Si assegna il primo tratto della successione: 0, 2, 4, 6, 8 e si dice: ora continua tu.
La legge ci sembra chiara e ci si aspetta che i ragazzi scrivano: 10, 12, 14, 16, 18, 20 ecc.
In realtà i ragazzi potrebbero continuare nei modi più diversi. Per esempio potrebbero scrivere i primi cinque numeri dispari, poi continuare con altre cinque numeri pari e con cinque dispari,ecc.; potrebbero continuare ripetendo continuamente i cinque numeri assegnati (come nei ritmi), oppure ripetendo sempre e solo 8. Si avrebbe sempre una successione in senso matematico pensando di continuare all'infinito.
L'insieme A al quale appartengono i termini della successione potrebbe essere ordinato ed essere ordinati anche i termini della successione.
Per esempio la successione di N in N data da: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ….. è formata da termini ordinati con la relazione > (o <). Siccome ogni termine è minore del successivo si dice che la **successione è crescente.**
Consideriamo la successione **da N in Q** data da: ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6…….. Anche questi termini sono ordinati dalla relazione > (o <). Siccome ogni termine è maggiore del successivo si dice che la **successione è decrescente.**
Successione crescenti e decrescenti fanno appello ad un ordinamento stretto e totale.
Ci sono, però, anche situazioni diverse.
Quando facciamo una raccolta di dati, numero di scarpa, altezza degli alunni, ecc. e li mettiamo in ordine per trovare la mediana possiamo avere dei dati che si ripetono. Allora la successione dei dati non è crescente e non è decrescente.
Se ordiniamo i dati dal più piccolo al più grande la successione sarà **non decrescente** , mentre se li ordiniamo dal più grande al più piccolo la successione sarà **non crescente.**
In questo caso si fa appello ad un ordinamento largo e totale.
Esempio. La successione: 0,1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5 è non decrescente. Se la riscriviamo iniziando dal 5 otteniamo una successione non crescente.
Una **successione costante** è non crescente e non decrescente: 2, 2, 2, 2, 2, ….
Possiamo anche divertirci a costruire successioni che non hanno nessuna delle caratteristiche ora menzionate come la seguente: 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, ecc. (la legge di formazione sembra chiara).
Una successione molto celebre è quella di Fibonacci (Leonardo Pisano 1180-1250) contenuta nel suo *Liber Abaci* del 1202. Eccola: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ecc. In essa ogni termine risulta dalla

somma dei due precedenti. Per dare validità generale a questa regolarità si completa la successione mettendo un altro 1 al primo posto: 1, 1, 2, 3, 5, ecc. Questa successione con un solo 1 iniziale è crescente, con due 1 iniziali è non decrescente.

Relazione di ordine parziale (o semplicemente di ordine)

Sembra che nelle relazioni di ordine ci sia il trionfo degli aggettivi: stretto, largo, totale, parziale, e le combinazioni totale-stretto, totale-largo, parziale-stretto, parziale-largo. Mancano solo, ovviamente, le combinazioni contraddittorie.

Incominciamo la nostra esplorazione con qualche esempio.

Conosciamo già la relazione **"essere multiplo di"** nei numeri naturali. Abbiamo dimostrato che essa è

Riflessiva
Antisimmetrica
Transitiva

Potrà sembrare strano, ma per i matematici questa relazione è una **relazione di ordine.** Possiamo dire che è un **ordine parziale** perché esistono numeri che sono fra loro **inconfrontabili.**

Prendiamo i numeri 2 e 3. Non è 2 = 3; non è 2 multiplo di 3; non è 3 multiplo di 2. Quindi dal punto di vista di questa relazione i due numeri sono fra loro non confrontabili. Questo vale per ogni coppia di numeri di cui uno è il successivo dell'altro, ma anche per infinite altre coppie, come le coppie di numeri primi.

In questo ordinamento succedono dei fenomeni un po' "strani" ed inaspettati.

Il numero 0, per esempio, essendo multiplo di ogni numero è in relazione con tutti i numeri.

Se conveniamo di dire che un numero m è *"minore o uguale"* (scritto in corsivo per non confonderlo con l'ordinamento naturale) di un numero n e scriviamo $m \angle n$ quando n è multiplo di m siamo costretti a confessare che ogni numero è *minore o uguale* di 0, o, equivalentemente, che 0 è *maggiore o uguale* di ogni numero.

La situazione è completamente capovolta rispetto all'ordinamento naturale: in esso 0 è il **minimo**, in questo ordinamento, invece, è il ***massimo.***

Ogni numero, inoltre, è multiplo di 1. Quindi 1 è *minore o uguale* di ogni altro numero.

Facciamo un esempio considerando l'insieme A = { 0, 1, 2, 4, 6, 8, 9}. In esso, secondo questo ordinamento si ha: $9 \angle 0, 8 \angle 0, 6 \angle 0, 4 \angle 0, 2 \angle 0, 1 \angle 0, 0 \angle 0$;

$1 \angle 9, 1 \angle 8, 1 \angle 6, 1 \angle 4, 1 \angle 2, 1 \angle 1$;
$2 \angle 8, 2 \angle 6, 2 \angle 4, 2 \angle 2$;
$4 \angle 8, 4 \angle 4$; $6 \angle 6$; $8 \angle 8$; $9 \angle 9$.

Tutte le altre coppie sono non confrontabili fra di loro.

Se in un contesto appropriato si parla di **insiemi** è giocoforza parlare anche di **sottoinsiemi.**

Parlando dell'insieme dei numeri naturali è spontaneo parlare anche del sottoinsieme dei numeri pari e di quello dei numeri dispari.

Per indicare che un insieme A è sottoinsieme dell'insieme B si usa scrivere $A \subset B$ oppure $A \subseteq B$. Questi due simboli indicano la relazione di **inclusione tra insiemi.**

La **definizione** di sottoinsieme è abbastanza naturale.

Un insieme A è sottoinsieme dell'insieme B se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B.

In quale insieme dobbiamo introdurre la relazione di inclusione?

Partiamo da un insieme X qualunque e costruiamo l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X. Questo insieme viene chiamato **"insieme delle parti di X"** e indicato con il simbolo P(X).

Facciamo un esempio. Come insieme prendiamo $X = \{1, 2, 3\}$. L'insieme $P(X)$ è:
$P(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\},\{2,3\}, \{1,2,3,\}\}$.
Ricordo che l'insieme vuoto ($\emptyset$) è sottoinsieme di qualunque insieme.
Ebbene, la relazione di inclusione viene introdotta nell'insieme $P(X)$.
Quali sono le proprietà di questa relazione?
E' immediato convincersi che la relazione di inclusione gode della
Proprietà transitiva: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$.
Rappresentando gli insiemi con le corde (diagrammi di Eulero-Venn) avremmo la corda di A tutta dentro la corda di B, la corda di B tutta dentro la corda di C. Quindi la corda di A è tutta dentro la corda di C.
A parole: tutti gli elementi di A sono anche elementi di B, tutti gli elementi di B sono anche elementi di C. Quindi tutti gli elementi di A sono anche elementi di C.
Forse non è immediato convincersi che la relazione di inclusione gode della
Proprietà antisimmetrica: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = A$.
Qui i diagrammi di Eulero – Venn non aiutano, ma basta una piccola riflessione e la nozione di uguaglianza tra insiemi, di cui abbiamo parlato a suo tempo.
$A \subseteq B$ significa che tutti gli elementi di A sono anche elementi di B.
$B \subseteq A$ significa che tutti gli elementi di B sono anche elementi di A.
E' naturale concludere che i due insiemi hanno gli stessi elementi, cioè sono uguali.
L'ultima proprietà di cui gode la relazione di inclusione è la
Proprietà riflessiva: per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$. E' vero, infatti, anche se la cosa può sembrare un po' strana, che tutti gli elementi di A sono elementi di A.
La conclusione è che la relazione di inclusione è una **relazione di ordine.** Possiamo dire che è un ordine parziale perché ci sono insiemi inconfrontabili fra di loro. Nell'esempio riportato sopra gli insiemi $\{1\}$ e $\{2\}$ sono diversi perché diverso è il loro unico elemento, e nessuno dei due è sottoinsieme dell'altro.

Ora possiamo dare la definizione generale.
Definizione.
Una relazione $\Re$ in un insieme A è una relazione di ordine se essa gode delle proprietà
Riflessiva
Antisimmetrica
Transitiva.

Esercizi.
1 – Nella relazione di inclusione definita in $P(X)$ c'è un minimo? E un massimo?
2 – Considerare nell'insieme dei numeri naturali la relazione "essere divisore di". Quali sono le sue proprietà?
3 – Considerare un insieme di sei o sette numeri naturali, fra i quali 0 e 1, e rappresentare con una freccia la relazione "è divisore di". Da ogni numero parte una freccia? Ad ogni numero arriva una freccia? Tutti i numeri sono collegati fra loro da almeno una freccia?
4 – Nell'insieme dei numeri pari la relazione "è multiplo di" è un ordine parziale o totale? Perchè?
5 – Nell'insieme $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ la relazione "è multiplo di" è totale o parziale? Perché?
6 – Quando si parla di "massimo comun divisore" la parola "massimo" richiama alla mente un ordinamento. Di quale ordinamento si tratta?
7 – Che cosa si può dire nella scuola dell'obbligo delle relazioni "essere multiplo di" ed "essere divisore di"? In quali classi della scuola elementare e della scuola media?
8 – Ci sono insiemi di numeri naturali nei quali le relazioni $\angle$ e $\leq$ coincidono? Se si fornire un esempio.