MATEMATICA: LA GIOIA DELL'IMPEGNO PER PROFESSORI E STUDENTI

Mario Ferrari - Pavia

1 – INTRODUZIONE

Quando penso alla posizione della matematica nella società mi sembra di trovarmi in un mondo contraddittorio.

Da una parte mi sembra di vedere la matematica come una giovane e bella donzella ricercata, riverita, in pieno vigore fisico e spirituale. Mi suggeriscono questa idea

1.1 - L'aumento continuo dei "clienti" della matematica, cioè delle discipline che fanno appello alla matematica per le loro necessità interne. Ne è una testimonianza il volume *"Le scienze matematiche"* curato dall'UMI e pubblicato da Zanichelli nel 1973, come pure il recente volumetto, sempre curato dall'UMI, intitolato *"L'esplosione della matematica"*. Nella quarta di copertina si legge: "Ma è negli ultimi trent'anni che stiamo assistendo ad una vera e propria esplosione del numero dei campi di attività umane nei quali la ricerca matematica, particolarmente la più avanzata, si è rivelata indispensabile".

1.2 - La continua pubblicazione di libri e riviste di contenuto matematico. Per i libri non mi riferisco, ovviamente, ai libri di testo, e neppure a libri specialistici, ma a libri di carattere generale, di divulgazione matematica destinati ad un pubblico vasto al di fuori della scuola. Negli ultimi anni, in Italia, ne sono usciti alcune centinaia. Per la matematica ricreativa, la letteratura è sterminata. Il nome di Martin Gardner è noto a tutti. Per gli articoli verrebbe quasi voglia di gridare "si salvi chi può". Il *Mathematical Reviews* che cerca di recensire gli articoli pubblicati sulle riviste matematiche più importanti, è un mensile, ogni numero consta di

circa 1 000 pagine ed è sempre in ritardo di circa un anno nel recensire le pubblicazioni.
1.3 - Il numero impressionante di congressi, convegni, seminari, scuole estive dedicati ai più svariati argomenti matematici nei più diversi paesi del mondo.
1.4 - I premi che vengono assegnati ai matematici. E' vero, non c'è un premio Nobel per la matematica, ma oltre alla medaglia Fields, il più antico premio matematico, ora ci sono anche il premio Abel e il premio Fermat. In Italia abbiamo il premio Peano.
1.5 - Infine, le gare matematiche per tutti i livelli e per tutte le età.

C'è, però, anche l'altra faccia della medaglia nella quale la matematica appare come una brutta e malefica strega generatrice di ricordi tristi e di ripulse decise. Me lo fanno pensare
1.6 - Il fatto che la matematica, che si studia in tutti i livelli scolari, è, fra tutte le discipline, la più detestata. La si studia per poter essere promossi, ma se ne farebbe volentieri a meno.
1.7 - Il fatto che la matematica incute timore, suscita paura, genera ansia. Questi sentimenti devono essere molto diffusi, anche fuori della scuola. Basti pensare al successo editoriale, negli Stati Uniti, del volume della Sheila Tobias, *"Overcoming Math Anxiety"*. Tradotto in italiano e pubblicato da Longanesi con il titolo *"Come vincere la paura della matematica",* ha avuto due edizioni tra settembre 1994 e marzo 1995. Dal "terrore" della matematica, sia pure per scoprirne gli aspetti umani, parte Anne Siety nel suo volume *"Matematica, mio terrore. Alla scoperta del lato umano della matematica"* pubblicato da Salani nel 2003. Successo e recensioni favorevoli ha avuto anche il volume del fisico Giovanni Filocamo *"Mai più paura della matematica. Come fare pace con numeri e formule"* pubblicato da Kowalski nel 2009.
1.8 - Il fatto che la matematica non è considerata come una realtà culturale e la sua ignoranza non è sentita come un deficit ma quasi come un fatto positivo. Questo atteggiamento non è solo dei nostri giorni. Già quarant'anni fa Beniamino Segre (1903 – 1977)

lamentava "*l'atteggiamento di troppe persone che si ritengono colte anche se mancano dei più elementari rudimenti della matematica, e che di tali loro lacune – anziché preoccuparsi – quasi traggono vanto e compiacimento*" (Segre, 1967, pag. 2). Né questo è solo un fatto italiano come sottolinea Morris Kline a proposito degli Stati Uniti : "*Le persone istruite rifiutano quasi universalmente la matematica come oggetto di interesse intellettuale. […] La conseguenza è che un argomento fondamentale, di vitale importanza e tale da elevare lo spirito, viene trascurato e disprezzato da persone peraltro di buon livello intellettuale. Di fatto l'ignoranza della matematica viene considerata, a un certo livello della scala sociale, un fatto positivo*" (Kline, 1976, pag. 9 – 10).

1.9 - La fuga dei giovani dalla matematica. Intendo dire che il numero delle matricole dei corsi di laurea in matematica è sempre molto piccolo. Forse è cessata la vertiginosa discesa delle immatricolazioni cui abbiamo assistito fino a cinque anni fa; forse è iniziata una lenta, molto lenta, ripresa anche come effetto del "Progetto Lauree scientifiche", ma i numeri con cui si parte sono sempre molto piccoli; immaginatevi quelli con cui si arriva alla laurea specialistica (o magistrale).

Davanti a questa situazione contraddittoria, anzi, immersi in essa, che cosa fare? La subiamo convinti che il problema è troppo grande per noi, che è superiore alle nostre forze? Ci piangiamo addosso inveendo contro il destino cinico e baro che ci sta trasformando in una "razza protetta" dal WWF perché in pericolo di estinzione? Oppure cerchiamo di reagire, di trovare qualche via d'uscita da questo quadro contraddittorio? Forse non riusciremo completamente nel nostro intento, forse ci rimarrà dell'amaro in bocca, ma non avremo speso inutilmente il nostro tempo e non saremo venuti meno alle nostre convinzioni in forza delle quali oggi ci troviamo qui in un Seminario di matematica.

Io cerco di reagire così come ne sono capace. Sono ben consapevole delle difficoltà del mio compito e del grosso rischio di un fallimento.
Questa giornata è dedicata al "divertirsi". Noi docenti pensiamo sempre ai divertimento che dovrebbero provare gli alunni nello studiare la matematica e mai al nostro divertimento nell'insegnare la matematica. Nel titolo di questa conferenza ho messo professori e studenti e per ambedue ho parlato di una gioia che nasce dall'impegno. Non so se riuscirò nell'intento. Accetto, comunque, il rischio del fallimento.

Prima di proporre alla vostra meditazione alcune mie riflessioni vorrei dire che in questa attività di "Divertirci e divertire… insegnando e studiando matematica" abbiamo alcuni alleati, alcuni punti di forza, ma anche alcuni nemici, alcuni punti di debolezza.

Tra gli alleati possiamo annoverare la vasta letteratura sui *"Divertimenti matematici"* (è il titolo di un libretto di Glenn e Johnson pubblicato da Zanichelli nel 1965). E' una letteratura indirizzata ad un pubblico vasto, vario che compera (altrimenti non si stamperebbero i libri) e si diverte (altrimenti non comprerebbe).
Anche se spesso i giochi proposti sono suddivisi in "Giochi di aritmetica,… di algebra, …di geometria" (si veda il classico *"Matematica dilettevole e curiosa"* di Italo Ghersi, Hoepli), tuttavia questi volumi non sono scritti apposta per insegnanti e indirizzati alla loro attività in classe.
Ci sono, però, almeno due pubblicazioni per insegnanti.

La prima è di un matematico illustre verso il quale la didattica della matematica ha un debito notevole: Giuseppe Peano, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti.*
La prima edizione (di Paravia) è del 1924, l'ultima (di Sansoni) del 1983. Questo volumetto è esplicitamente indirizzato agli insegnanti elementari. Nella prima pagina Peano scrive: "In tutti i tempi, e

presso tutti i popoli, si insegnavano dei giochi per rendere dilettevole o meno noiosa l'aritmetica. Saggiamente questi giochi si trovano nei nuovi programmi delle scuole elementari. Credo far cosa utile agli insegnanti col pubblicarne alcuni."

La seconda è di un matematico meno noto di Peano, ma comunque notevole, come Michele Cipolla. Nella *"Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi"* a cura di L. Berzolari, Cipolla (Cipolla, 1983) ha scritto un lungo articolo su *"Matematica ricreativa"*. Questa enciclopedia era stata progettata dalla Mathesis Nazionale nel 1909 per la formazione continua dei docenti di matematica. La presenza dell'articolo di Cipolla ci dice della convinzione, allora diffusa, che la conoscenza della matematica ricreativa doveva far parte della cultura e dell'armamentario professionale di un docente di matematica.

Tra i punti di debolezza dobbiamo certamente annoverare un certo modo di pensare la matematica.
La matematica, si pensa e si dice, è una disciplina seria il cui studio, ad ogni livello, richiede sforzo, impegno, sacrificio, sudore, se non proprio lacrime. Non c'è posto, quindi, per il gioco, per il divertimento, per la leggerezza.
Un altro punto di debolezza è la nostra formazione culturale, anche, e soprattutto, quella impartita all'università. Io ho impiegato 6 anni per laurearmi in matematica (ero uno studente lavoratore), frequentando due diverse università. Mai mi è stato proposto un gioco matematico, mai mi è stato parlato di giochi matematici divertenti ed istruttivi, mai ho avuto indicazioni bibliografiche relative alla "matematica divertente".
Un terzo punto debole è il nostro tradizionale insegnamento della matematica. Ha ragione Martin Gardner quando scrive, nella Introduzione del vol. 5° di *"Enigmi e giochi matematici"* , Sansoni 1980: "La matematica non è mai stato un soggetto arido, sebbene sia stata troppo spesso insegnata nel modo più arido possibile."

Dopo tutte queste premesse, posso iniziare a proporvi le mie riflessioni. Per qualcuno esse avranno il sapore della novità, per altri, invece, saranno cose notissime. A questi domando scusa fin da ora.
Cercherò di organizzare le mie riflessioni attorno a quattro verbi: **DEFINIRE – PARLARE - DIMOSTRARE – GIOCARE.**

2 – DEFINIRE

Il definire è una attività pressoché sconosciuta nella vita quotidiana perché gli "oggetti" di cui parliamo sono sufficientemente individuati da un gesto, dall'esperienza che ne abbiamo, dal senso comune.
In discorsi un po' impegnativi può essere necessario precisare il senso di una parola, darne una definizione in modo da non usarla con significati diversi. Si incomincia a sperimentare, in questo caso, la "*fatica del definire*".
In matematica si presentano situazioni nuove e decisamente più pesanti.
La prima novità, non solo rispetto alle conversazioni quotidiane, ma anche rispetto a quello che succede nelle altre discipline, è che i libri di testo, dalle elementari all'università, sia pure in misura diversa, sono ricchi di definizioni. In genere esse sono messe bene in risalto dal punto di vista tipografico, incorniciandole e colorandole. Spesso si usa anche una "liturgia linguistica" con le tipiche parole: "dicesi", "definiamo", "chiamiamo" e simili.
Altre volte, sopratutto nella scuola elementare, le definizioni sono meno solenni, sono di "tipo narrativo" nel senso che si descrivono, senza necessariamente usare parole tecniche, gli oggetti che si vogliono presentare.
Stante questa presenza massiccia delle definizioni nello studio della matematica ci si può porre il problema: qual è il significato

etimologico della parola “definizione”? Qui entra in gioco il latino. Si tratta di porre dei confini, di piantare dei paletti, di fare delle delimitazioni. Non sarà male consultare, con i ragazzi, un vocabolario di italiano. Il *“Dizionario di matematica elementare”* della Stella Baruk (Baruk,1988) dedica diverse colonne alla “definizione”.
Trattandosi di matematica è bene ricorrere al padre Euclide. Egli inizia il primo libro dei suoi *Elementi* con il termine “όροι”. Acerbi (Acerbi, 2007) lo traduce con “Termini”, come del resto Enriques (Enriques 1925) il quale nota che si può anche tradurre con “concetti” o “definizioni”. Frajese e Maccioni (Frajese – Maccioni, 1970) traducono con “definizioni”.
Questa potrebbe essere una buona occasione, per docenti e studenti, per accostarsi al più classico libro della letteratura matematica.
Il gioco della ricerca del significato etimologico delle parole molto usate in matematica potrebbe continuare, per esempio, con la parola “geometria”. Io l’ho fatto molte volte con i miei studenti universitari e con i docenti che partecipavano a corsi di aggiornamento. Tutti, ma proprio tutti, sapevano che “geometria” significa “misura della terra” anche se la geometria che noi studiamo non ha niente a che fare con la misura della terra.
Ho continuato il gioco con la parola “aritmetica”. La risposta corale è sempre stato un silenzio imbarazzato, anche dai laureati in matematica. I Greci chiamavano “aritmetica” (dal vocabolo arithmos, numero) quella che per noi è la “teoria dei numeri”, cioè la contemplazione dei numeri, delle loro proprietà, dei rapporti reciproci e non dei numeri che servivano per i calcoli di tipo commerciale (questa era la “Logistica”).
Il gioco può continuare con una parola molto usata in matematica dalla scuola media in poi: “teorema”. Quando l’ho fatto, qualche risposta, di gente che aveva alle spalle il liceo classico, la collegava con Dio (theos in greco), collegamento sbagliato. Teorema deriva da “theorein” che significa “ contemplare” e sottolinea la dimensione contemplativa della matematica. Mi domando: è

proprio necessario, per giustificare lo studio della matematica, che andiamo sempre alla ricerca delle sue applicazioni? A me vengono in mente le parole che C.G.J. Jacobi scriveva a Legendre il 3 luglio 1830: “Fourier era del parere che lo scopo principale della matematica fosse l’utilità sociale e la spiegazione dei fenomeni naturali; un filosofo come lui tuttavia avrebbe dovuto sapere che l’unico fine della scienza è l’onore dello spirito umano, e che, da questo punto di vista, un problema relativo ai numeri ha la stessa portata di un problema che riguarda il sistema del mondo.”
Forse, però, sono un illuso.
Il nostro vocabolario matematico non deriva tutto dal greco: sono presenti anche gli Arabi. Io credo che se ci mettiamo a giocare con i nostri alunni e, forse, anche con i nostri colleghi, con la parola “algebra”, avremmo delle sorprese. La sua origine araba ed il suo significato di “restaurazione” li troviamo anche sui vocabolari di italiano. Stessa origine ha la parola “algoritmo”. Il punto di partenza è un nome proprio “Al-Khuwarizmi” autore di un trattato di algebra. Latinizzato in “algorismus” è diventato “algoritmo” e il suo significato attuale non ha nessun rapporto con il matematico da cui deriva.
Una trafila un po’ più lunga ha seguito la nostra parola “zero”. Partendo dall’arabo “sifr” è diventato “zephirum” in latino, poi “zeuero” ed infine “zero” in italiano.
Questi brevi cenni ci danno l’occasione di sottolineare in classe il nostro debito culturale non solo verso i Greci, ma anche verso gli Arabi e, attraverso gli Arabi, verso Indiani.

Ritorniamo al definire. Una novità sconvolgente, rispetto a tutte le altre discipline, è che in matematica non possiamo definire tutto. Questa affermazione è ovvia per un laureato in matematica, ma può risultare abbastanza incomprensibile per gli altri. Perché non possiamo definire tutto? Quando noi diamo una definizione la nostra aspirazione è che sia sensata e comprensibile. Per questo dobbiamo usare delle parole il cui significato sia già noto ai nostri

interlocutori. Il che è come dire che di queste parole dobbiamo aver già dato una definizione sensata e comprensibile. E il processo continua. Se vogliamo evitare di fare un "circolo vizioso" che non ci consente di dare nessuna definizione e se vogliamo evitare quello che si chiama un "regresso all'infinito" per cui al momento del giudizio universale stiamo ancora tentando di dare la definizione di un certo "oggetto" matematico, dobbiamo per forza scegliere alcune parole, alcuni termini senza darne nessuna definizione. Questi vocaboli vengono chiamati "termini primitivi" o " concetti primitivi".
Tre i problemi che nascono.

Il primo: che ce ne facciamo dei termini primitivi? Semplice: li usiamo per dare definizioni. Esempio: se in geometria scegliamo come termini primitivi quello di punto e di retta, possiamo subito definire il triangolo: una terna di punti non allineati.

Il secondo: con quali criteri scegliamo i termini primitivi? Qui il discorso è più difficile se non altro perché storicamente i matematici si sono ispirati a criteri diversi. Gli antichi, da Aristotele alla fine del secolo XIX, hanno scelto come criterio la semplicità, la evidenza dei concetti; i moderni, da Hilbert in poi, senza scartare a priori la semplicità, hanno fatto appello alla libertà del matematico, alla forza dei concetti, alla loro comodità.

Il terzo: anche in matematica si creano delle nicchie di privilegio, delle rendite di posizione con concetti di serie A (quelli primitivi) e concetti di serie B (quelli definiti)? No di certo! I concetti primitivi non sono tali per diritto divino e non sono tali per tutti. Essi sono soggetti, nella concezione moderna della assiomatica, alla libera scelta del matematico. Matematici diversi possono scegliere concetti primitivi diversi per la stessa teoria. Inoltre a quelli scelti si impongono "regole di comportamento" ferree, cioè devono ubbidire a quelle proposizioni che chiamiamo "assiomi".

Questi discorsi sono certamente per gli insegnanti, Essi potrebbero "divertirsi" con qualche piccola ricerca.
Per esempio, in Euclide non c'è l'espressione "termini primitivi". Essi mancano veramente? Le definizioni di Euclide sono tutte "sensate e comprensibili"?
Confrontare libri di testo diversi (di geometria per il biennio delle superiori) per vedere quali concetti primitivi scelgono e come li giustificano. Si può anche risalire ad esposizioni classiche come quelle di Peano e di Hilbert.

Ci sono termini primitivi in aritmetica? Verrebbe voglia di dire di si visto che i programmi Brocca, PNI, e le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico della "riforma Gelmini" parlano di approfondire la comprensione del sistema assiomatico portando come esempio anche il "contesto dell'aritmetica". Se ne trova traccia nei libri di testo prima del quinto anno? Perché? Anche per l'aritmetica c'è la libertà che si riscontra nella geometria?

Di queste "scoperte" che l'insegnante può fare, che cosa si può portare in classe? E' conveniente farlo?

Comunque si risponda a queste domande è certo che in classe, a qualunque livello, dobbiamo presentare delle definizioni. Gli insegnanti, e di conseguenza anche gli alunni, si devono sottoporre a due fatiche:
"La fatica dell'attenzione": in una definizione devono essere presenti tutti gli elementi che sono indispensabili per tracciare "l'identikit" dell'oggetto che vogliamo definire:
"La fatica dell'economia": in una definizione non dobbiamo dire niente di più di ciò che è indispensabile, va esclusa ogni ridondanza.

Con una frase un po' ad effetto, possiamo dire che in matematica **"il definire è l'arte di misurare le parole, di dire tutto e solo ciò che serve".**
A me sembra che questo sia un messaggio da trasmettere esplicitamente agli studenti per aiutarli ad evitare il pressapochismo come anche la inutile logorrea.

Una volta accettato di procedere in questo modo nel dare definizioni, ci si può divertire, docenti e studenti, ad esaminare le definizioni che via via si incontrano nel libro di testo.
Per esempio, in un libro di testo per la scuola media ho trovato questa definizione scritta in grassetto e incorniciata in un rettangolo azzurro: " **Un numero naturale si dice primo se è divisibile solo per se stesso e per 1, altrimenti si dice composto."**
La definizione è corredata dalle seguenti *Osservazioni:*

- I numeri pari non sono primi tranne 2
- 1 non è considerato primo *per convenzione*
- I numeri primi sono infiniti.

Questa definizione opera una partizione nel mondo dei numeri naturali. Il numero 0 dove lo mettiamo? Non è un numero primo, almeno per la prima osservazione fatta; non è un numero composto perché non scomponibile nel prodotto di fattori primi. Quindi non è né primo né composto, ma la definizione non dà questa possibilità.
L'osservazione sul numero 1 è una perla: esso è primo per la definizione, ma non è primo per convenzione, come se la definizione non fosse una convenzione.
Si tratta, quindi, di una definizione "deficiente" nel senso che non c'è tutto quello che serve. Basta poco per sistemarla. Basterebbe dire: "Un numero naturale maggiore di 1…" e così si fa nascere una partizione con tre mondi diversi: primi, composti, né primi né composti (0 e 1). Si possono trovare altre sistemazioni che non fanno appello alla relazione di ordine e così studenti e professori esercitano le loro capacità critiche.

Altre definizioni sono decisamente sovrabbondanti come la seguente: " Si dice quadrato ogni parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali" Avendo già descritto e dimostrato le proprietà dei parallelogrammi, bastava molto meno.

Io sono convinto che nel dare definizioni noi possiamo trovare gioia, soddisfazione, divertimento. Potrei esprimere tutto con una specie di slogan provocatorio: **"Definire in matematica: l'ebbrezza della libertà".**

Il mondo delle definizioni è il mondo della fantasia e della libertà ed è una delle manifestazioni della verità della affermazione di Cantor: *«L'essenza della matematica è la sua libertà»*. Provare una sensazione di libertà in una disciplina che tutti, o quasi, ritengono dogmatica e rigida, procura una soddisfazione inebriante.

Abbiamo libertà rispetto al ***passato*** anche se venerando ed autorevole. Parlando del passato è naturale rifarsi al nostro padre Euclide. Egli apre il primo libro dei suoi Elementi con 23 definizioni. La penultima ci presenta un mondo a noi molto famigliare: quello dei quadrilateri o delle "figure quadrilatere" come le chiama Euclide. Ecco la definizione: *«Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamano trapezi».*

Degli stessi quadrilateri noi diamo definizioni abbastanza diverse. Anzitutto noi facciamo ricorso massiccio al parallelismo dei lati opposti dato che prima, nei libri di testo, è stata introdotta la nozione di rette parallele. Euclide non fa intervenire il parallelismo fra rette perché lo introduce nella definizione 23.

Con la sua definizione Euclide introduce una partizione nel mondo dei quadrilateri, forse perché la riteneva più facile da memorizzare o, forse, perché la riteneva didatticamente più efficace. Con le definizioni che noi diamo di solito non operiamo una partizione nel mondo dei quadrilateri, ma, seguendo un atteggiamento tipico della matematica moderna, cerchiamo di partire da una classe molto generale ed individuare al suo interno sottoclassi significative.

Una differenza molto vistosa riguarda i trapezi. I nostri trapezi (definiti facendo intervenire una coppia di lati paralleli) lo sono anche per Euclide, ma non vale il viceversa.

Qualcuno potrebbe dire che è normale rivendicare questa libertà di definizione rispetto al passato dato che da Euclide ad oggi ne è passata di acqua sotto i ponti. E' vero, ma la stessa libertà noi possiamo rivendicare ed esercitare anche rispetto ***al presente***. Ecco qualche esempio che può aiutarci ad assumere questo atteggiamento nelle attività nelle nostre classi.

Le definizioni di numero pari.
La definizione più accreditata è la seguente: *un numero è pari quando è divisibile per 2*. La si trova anche sui vocabolari di italiano.
E' una definizione tradizionale già presente in Euclide (def. 6 del libro VII) e si presta bene a fare un breve diagramma di flusso per saggiare se un numero è pari o no.
Possiamo certamente darla in quarta elementare o anche alla fine della terza quando gli alunni hanno acquisito un po' di dimestichezza con la divisione. Lo strumento concettuale di cui abbiamo bisogno è la divisione. Possiamo ritenerlo uno strumento troppo raffinato o troppo difficile per parlare di numeri pari. Allora possiamo ricorrere ad una operazione più semplice: la

moltiplicazione dicendo che *un numero è pari quando è multiplo di 2.* La possiamo enunciare alla fine della seconda elementare o all'inizio della terza.
E se volessimo presentare i numeri pari in prima elementare? Nessun problema. Giocando con i numeri amici rispetto all'addizione i bambini possono scoprire che alcuni numeri sono *somma di due numeri uguali. Questi numeri sono pari.*
Tre definizioni diverse perché fanno intervenire strumenti concettuali diversi, ma logicamente equivalenti.
Quale delle tre è preferibile?
Dipende dai gusti dell'insegnante, dagli strumenti concettuali che ha a disposizione e, quindi, dalla classe.
Personalmente preferisco la terza per i seguenti motivi:

- si può scoprire in un contesto di gioco;
- richiede solo la conoscenza dell'addizione;
- porta a scoprire subito che lo zero è un numero pari ($0 = 0 + 0$);
- è la strada più breve per giungere alla rappresentazione generale dei numeri pari:

$$p = n + n = 2n$$

Le definizioni di numero primo.
Se ne possono dare diverse, ma non tutte sono equivalenti.
Nei libri di testo delle scuole medie spesso si trova la definizione: *un numero naturale è primo se ha solo due divisori, uno e se stesso.*
Con questa definizione il numero 1 risulta essere un numero primo. Non siamo, però, obbligati a tenercelo fra i piedi anche perché 1 canta fuori dal coro degli altri numeri primi. Per escluderlo basta poco. Per esempio, si può adottare la definizione: *un numero naturale è primo quando è maggiore di 1 ed ha come divisori solo 1 e se stesso.* Questa è, sostanzialmente, la definizione 11 del libro VII degli Elementi di Euclide. In classe si potrebbe illustrare l'atteggiamento di Euclide, non sempre coerente. Per Euclide, un numero è divisore di un altro numero quando è minore di questo

(definizione 3). Quindi nessun numero divide se stesso. Questa è l'ufficialità della definizione. Quando, però, ad Euclide fa comodo (proposizione 2 del libro VII) considera un numero divisore di se stesso. La scelta definitoria di Euclide è in vista dei numeri perfetti che rappresentano il top dei libri aritmetici degli Elementi.

Se ci da fastidio l'intervento della relazione di ordine, possiamo lasciarla in pace e dire che: *un numero naturale è primo se ha esattamente due divisori diversi*. Ovviamente 1 non è primo.

In tutte queste definizioni abbiamo fatto entrare in gioco la divisione. Non è necessario; possiamo accontentarci della moltiplicazione dicendo che: *un numero naturale è primo se è multiplo solo di due numeri diversi, cioè se stesso e l'unità.* Ovviamente 1 resta fuori dal giro e questa definizione può essere facilmente letta sulla tabella della moltiplicazione.

Questa "ebbrezza della libertà" nel dare definizioni possiamo gustarla anche in geometria.

Possiamo incominciare con i parallelogrammi. La grande famiglia viene definita attraverso il parallelismo dei lati opposti. Le diverse sottofamiglie sono caratterizzate facendo appello alla lunghezza dei lati ed alla ampiezza degli angoli. Ovviamente tutto ciò è lecito e deve essere anche efficace visto che fa parte di una lunga tradizione. Possiamo, però, rivendicare la nostra "libertà di definizione" e fare entrare in gioco le diagonali. Premessa la definizione di diagonale ed il fatto che un quadrilatero è convesso se e solo se le sue diagonali si tagliano in un punto interno, possiamo, allora definire:

parallelogramma: *un quadrilatero le cui diagonali si tagliano nel rispettivo punto medio* (questo è l'elemento fisso); **rettangolo**: *se le due diagonali sono uguali*; **rombo**: *se le due diagonali sono perpendicolari;* **quadrato**: *se le due diagonali sono uguali e perpendicolari.*

Questa libertà di definizione può esplodere anche nel tracciare l'identikit di una singola figura. Tipico, da questo punto di vista, è il quadrato. Questa libertà, ovviamente, si basa sugli strumenti concettuali che abbiamo a disposizione e che vogliamo usare e sugli obiettivi che vogliamo raggiungere.

Una prima definizione di quadrato è la seguente: *quadrato è un quadrilatero regolare.* I poligoni regolari si incominciano a studiare nella scuola primaria con la definizione tradizionale: è regolare un poligono che ha i lati congruenti e gli angoli congruenti. In questa definizione di quadrato non interviene né il parallelismo dei lati opposti, né il fatto che gli angoli siano retti. E', quindi, una definizione che vale anche in una geometria nella quale non esistono rette parallele e la somma degli angoli interni di un quadrilatero è maggiore di 4 retti (geometria ellittica) e in una geometria nella quale di rette parallele per un punto ad una retta data ne esistono più di una e, quindi, la somma degli angoli interni di un quadrilatero è minore di 4 retti (geometria iperbolica). Naturalmente la definizione vale anche in geometria euclidea nella quale, per via della unicità della parallela, la somma degli angoli interni di un quadrilatero vale 4 retti e, quindi, i quattro angoli uguali del quadrato sono retti. Quella riportata è la definizione più generale di quadrato.

In classe potrebbe nascere questa difficoltà: come fanno i quattro angoli ad essere uguali senza essere retti? Se vogliamo convincere i nostri studenti con un disegno (e non è possibile fare diversamente), dobbiamo mandare a ramengo un tabù cui siamo tenacemente attaccati (per la nostra visione euclidea della geometria): i lati del quadrato non sono rettilinei. Pazienza! Non crolla la matematica, non crolla neppure la nostra cara e simpatica geometria euclidea. Semplicemente la matematica ha orizzonti più vasti di quelli cui noi siamo abituati. E perché non abituarci anche noi?

Di tal fatta, se non tale appunto, è la stessa definizione di quadrato quando per poligono regolare di n lati si intende quello che ha n assi di simmetria. *Il quadrato, quindi, è un quadrilatero che ha 4 assi di simmetria.* Siccome la simmetria assiale è una isometria (anche se diverse sono le sue definizioni nelle tre geometrie prima ricordate) si conclude subito che il quadrato ha 4 lati congruenti e 4 angoli congruenti.

Sempre partendo da un semplice quadrilatero possiamo definire *quadrato un quadrilatero che ha la diagonali congruenti, perpendicolari e che si tagliano nel rispettivo punto medio*. Anche questa definizione vale in tutte e tre le geometrie sopra ricordate.

Possiamo partire dalla famiglia dei parallelogrammi. Essi sono tipiche figure della geometria euclidea, legate indissolubilmente alla unicità della parallela. Può essere interessante andare alla ricerca delle definizioni che rispettano il "*principio di minimalità*", cioè quelle che richiedono il minimo per caratterizzare il quadrato. Per esempio, queste due: *un quadrato è un parallelogrammo con due lati consecutivi congruenti ed un angolo retto. E' quadrato un parallelogrammo con le diagonali congruenti e perpendicolari.*

Se si parte dai rettangoli basta richiedere che *due lati consecutivi siano uguali oppure che le diagonali siano perpendicolari.*

Analogamente, se si parte dai rombi basta richiedere che il rombo *abbia un angolo retto, oppure che le diagonali siano uguali.*

Naturalmente si può andare alla ricerca di nuove definizioni di quadrato e vedere se sono vere definizioni, cioè dicono tutto e solo l'indispensabile, vedere se sono equivalenti a qualcuna delle definizioni proposte e perché.

Per esempio, si può dire che un quadrilatero è un quadrato se esiste una rotazione che trasforma ogni vertice nel successivo? Perché?

Si può dire che un quadrilatero è un quadrato se ha tre lati congruenti e due angoli retti?

In questa attività tipicamente matematica del definire l'impegno per la scelta delle condizioni necessarie e sufficienti e la gioia del gustare la libertà di scelta sono inscindibili. Meglio: possono essere inscindibili se il docente vi si orienta. E orientarsi in tal senso conviene a tutti: ai docenti, agli studenti e alla matematica.

3 – PARLARE

Il linguaggio ha una funzione sociale insostituibile. Noi impariamo a parlare fin da piccoli e, in generale, non ci costa fatica parlare nella lingua quotidiana. L'uso di un linguaggio sorvegliato, pulito e corretto, però, si rivela faticoso a giudicare da quanto si sente in tante conversazioni e alla televisione e da quanto si legge anche in giornali seri.
Anche la matematica ha un suo linguaggio, anzi vi è chi sostiene che essa è essenzialmente un linguaggio.

Noi siamo abituati al linguaggio matematico di adesso. Incominciamo ad incontrarlo e ad usarlo dalla prima elementare e, in modo inconsapevole, maturiamo la convinzione che è sempre stato usato questo linguaggio. Si tratta di un linguaggio fatto prevalentemente di simboli: basta osservare un qualunque libro di testo, soprattutto nella parte dedicata agli esercizi.

La realtà è molto diversa. Il linguaggio matematico ha una storia lunghissima, multimillenaria, è passato attraverso varie fasi che si sovrapponevano fra di loro e continua anche ora il suo cammino verso non si sa quale meta. Prendere coscienza di questa storia potrebbe essere la **prima scoperta** da parte degli studenti.

Seguendo G.H. Nesselman (Nesselmann,1843) si è soliti distinguere tre fasi, tre periodi nella storia del linguaggio matematico.

La **prima fase** viene chiamata **"fase retorica" o "periodo retorico"**. E' la fase più antica, durata diversi millenni. Essa caratterizza, per esempio, la matematica dei Babilonesi, degli Egiziani, dei Greci del periodo aureo della matematica (Euclide, Archimede, Apollonio, Eratostene) e, più tardi, anche degli Arabi. Durante questa fase la matematica, problemi, soluzioni, regole è espressa quasi esclusivamente a parole. L'uso dei simboli è molto parco e quasi esclusivamente limitato ai numeri, scritti in modo diverso dal nostro. In classe si potrebbe presentare qualche problema, testo e soluzione, tratto da qualche tavoletta babilonese o dal papiro di Ahmes, e confrontarlo con il linguaggio moderno. Se ne trovano esempi sui libri di storia della matematica. Si veda, per esempio, (Giacardi e Roero 1979).

La **seconda fase** viene chiamata **"fase sincopata" o "periodo sincopato"**. Convenzionalmente la si fa iniziare con Diofanto di Alessandria (intorno al terzo secolo dopo Cristo). Nella sua "*Aritmetica*", tredici libri di problemi, ma ce ne sono pervenuti solo 6, egli introduce alcuni simboli di carattere algebrico come Δ^{γ} per il quadrato (Δ è l'iniziale maiuscola di dunamis=forza), K^{γ} per il cubo (K è l'iniziale maiuscola di kubos), e ς per indicare il"numero del problema", cioè l'incognita (ς è l'ultima lettera di aritmòs cioè numero). Per questo si parla di "fase sincopata". Essa è continuata fino al XVII secolo ed ogni autore introduceva simboli personali.

Solo per fare un esempio. Luca Pacioli (1445-1514) usava "p" (plus) per l'addizione, "m" (minus) per la sottrazione, R (radix) per la radice quadrata, "co" (cosa) per l'incognita, "ce" (censo) per il quadrato e "cece" (censo-censo) per la quarta potenza.

La **terza fase** viene chiamata **“fase simbolica” o “periodo simbolico**”. Convenzionalmente la si fa iniziare con F. Viète (1540-1603) che usa le vocali maiuscole per indicare l’incognita e le consonanti maiuscole per indicare i coefficienti. L’attuale simbolismo, però, è dovuto in gran parte a Cartesio (1596-1650). Egli usa, per esempio, le ultime lettere minuscole dell’alfabeto (x, y, z) per indicare le incognite, e le altre lettere minuscole per indicare i coefficienti. Intanto, però, erano stati introdotti tutti i simboli attuali per le operazioni, come il + (verso la fine del secolo XV per opera del tedesco Widmann), il x (dall’inglese Oughtred nel 1631), e per le relazioni come l’ = (nel 1557 ad opera dell’inglese Recorde) e il > (nel 1631 ad opera dell’inglese Harriot).

La storia continua anche ora con l’introduzione di nuovi simboli per nuove operazioni, per nuove strutture, per nuovi concetti.

Una seconda scoperta che si può fare in classe riguarda la storia dei simboli. Si tratta di far scoprire che i simboli hanno una storia, una vita, una evoluzione; che i simboli sono entrati in competizione e che, alla fine, uno ha prevalso perché aveva alle spalle una più lunga tradizione, oppure perché adottato da un grande matematico o, più banalmente, per ragioni economiche. Un libro informatissimo e fondamentale su questo argomento è il volume di F. Cajori (Cajori, 1974). Peano, nel suo *Formulario Mathematico*, ha delle note dedicate alla storia dei simboli. Si può anche utilmente consultare (A. Vellone 1994). Io mi limito a ricordare due semplici esempi.

Il primo riguarda i **numeri decimali**.

Dalla quarta elementare in avanti si studiano i numeri decimali. Il grande “sponsor” dell’uso dei numeri decimali limitati fu Simon Stevin (1548-1620). Egli chiamava “inizio” la parte intera e la contrassegnava globalmente con il simbolo ⓪. “Ciascuna decima parte dell’unità di inizio la chiamiamo Primo e il suo segno è ①; e la decima parte dell’unità di primo lo chiamiamo Secondo, il suo segno è ②”. Seguivano i Terzi, i Quarti, etc., ciascuno con il relativo simbolo. Ad esempio Stevin scriveva 27⓪8①4②7③il numero che per noi è scritto 27,847.

La notazione era piuttosto complicata ed altri matematici cercarono di semplificarla; così, ad esempio, lo svizzero Joost Burgi (1552-1632) scriveva 2414 ponendo uno zero sotto la cifra 1, al posto del nostro 241,4.

Gli storici della matematica sono concordi nel ritenere che la consacrazione della virgola e del punto come separatore decimale sia da ascriversi a John Napier (1550-1617), più noto come Nepero, quello dei bastoncini per la moltiplicazione.

Nell’opera “*Rabdologiae, seu numerationis per virgulas, libri duo*”, del 1617, egli usa indifferentemente il punto o la virgola, mentre nell’opera postuma “*Mirifici logarithmorum canonis constructio*” del 1619 adotta il punto decimale.

Dopo Napier l’uso del punto o della virgola decimale si diffuse gradualmente, ma divenne esclusivo solo verso la fine del secolo XVIII con l’adozione del sistema metrico decimale. Una breve storia dei numeri decimali si trova in UMI (a cura di) (UMI, 2001).

Il secondo riguarda le **parentesi** che impariamo ad utilizzare già dalla scuola elementare.

Le parentesi, utilizzate già dal matematico fiammingo Albert Girard (1590-1633) nel 1629, vinsero definitivamente la loro battaglia con il concorrente “vinculum” ____, posto sopra o sotto gli elementi interessati, quando furono adottate dal grande Eulero (1707-1783).

Una **terza scoperta** riguarda i rapporti fra linguaggio matematico e linguaggio comune. Il linguaggio matematico, se vuole mantenere un minimo di "umanità" e possedere un minimo di "comprensibilità" per la maggioranza delle persone non può fare a meno del linguaggio comune. Nel linguaggio matematico lo si usa abbondantemente, ma può essere richiesta un po' di attenzione.

Per esempio, può avvenire un *"processo di estremizzazione semantica"*. Si pensi alla parola **"trasformazione**": nel linguaggio comune indica un cambiamento, una variazione. Non ci sogneremmo mai di parlare di "trasformazione" quando non cambia niente.

In matematica si usa la parola "trasformazione" per esempio in geometria come nome generico per le isometrie, per le similitudini, ecc., ma si considera anche il caso estremo di trasformazioni che non cambiano niente: è la trasformazione identica o identità. Il motivo di questa scelta è che l'identità è necessaria per fare dei vari tipi di trasformazioni un gruppo in senso tecnico.

Può avvenire un *"cambiamento di categoria"* (da aggettivo a sostantivo). Per esempio, nel linguaggio comune la parola "**integrale**" è un aggettivo: pane integrale, proprietà integrale, ecc. Anche nel linguaggio matematico si usa la parola "integrale", ma come sostantivo: l'integrale della funzione $F(x)$. Allo stesso destino sono andate incontro, per esempio, anche le parole "derivata" e "ordinata".

Può avvenire un *"processo di monosemia":* dei vari significati che una parola assume nel linguaggio comune, in matematica se ne sceglie uno. Si pensi alla parole "**ordine**".

Può avvenire un *"processo di novità semantica"* che consiste nell'assumere una parola del linguaggio comune e nel caricarla di un significato totalmente nuovo. E' il caso, per esempio, delle parole che esprimono le strutture algebriche, come “**gruppo**”, “**anello**”, “**campo**”.

Il discorso sul “Parlare” si potrebbe concludere in classe con un “Elogio del linguaggio simbolico” per

- La sua **economicità** che permette di risparmiare un sacco di tempo e di parole passibili, magari, di diverse interpretazioni. Basterebbe, per esempio, scrivere, in simboli, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla addizione e farla tradurre con parole del linguaggio comune.

- La sua **universalità** che lo rende comprensibile a tutti indipendentemente dalla lingua materna. E’ il vero esperanto della scienza.

- La sua **pluriconcretezza**. Si pensi alla nozione di “**gruppo**”.

Un insieme G dotato di una operazione binaria interna * è un gruppo se

- $\forall a\ \forall b\ \forall c\quad (a * b) * c = a * (b * c)$
- $\exists\, u: \forall a\quad a * u = u * a = a$
- $\forall a\ \exists\, x: a * x = x * a = u$

Definizione certamente astratta, senza nessun riferimento a “oggetti” particolari né ad una operazione particolare. Proprio per questo, però, con questa struttura si riesce a descrivere ed a dominare una pluralità di situazioni diverse fra di loro per gli “oggetti” interessati (numeri di vario tipo: interi relativi, razionali, reali, complessi; trasformazioni geometriche: isometrie, similitudini, proiettività; classi di resti ecc.), per l’operazione “ * ” (che può essere interpretata come addizione, moltiplicazione, composizione, ecc.), per la cardinalità (finita, numerabile, continua).

- Talvolta anche per la sua **stupenda bellezza**. Si pensi, per esempio, a quella che viene generalmente considerata la più bella formula della matematica:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

nella quale entrano tutti i grandi protagonisti della matematica. Sarà una questione di gusti, ma non si può non rimanere meravigliati davanti alla potenza espressiva, alla semplicità assoluta, alla eleganza incredibile di questa formula.

4 – DIMOSTRARE

La dimostrazione matematica è stata una fatidica e gloriosa conquista della Grecia. Nelle matematiche pre-elleniche non si incontrano dimostrazioni che possono essere sviluppate all'interno di un sistema assiomatico. Sappiamo tutti che i primi a dare una sistemazione assiomatica alla matematica sono stati i Greci. Dire matematica dopo i Greci, affermava Dieudonné, è dire dimostrazione. Le dimostrazioni fanno parte dell' "orgoglio matematico". Tuttavia, nonostante l'esempio degli Elementi di Euclide, scorrendo la storia della matematica ci imbattiamo in esempi di "dimostrazioni" offerti da matematici di un certo spessore come Girolamo Cardano (1501-1576), Simon Stevin (1548-1620), Cristian von Wolf (1679-1754), che ora ci fanno sorridere (Ferrari, 2002). Lungo i secoli sono cambiati gli obiettivi assegnati alle dimostrazioni. Da questo punto di vista è illuminante l'articolo della (Barbin, 1994). I matematici, però, non vi hanno mai rinunciato perché solo una dimostrazione produce teoremi, genera certezze. La convinzione comune, però, era che una dimostrazione deve essere "umana", cioè deve poter essere controllata, in un tempo ragionevole, con un procedimento manuale, con "carta e matita". E' stato Archimede a teorizzare che una condizione essenziale per l'accettazione di una dimostrazione deve essere l'esame e il riconoscimento da parte di esperti matematici: il controllo e la validazione sociale, come si dice oggi. Una ferita mortale a tale concezione è stata inferta nel 1976 da Kenneth Appel e Wolfang Haken con la dimostrazione del "**teorema dei quattro colori**" ottenuta con l'uso di tre calcolatori con un tempo macchina di circa 1200 ore. Fu vera dimostrazione? Se ne discute ancora.

Negli ultimi decenni si è molto discusso sulle dimostrazioni matematiche. Mi limito ad un breve cenno.

Nel 1993 John Horgan (*Morte della dimostrazione*, in "Le Scienze", n.304, dicembre) scriveva: "Per millenni, i matematici hanno commisurato i loro progressi a ciò che si può dedurre tramite la dimostrazione, cioè una successione di passaggi logici che da una serie di assiomi porta a una conclusione irrefutabile. Ebbene, i dubbi che travagliano il pensiero odierno hanno ormai contaminato anche la matematica. Può darsi che i matematici siano prima o poi costretti ad accettare ciò che già molti scienziati e filosofi hanno ammesso, cioè che le loro asserzioni sono, nella migliore delle ipotesi, vere solo provvisoriamente, finché non se ne dimostri la falsità".

Questo è una specie di "De profundis" della dimostrazione matematica intonato da Horgan dando "voce in modo meditato a sensazioni e opinioni diffuse sia nel campo scientifico sia in quello della scuola" (G. Lolli, *Morte e risurrezione della dimostrazione*, "Le Scienze", n.345 maggio 1997). Lo stesso Lolli riconosce che: "La matematica produce dimostrazioni sempre più spericolate e in chi deve dominarle, o insegnarle, la confusione e il disagio sono forti; si è arrivati a proporre l'istituzionalizzazione di un nuovo tipo di matematica, esplicitamente senza dimostrazioni, ma consistente di congetture, esempi, allusioni". L'articolo di Lolli, però, è stato anche il canto del "Resurrexit". Di Lolli vorrei ricordare, anche per i suoi risvolti didattici, il volume "*QED. Fenomenologia della dimostrazione",* Bollati Boringhieri, 2005.

Queste discussioni sulle dimostrazioni si sono fatte sentire anche nell'insegnamento della matematica nelle scuole preuniversitarie.

In Francia, per esempio, al dire di Josette Adda (Adda, 1988) la soluzione adottata è stata drastica: gli alunni non sanno fare le dimostrazioni? Sopprimiamole e accontentiamoci di definizioni informali e di teoremi "accettati" senza dimostrazioni (anche nell'insegnamento dell'analisi delle classi terminali a carattere scientifico).
Per gli Stati Uniti cito dall'articolo di Lolli: "Istituzioni prestigiose con responsabilità nella didattica, come lo US National Research Council, sostengono che, grazie ai calcolatori, studenti che abbiano anche solo una minima capacità nelle tecniche fondamentali dell'algebra dovrebbero poter affrontare corsi di calcolo appositamente concepiti, cioè senza dimostrazioni. La scuola secondaria non è il luogo per imparare a scrivere dimostrazioni matematiche rigorose e formali; per quello ci sono i corsi universitari avanzati."

E in Italia? Mi hanno sempre colpito due fatti. Il primo è questo: molte persone, anche di buona cultura, capaci di fare ragionamenti seri e corretti, davanti ad una dimostrazione matematica si mostrano completamente disarmate. Il secondo, ed è esperienza quotidiana dei docenti di matematica, è la enorme difficoltà degli studenti nell'esporre una dimostrazione: essi la imparano a memoria e la recitano sperando che l'insegnante non li interrompano altrimenti "tota scientia vadit" come quando la "carta cadit". Certo le dimostrazioni matematiche presentano delle difficoltà. Per esempio, bisogna capire il ruolo che, in una dimostrazione, giocano i fatti matematici già noti ed accertati, siano essi assiomi o teoremi. Prima ancora bisogna prendere coscienza perché una certa affermazione debba essere dimostrata. Soprattutto in geometria perché fare dimostrazioni, magari lunghe e noiose, quando la figura parla così chiaramente?

Io sono convinto che noi docenti dovremmo fare delle serie riflessioni sulle dimostrazioni nel nostro insegnamento. Io, per esempio, diminuirei drasticamente il numero delle dimostrazioni in geometria, mentre aumenterei quelle di aritmetica e di algebra. Dovremmo studiare un avvio "soft" alle dimostrazioni mostrando la "fallacia", alle volte, dei nostri sensi (Benaglia 1997, Gario 2010). Credo siano necessarie altre riflessioni anche se, sinceramente, non so dirvi quali.

Ad ogni modo ritengo inaccettabile eliminare le dimostrazioni dal nostro insegnamento sopratutto oggi con giovani abituati al flash che non lascia traccia, al "mordi e fuggi". Le dimostrazioni sono uno strumento per abituare i giovani a riflettere, a pensare, a ragionale, a faticare. E, perché no?, anche a divertirsi, almeno entro certi limiti. A mò di esempio, propongo alcune situazioni nelle quali docenti e studenti possono, se non proprio divertirsi, provare delle soddisfazioni.

Prima situazione: dimostrare per generalizzare.

Siamo in aritmetica ed usiamo numeri facilmente dominabili. Prendiamo tre numeri consecutivi e facciamone il prodotto. Esempi: 1 x 2 x 3 = 6; 4 x 5 x 6 = 120; 2 x 3 x 4 = 24. In ciascuna terna prendiamo il numero centrale, ne facciamo il cubo e gli sottraiamo il numero stesso: otteniamo gli stessi risultati. Sarà un caso fortunato perché, per esempio, abbiamo preso numeri piccoli? Possiamo provare con altre terne di numeri consecutivi e scopriamo che vale la stessa "regola". Possiamo concludere che vale sempre? Con le "prove" si rafforza l'idea, ma non possiamo raggiungere la certezza. La raggiungiamo, invece, generalizzando, cioè considerando i numeri: n, n+1, n+2 oppure, perché i calcoli sono più semplici, n-1, n, n+1.

Seconda situazione: dimostrare per scoprire: l'infinità dei numeri primi.

Nella conferenza tenuta al convegno dell'UMI a Padova nel 1995, Prodi diceva: "Un'altra carenza che riscontravo [negli insegnanti] riguarda quella che chiamerei l'affettività matematica: (potrei anche usare il termine entusiasmo); voglio dire: il piacere di raccontare agli altri (in questo caso agli allievi) qualche fatto matematico molto bello, e tecnicamente semplicissimo. Per molti anni ho fatto un test alle matricole chiedendo, fra l'altro, se avevano mai sentito dire che esistono infiniti numeri primi: non si andava mai oltre il 5% di risposte affermative. È vero che il teorema di Euclide sull'infinità dei numeri primi non faceva parte del programma, ma è anche vero che per chi ha un po' di passione per la matematica è difficile resistere alla tentazione di raccontarlo a chi non lo sa."

Il mondo dei numeri primi è un mondo fantasioso, imprevedibile, misterioso. La loro distribuzione nella successione dei numeri naturali è quanto mai varia. Ci sono sequenze zeppe di numeri primi: fra 1 e 10 ce ne sono quattro e altrettanti fra 10 e 20; e ci sono sequenze lunghissime senza numeri primi: fra 1 000 000! + 2 e 1 000 000! + 1 000 000 non ci sono numeri primi. Scorrendo il crivello di Eratostene o la tabella dei numeri primi riportata in tutti i testi di aritmetica delle scuole medie, è facile scoprire i "*numeri primi gemelli*", cioè numeri primi che differiscono di 2, come 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19. Quanti ce ne sono? I matematici, con il cuore dicono che sono infiniti, ma con la ragione devono confessare la loro ignoranza. Allo stesso modo è facile scoprire i "numeri primi trimelli" cioè terne di numeri primi che differiscono di 2. Si vede subito la terna: 3, 5, 7. Quanti ce ne sono? E' facile dimostrare, ma non lo faccio, che c'è solo questa terna. E i numeri primi? Forse sono più del 5% gli studenti disposti a dire che sono infiniti, ma forse sono meno quelli che ne hanno visto la dimostrazione. Eppure essa risale ad Euclide. Un risultato profondo, sicuro in un mare di misteri, raggiunto con una dimostrazione semplice , elegante che ogni studente di prima superiore può capire e gustare. Eccola.

Supponiamo che i numeri primi siano in numero finito e disponiamoli in ordine crescente. Per non far intervenire il sistema di numerazione chiamiamoli, come fa Euclide, A, B, C,…D.
Con essi costruiamo un nuovo numero: N = (AxBxC…xD) + 1.
Esso è certamente maggiore di tutti i numeri A, B, C, …D e, quindi, non fa parte della lista.
Per N si possono verificare due casi

1 - N è primo. La dimostrazione è conclusa perché N non fa parte della lista dei numeri primi da cui siamo partiti.

2 – N è composto. Allora deve essere divisibile per almeno un numero primo della lista. Ma questo non può succedere perché dividendo N per qualunque numero della lista si ottiene 1 come resto. Quindi deve esistere un numero primo che divide N e non appartiene alla lista. E la dimostrazione è conclusa. Qui si vede il ruolo fondamentale giocato nella dimostrazione dal "teorema fondamentale dell'aritmetica".

Mirabil semplicità in lavoro così profondo, viene voglia di dire, parafrasando un poeta. Ed è l'impressione che molti hanno avuto provandone una soddisfazione estasiante.

Prendo a prestito da W. Dunham (*Viaggio attraverso il genio*, Zanichelli, 1992, pag. 90-91): " Il ragionamento di Euclide è un vero classico, un autentico grande teorema ed è citato a volte come il più bell'esempio di teorema matematico a un tempo semplice, elegante e profondo. Il matematico inglese Godfrey Hardy (1887-1947), nel suo stupendo libro *Apologia di un matematico,* ha scritto che questa dimostrazione di Euclide "conserva la freschezza e l'importanza di quando è stata scoperta: duemila anni non vi hanno lasciato una ruga".

Terza situazione: dimostrare per vedere le cose in una luce nuova: il teorema di Pitagora ed il suo inverso.

Il triangolo rettangolo è una figura definita in termini di lati e di un angolo (quello retto). Di esso, come degli altri triangoli, sappiamo molte cose che ci appaiono intuitivamente evidenti come:

- un lato è minore della somma degli altri due;
- a lato maggiore è opposto angolo maggiore;
- ad angolo maggiore è opposto lato maggiore.

Niente lascia presagire, dal punto di vista intuitivo, anche per il triangolo rettangolo, che vi sia un rapporto stretto fra i quadrati costruiti sui lati.

Il teorema di Pitagora, la cui dimostrazione merita di essere fatta anche perché accessibile, fissa in modo inequivocabile la famosa e proverbiale uguaglianza a tutti nota svelando un fatto strano e inaspettato.

Se consideriamo anche l'inverso del teorema di Pitagora, scopriamo che un triangolo rettangolo può essere caratterizzato completamente in base ai quadrati costruiti sui suoi lati. Sul teorema di Pitagora mi sembra condivisibile quanto scrive Trudeau (*La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, 1991, pag. 116): " Il teorema di Pitagora non manca mai di stupirmi profondamente: sebbene i manufatti umani siano pieni di angoli retti, io concepisco questi ultimi come entità originariamente naturali, simili al fulmine o all'Orsa Maggiore: in piedi in mezzo a un campo formo un angolo retto con il suolo; se inizialmente sono rivolto a est, devo ruotare di un angolo retto per avere di fronte il sud; una ghianda che cade segue un percorso ad angolo retto con l'orizzonte. D'altra parte, la formula

$$\text{“}a^2 + b^2 = c^2\text{”}$$

non evoca alcun ricordo profondo: i numeri non sono parte della natura, e anche se lo fossero sarebbe improbabile imbattersi in tre di essi che soddisfano tale relazione. L'equazione, così astratta e precisa, ci è estranea, e non riesco a immaginare come possa aver a che fare con qualcosa di quotidiano come gli angoli retti: per questo, quando, caduto il velo dell'abitudine come a volte accade, considero il teorema di Pitagora come se lo studiassi per la prima volta, ne rimango sbalordito."

Quarta situazione: dimostrare per giocare (d'anticipo): I quadrati magici.

Tutti conoscono il quadrato magico classico di ordine tre: è un quadrato 3x3, formato da 9 caselle nelle quali bisogna collocare i numeri 1, 2, 3,…,9 in modo che la somma nelle righe, nelle colonne e nelle diagonali sia sempre 15. In genere dopo qualche tentativo si trova la soluzione. Questo è un quadrato magico abbastanza raffinato. Si può proporre di giocare con quadrati magici più "popolari". Per esempio, usando i numeri 0 e 1 costruire un quadrato magico di costante magica K = 1.

Tutti partono lancia in resta, questa è la mia esperienza con insegnanti soprattutto elementari, e dopo qualche minuto presentano una soluzione regolarmente errata. Di solito c'è una diagonale che non funziona. Dopo vari tentativi andati a vuoto, incomincia a insinuarsi l'idea che non è possibile costruire tale quadrato magico. Perché? Forse sono troppo pochi i numeri a disposizione. Si può provare con una costante magica K = 5, 7, 8, 10. La situazione non migliora.

Conoscendo un semplice risultato, garantito da una altrettanto semplice dimostrazione, il mistero si svela.

Consideriamo il quadrato magico di ordine 3 più generale

A	B	C
D	E	F
G	H	I

con costante magica K.

Si ha: $A + E + I = K$

$C + E + G = K$

$B + E + H = K$

Da cui: $(A + B + C) + (G + H + I) + 3E = 3K$ cioè

$K + K + 3E = 3K$ e quindi

$3E = K.$

Scoperta: K deve essere un multiplo di 3 e l'elemento centrale E è un terzo di K. Ecco perché non funzionano i quadrati magici prima proposti. Con questo entriamo nel campo dell'ultimo verbo.

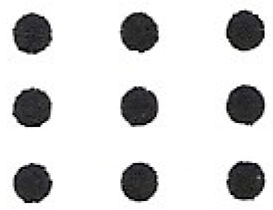
5 – GIOCARE

Già ho parlato dei nostri alleati nei "divertimenti matematici" e non voglio ripetermi. Mi limito a proporre un gioco interessante di carattere geometrico.

Un professor di matematica, ormai in pensione, volle mettere le sue conoscenze matematiche a disposizione del capo giardiniere del giardino di Boboli per creare delle composizioni artistiche.

Creare delle aiole circolari o a forma ellittica era un gioco da ragazzi e tutti erano capaci di farlo. Le coniche, però, erano un mondo molto ricco. In particolare gli frullava nella mente un teorema di Pappo sull'esagono inscritto in una conica. Perché non sfruttarlo per creare una composizione che destasse l'ammirazione dei visitatori ed il desiderio di qualche approfondimento nello studio della matematica? Il problema non era semplice, ma alla fine venne l'idea luminosa: piantare 9 rose su 10 rette, mettendo 3 rose su ogni retta facendo in modo che 2 sole rette fossero assi di simmetria di tutta la composizione. Fantasia e matematica fecero il miracolo. Proviamo anche noi?

La prima idea che tutti hanno è di disegnare una composizione come questa:

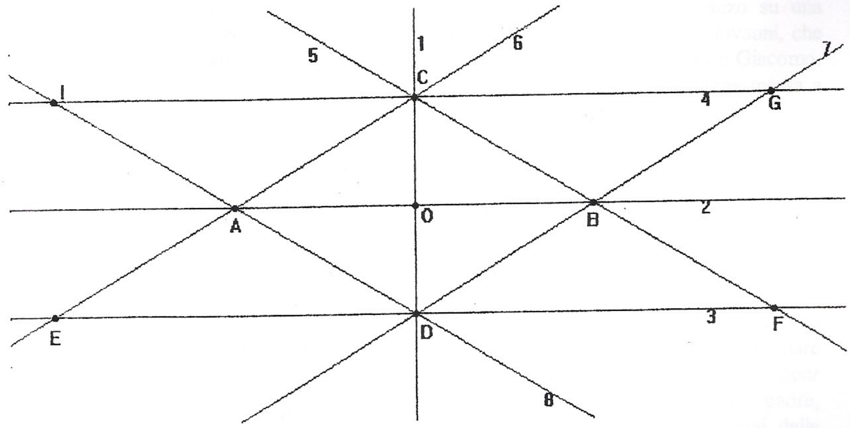


Qui c'è abbondanza di rette di simmetria (sono 4), ma le rette che si possono tracciare sono solo 8.

Proviamo a ragionarci sopra.

- Ci devono essere due sole rette di simmetria. Esse, quindi, sono perpendicolari. Allora tracciamo le rette 1 e 2.
- Nel punto di intersezione, O, mettiamo una rosa.

- Sulla retta 1 dobbiamo piazzare altre due rose che devono essere simmetriche rispetto alla retta 2. Nascono così le rose C e D.
- In modo analogo sulla retta 2 nascono le rose A e B.
- A questo punto che cosa offre il convento? Offre la retta CB (retta 5) (per due punti passa una ed una sola retta) e la sua simmetrica rispetto alla retta 1 cioè la retta CA (retta 6). Ricordiamo che C è un punto unito nella simmetria di asse 1 perché appartiene all'asse.
- Su ciascuna di queste due rette, la 5 e la 6, dobbiamo piantare un'altra rosa. Basta piantarle in modo che siano allineate con D. Nascono le rose E ed F e con esse la retta EDF, cioè la retta 3.
- Siamo a buon punto: abbiamo piantato 7 rose su 5 rette, ma la strada è ormai tracciata. Nascono, infatti, le rette, simmetriche rispetto alla 1, DB e DA. Su di esse piazziamo due rose allineate con C e simmetriche rispetto alla retta 1. Nascono così le rette 7 ed 8 e la retta 4.
- A questo punto abbiamo esaurito le 9 rose, ma le rette disegnate sono 8 e non 10. Dobbiamo trovare le due mancanti sfruttando le rose già piantate.
- Non è difficile: sono le rette IOF e GOE.
- Abbiamo finito.



6 – CONCLUSIONE

Non so se vi siete divertiti durante questa lunga, troppo lunga, relazione. Se non vi siete divertiti, il difetto è nel manico, cioè nel relatore e ne chiedo venia. Però credetemi: anche studiando matematica ci si può divertire. Altrimenti perché i matematici avrebbero inventato dei giochi? Non potremmo nel nostro insegnamento adottare il motto: "Giocando s'impara"? Forse non potremo essere sempre fedeli, ma sarebbe un modo per non prendere troppo sul serio la matematica, per non trasformarla in dramma, in sorgente di paura, in una realtà da cui cercare di liberarsi il più presto possibile.

BIBLIOGRAFIA

UMI (a cura di)(1973) *Le scienze matematiche. Raccolta di saggi*, Zanichelli, Bologna.

UMI (a cura di)(2005), *L'esplosione della matematica.*

B. Segre (1967), *La matematica nel progresso scientifico e culturale della Nazione*, Archimede, 19

M. Kline (1976), *La matematica nella cultura occidentale*. Feltrinelli, Milano 1976

W.H. Glenn – D.A. Johnson (1965), *Divertimenti matematici*, Zanichelli, Bologna

I. Ghersi (1986), *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano

G. Peano (1983), *Giochi di matematica e problemi interessanti*, Sansoni, Firenze

M. Cipolla (1983), *Matematica ricreativa*, in L. Berzolari (a cura di), Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, Vol. III, Parte 2°, Hoepli, Milano

M. Gardner (1980), *Enigmi e giochi matematici*, Vol. 1 – 5, Sansoni, Firenze

S. Baruk (1998), *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, Bologna

F. Enriques (a cura di) (1925-1936), *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Stock – Zanichelli, Roma – Bologna

A Frajese – L. Maccioni (a cura di) (1970), *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino

F. Acerbi (a cura di) (2007), *Euclide. Tutte le opere*. Testo Greco a fronte, Bompiani, Milano

G.H. Nesselmann (1843), Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul, Berlin

L. Giacardi – S.C. Roero (1979), *La matematica delle civiltà arcaiche,* Stampatori didattica, Torino

F. Cajori (1974), *A historyof mathematical notations*, The open Publ. Comp. La Salle, Illinois

A. Vellone (1994), *Simbolismo*, Periodico di Matematiche, N. 4, ottobre-dicembre

F. Speranza (1994), *Linguaggio e simbolismo in matematica*, in Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza, (a cura di B. Jannamorelli), Edizioni Qualevita. Torre dei Nolfi

UMI (a cura di) (2001), *Facciamo i conti con l'euro*

P.L. Ferrari (2004), *Matematica e linguaggio, Quadro teorico e idee per la didattica*, Pitagora, Bologna

P.L. Ferrari (2006), *Per una formazione linguistica che sostenga l'apprendimento matematico*, in Il convegno del ventennale (a cura di D'Amore e Sbaragli), Pitagora, Bologna

P.L. Ferrari (2006), *Il ruolo del linguaggio nell'apprendimento della matematica*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate (IMSI), Vol. 29 A-B, N.6

P.L. Ferrari (2007), *Le radici linguistiche delle difficoltà in matematica*, in Matematica e Difficoltà: i nodi dei linguaggi, (a cura di Imperiale, Piochi, Sandri) Pitagora, Bologna

C. Lavinio (2007), *Difficoltà linguistiche in matematica*, in Matematica e Difficoltà: i nodi dei linguaggi, (a cura di Imperiale, Piochi, Sandri) Pitagora, Bologna

M. Dodman (2007), *Competenze linguistico-comunicative nella costruzione del sapere matematico*, in Allievi, Insegnanti, Sapere: La sfida della didattica della matematica (a cura di D'Amore e Sbaragli), Pitagora, Bologna

R. Betti (1995), *Le più belle formule della matematica*, Lettera Pristem, 16

A. Driver – L. Orio (2007), *La formula più bella*, Progetto Alice, Vol. VIII, N.22

M. Ferrari (2002), *La regola dei segni e la sua storia*, IMSI, Vol. 25 B, N.4

E. Barbin (1994), *La dimostrazione in matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, IMSI, vol 17 B,N. 3

J. Adda (1988), *L'évolution de l'ensegneiment de la logique en France,* in Atti degli incontri di Logica Matematica, Vol. 5 (a cura di Barra e Zanardo), Siena

L. Benaglia (1997), *Una introduzione alla dimostrazione*, in Aspetti storici ed epistemologici nell'insegnamento della geometria: riflessioni e pratica didattica, Nucleo Ricerca Didattica CNR, Milano

P. Gario (2010), *Perché dimostrare ciò che è evidente*?, IMSI, Vol. 33 B, N.2

M. Ferrari (2003), *Matematica: sfida, impegno, gioia*, in La didattica della matematica in aula (a cura di D'Amore e Sbaragli), Pitagora, Bologna

M. Ferrari (1998), *Matematica e…gioco*, IMSI, Vol. 21 A-B, N. 6.