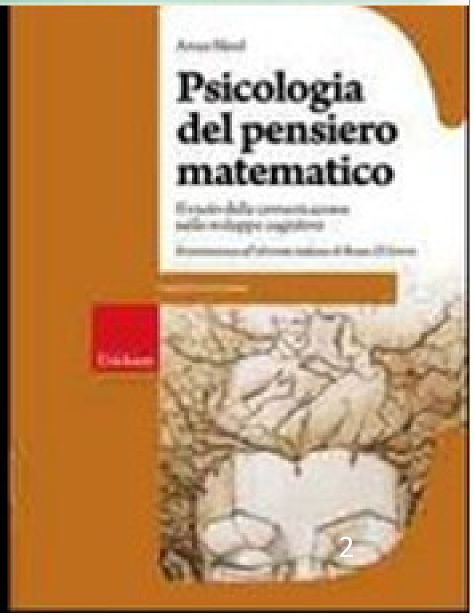
I linguaggi della matematica a scuola. Esperienze e riflessioni di un insegnante-ricercatore

Domingo Paola
Liceo Issel di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

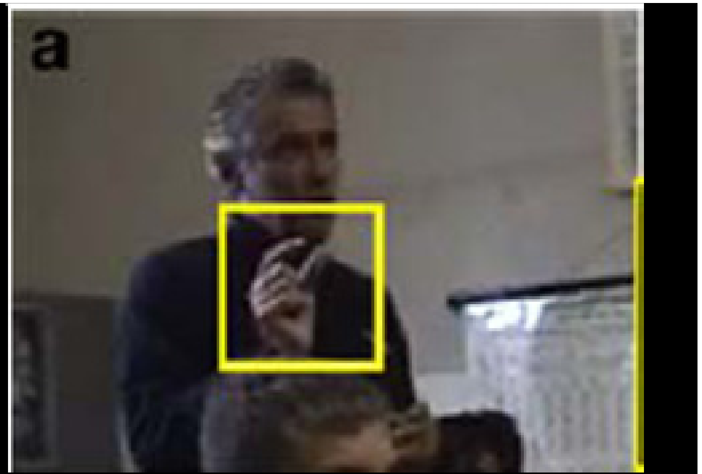
http://www.matematica.it/paola

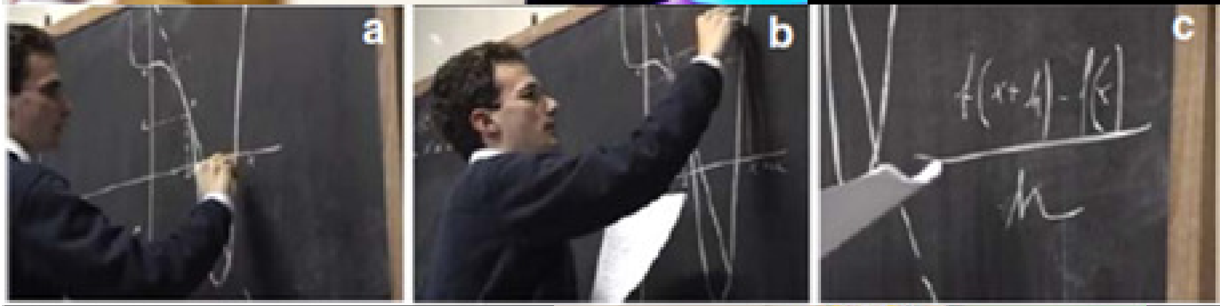
Paderno, Agosto 2011

"La matematica comincia dove finiscono gli oggetti tangibili della vita reale e dove inizia la riflessione sul nostro discorso a proposito di questi oggetti. In realtà il discorso matematico, specialmente quando è fissato in forma di testo scritto, può essere considerato una struttura a più livelli, in cui ogni livello può dare origine a un altro strato discorsivo e divenirne oggetto. La matematica emerge da questa descrizione come un discorso *autopoietico* – un sistema che comprende sia il discorso che i suoi oggetti e che cresce incessantemente dall'interno man mano che si aggiungono nuovi oggetti"



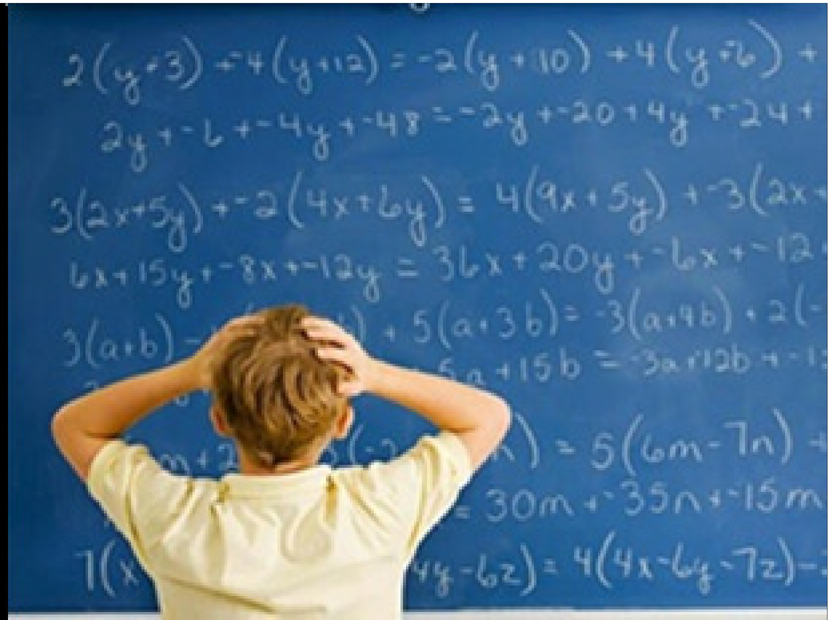

Prism Cylinder Pyramid Cone


a


a
b
c
f(x+h) - f(x)
h


ROBERT
DOISNEAU

Multimodalità della comunicazione umana
VS
la matematica dei manuali



L'atemporalità

la ricerca costante di precisione, concisione e rigore

L'uso sempre più spinto della scrittura simbolica

La somiglianza formale e strutturale a fronte di una profonda differenza sostanziale tra alcune funzioni specifiche del discorso matematico e alcune funzioni tipiche dei discorsi più familiari: argomentazione/dimostrazione

La natura astratta dei suoi oggetti

Date due grandezze variabili x (variabile indipendente) e y (variabile dipendente) diciamo che y è funzione di x

$$y = f(x)$$

se esiste una relazione che fa corrispondere a ogni valore di x uno e un solo valore di y.

Una funzione $y = f(x)$ si dice *matematica* se la relazione che lega le due variabili si può esprimere con una formula matematica.

La *retta* è il secondo ente fondamentale; possiamo immaginarla come un insieme consecutivo e infinito di punti allineati lungo la stessa direzione.

20 $\sqrt[3n]{(20+14\sqrt{2})^n}\cdot\sqrt[12]{(20-14\sqrt{2})^4}-2\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}.$ $[0]$

21 $[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-1)^2]:\dfrac{1}{2\sqrt{6}+1};\quad \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}:\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}.$ $[46;\ \sqrt{2}]$

22 $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^0.$ [Espressione priva di senso; perché?]

23 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{20}{9}}.$ $[0]$

24 $2\sqrt[3]{3}\left[\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}+4\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}-3\sqrt[3]{2}\right](1+\sqrt[3]{6}).$ $[6(1-\sqrt[3]{36})]$

25 $\sqrt{\left(3-\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{2}}\right):\dfrac{3-\sqrt{2}}{7-\sqrt{5}}}:\sqrt{\dfrac{11}{7}};\quad \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$ $[2;\ 2]$

26 $\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\sqrt{\dfrac{9}{5}}+\sqrt{5}\right)\sqrt{5}-\sqrt{19}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{19}+1).$ $[9]$

27 $\sqrt{\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{125}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)\sqrt[3]{3}+\sqrt{15}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{15}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right).$ $[7]$

28 $\dfrac{\sqrt{8\sqrt[n]{2}}:\sqrt[2n]{2^{5n-1}}\cdot\sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{2\sqrt{4^{n-1}}}};\quad \sqrt[n]{2\sqrt{2\sqrt[6]{8}+3\sqrt[4]{4}-\sqrt[10]{32}+6\sqrt[8]{16}}}:\sqrt[2n]{40}.$ $\left[\dfrac{1}{2};\ \sqrt[4n]{2}\right]$

29 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})^2-(2\sqrt{5}-\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})^2-2(\sqrt[6]{200}+2\sqrt[6]{500}).$ $[2(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}-9]$

Calcolare il valore delle seguenti espressioni letterali contenenti radicali in R_0^+:

somma superiore, relative alla funzione f e alla scomposizione σ. In modo formale:

Definizione 5.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata, σ la scomposizione finita di $[a, b]$ operata dai punti

$$x_0 := a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n := b;$$

le quantità

$$s(f; \sigma) := \sum_{k=1}^{n} e_k (x_k - x_{k-1}), \qquad S(f; \sigma) := \sum_{k=1}^{n} E_k (x_k - x_{k-1})$$

si chiamano rispettivamente somma inferiore e somma superiore relative alla funzione f e alla scomposizione σ. Le quantità e_k ed E_k sono gli estremi inferiore e superiore della restrizione di f all'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$.

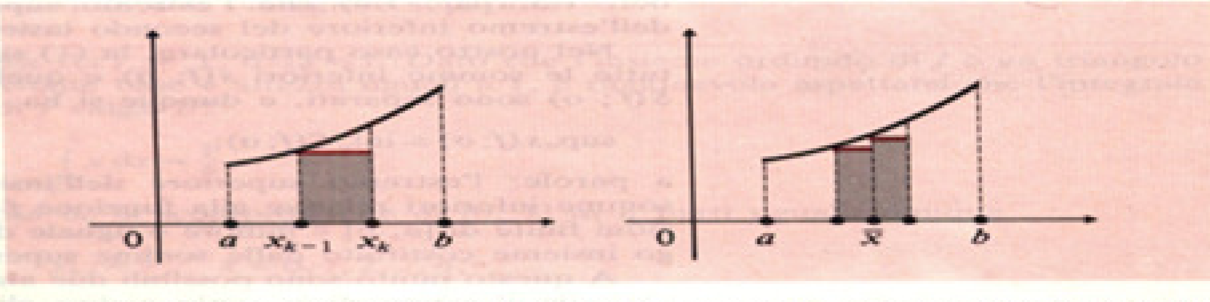
Dalla disuguaglianza $e_k \leq E_k$, valida per ogni k, segue

$$e_k (x_k - x_{k-1}) \leq E_k (x_k - x_{k-1})$$

e dunque $s(f; \sigma) \leq S(f; \sigma)$. È ragionevole supporre, anche se non è immediatamente evidente, che risulti $s(f; \sigma_1) \leq S(f; \sigma_2)$ per *ogni coppia* di scomposizioni σ_1 e σ_2 dell'intervallo $[a, b]$, anche diverse tra loro.

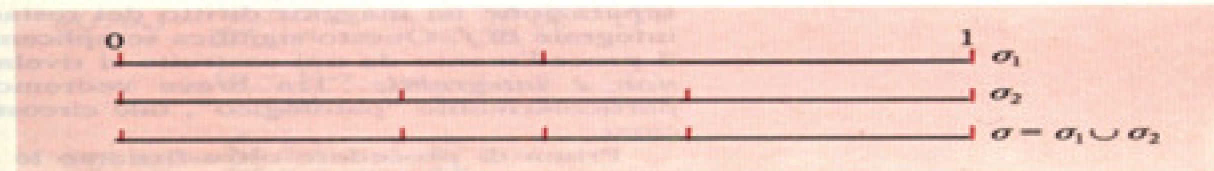
Per vedere meglio la situazione, chiediamoci cosa accade se si passa da un'assegnata scomposizione ad un'altra "più fine", cioè ottenuta dalla precedente aggiungendo uno o più punti di scomposizione. Se si esamina la figura 5.4, si riconosce subito che le somme inferiori aumentano (o comunque non diminuiscono), mentre l'opposto accade per le somme superiori.

inferiore aumenta
la scomposizione
llo $[a, b]$.



Se dunque σ_1 e σ_2 sono due arbitrarie scomposizioni dell'intervallo $[a, b]$, la scomposizione σ ottenuta mettendo insieme i punti di entrambe (cioè facendone l'unione), è più fine tanto di σ_1 quanto di σ_2. Ad esempio, se σ_1 è la scomposizione dell'intervallo $[0, 1]$ operata dai punti $\{0, 1/2, 1\}$ e σ_2 è operata dai punti $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$, σ sarà operata dai punti $\{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$.

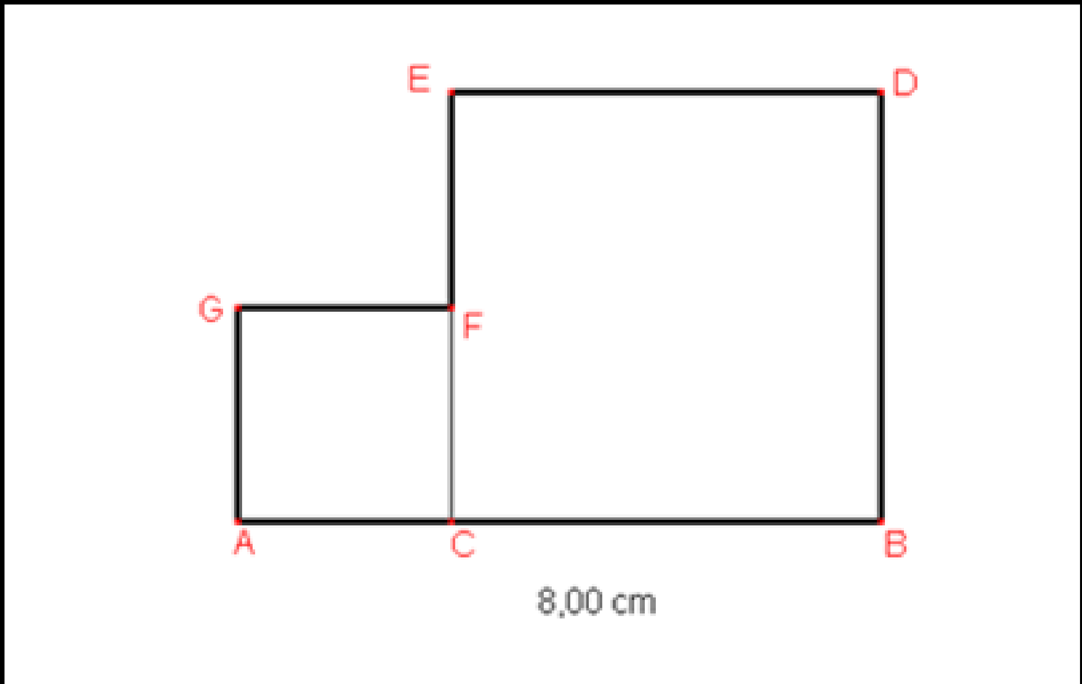
5
due scomposizioni
vallo $[0, 1]$.



L’apprendista si trova in una situazione paradossale che non può non essere oggetto di ricerca, analisi e attenzioni didattiche: per partecipare ai discorsi egli deve avere una certa dimestichezza con gli argomenti e, al tempo stesso, questa dimestichezza può maturare soltanto attraverso la partecipazione al discorso.

Un esempio di discorso informale in classe

Problema:
Dato un segmento AB di lunghezza fissata, prendete su di esso un punto C e costruite, su AC e CB, da una stessa parte rispetto al segmento AB, due quadrati di lati rispettivi AC e CB. Che cosa si può dire dell'area e del perimetro della figura formata dai due quadrati? Giustificate le risposte.



Modalità di lavoro

1. esplorazione mentale individuale sulla situazione problematica;
2. discussione in piccoli gruppi utilizzando, al più, carta e matita;
3. lavoro con un software di geometria dinamica;
4. sistemazione dei risultati ottenuti e giustificazione delle risposte.

Sulla variazione del perimetro

M.: "… Si toglie a un lato e si aggiunge all'altro e …."

G.: "Sei d'accordo che sia simmetrico?"

M.: " E sì, perché comunque si toglie quando scende si toglie un pezzo … si toglie da un lato e si aggiunge all'altro … quando si arriva dall'altra parte lo si aggiunge dall'altra … e lo si è tolto prima ancora dall'altro lato … Quindi si aggiunge e si toglie … non so come spiegare.

Sulla variazione dell'area

Insegnante: “ E questo ce lo aspettiamo, che le aree non cambiano linearmente? Per quale motivo?

A: “Perché comunque è quadratica”; G: “È Quadratica”; V: È quadratica … c’è una *x* al quadrato”; M.: “Ci si avvicina sempre più … c’è un minimo … ci si avvicina “

Insegnante: “Ci si avvicina ..”

M: “Pian piano che si va … che l’area diminuisce … ci si avvicina a un minimo che poi per un piccolissimo tratto rimane quasi costante e poi l’area aumenta di nuovo …

Alcune “opportunità” didattiche

Produrre molti esempi e controesempi

Usare diverse rappresentazioni per uno stesso oggetto con attività di conversione e di trattamento

Proporre attività didattiche che impegnino gli studenti in osservazioni ed esplorazioni che favoriscano la produzione di congetture e motivino alla loro validazione

Costruire ambienti di insegnamento – apprendimento particolarmente attenti alla didattica dell’argomentazione curando sia gli aspetti epistemici, sia quelli teleologici, sia quelli retorici

Avviare gradualmente alla formalizzazione come attività volta a condensare contenuti e non a favorirne l’evaporazione

L’avvio alla formalizzazione è fondamentale in matematica: si formalizza per liberarsi dal labirinto del concreto, per orientarsi con maggiore sicurezza e perizia nei vari problemi. Si pensi, per esempio, alla seguente questione:

è di più, il 50% di 17 euro o il 17% di 50 euro?

L'oggettificazione nei discorsi matematici

Come è possibile che studenti capaci di risolvere un problema in un determinato contesto non riescano ad affrontarlo quando tale problema viene decontestualizzato?"

"Risolvere lo *stesso* problema in situazioni diverse vuol dire essere capaci di vedere le due situazioni come se fossero, in un certo senso, le stesse […] La capacità di notare la *stessità* (o anche solo la somiglianza) è la sostanza dell'astrazione e la capacità di astrarre è considerata parte della facoltà umana di trasferire la conoscenza – di riciclare vecchie procedure per la risoluzione di problemi in situazioni nuove"

Capire che ¾, 0,75 e 75% sono la "stessa cosa" non è banale!

Questa difficoltà a rilevare analogie e somiglianze potrebbe essere alla base della difficoltà che incontriamo nel trasferire ad altri contesti concetti e procedimenti appresi in contesti specifici, ma anche della difficoltà di trasferire in contesti specifici procedimenti appresi in astratto.

"Secondo molti ricercatori, la gran mole di dati che evidenziano la forte dipendenza delle azioni umane dalle situazioni in cui esse hanno luogo sembra indebolire l'assunto alla base dei curricoli scolastici, secondo il quale i concetti e i procedimenti astratti, una volta appresi, saranno facilmente trasferiti a situazioni nuove ogni qualvolta se ne presenti la possibilità"

La capacità di riconoscere analogie e somiglianze è alla base del processo di *oggettificazione*, ossia di costruzione dei concetti, necessario per rendere il discorso più efficace ed efficiente per quel che concerne la comunicazione. Naturalmente c'è una grande differenza tra i concetti concreti, come quelli di sedia o cane, e quelli astratti, come numero o funzione. I concetti concreti si formano in seguito a esperienze con oggetti che esistono indipendentemente dalla comunicazione. I concetti astratti, invece, sono un prodotto della nostra consapevolezza di certe somiglianze in alcuni dei nostri atti comognitivi precedenti

Il processo di "oggettificazione" nel discorso matematico

Avviene mediante due azioni discorsive strettamente correlate:

1. la *reificazione*,
   che consiste nel sostituire un discorso sulle azioni con un discorso sugli oggetti, per esempio introducendo un sostantivo che possa condensare un insieme di processi e azioni. I numeri possono essere pensati come reificazioni dei procedimenti di conteggio (per esempio si ha reificazione quando si passa da "tre biglie e cinque biglie fanno otto biglie" a "tre più cinque uguale otto)

2. l'*alienazione*,
   che consiste nel presentare i fenomeni in modo impersonale, come se essi accadessero da sé, senza la partecipazione di esseri umani

I vantaggi dell'*oggettificazione* sono molteplici e, quindi, si tratta di un'attività importante per l'evoluzione della conoscenza matematica, anche perché aumenta l'efficacia comunicativa e pratica del discorso.

Per esempio è un vantaggio non indifferente considerare

$$2n - 1,\ 2n + 1 \text{ e } 2n + 3$$

come oggetti (tre numeri dispari consecutivi) e poi considerare

$$2n - 1 + 2n + 1 + 2n + 3$$

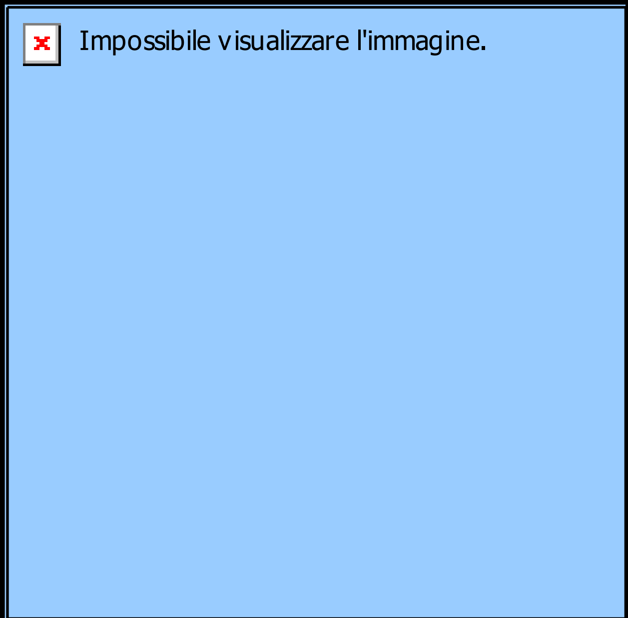
come un processo che porta all'oggetto

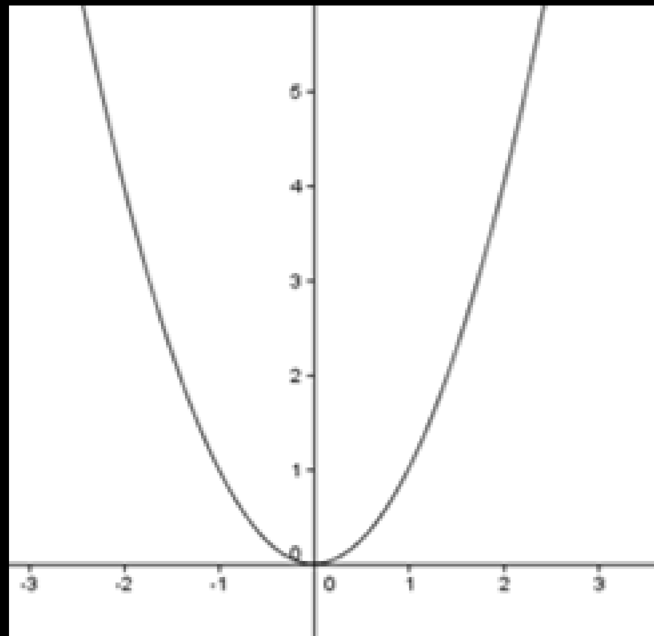
$$6n + 3 \text{ ossia all'oggetto } \ 3(2n + 1)$$

per dimostrare che la somma di tre numeri dispari consecutivi è un numero dispari multiplo di 3.

"Il discorso matematico maturo è il risultato di continui processi di oggettificazione a partire dalla reificazione e successiva alienazione di processi e azioni su oggetti via via più astratti. Si tratta quindi di un discorso particolarmente efficace ed efficiente per parlare di matematica, ma non per il principiante. Chi si aspetta che lo studente possa essere in grado di leggere e comprendere i discorsi sistemati dei manuali ha una visione della matematica di tipo platonico: in qualche modo deve immaginare che in un iperuranio ci siano i numeri e che lo studente possa e debba imparare a conoscerli. Probabilmente, invece è vero il contrario: lo studente si costruisce un senso numerico facendo pratica di discorsi intorno ai numeri; lo studente si inserisce in un ambiente in cui è già disponibile una teoria dei numeri, che è un prodotto culturale umano, non qualche entità esistente in un iperuranio".

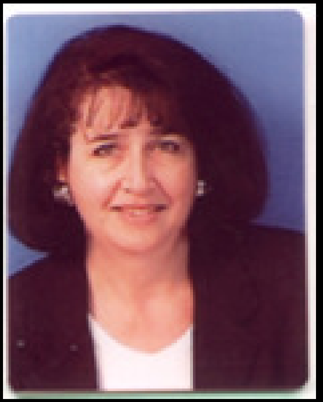
La reificazione porta a una riduzione di complessità del discorso e a una maggiore generalità, perché ciò che prima era visto come diverso, mediante la reificazione ora viene unificato.
Grazie alla reificazione, la tabella, la formula e il grafico seguenti possono essere considerate come tre differenti rappresentazioni della stessa funzione…





$$y = x^2$$

L'importanza dei rituali e dell'imitazione per l'evoluzione dei discorsi matematici



Caratteristiche principali del discorso matematico che guidano l'organizzazione della comunicazione in aula:

1. l'uso sistematico di parole che designano quantità e forme e che sono il risultato dell'oggettificazione;

2. l'uso di mediatori visivi, come grafici e artefatti simbolici creati specificamente per la comunicazione matematica;

3. la scelta di organizzare il sapere matematico colto in *teorie*, ossia in narrazioni che parlano soprattutto di relazioni tra oggetti

4. il ricorso sistematico a *routine*, ossia a modelli ripetitivi caratteristici di un certo discorso.

Discorsi matematici dei principanti :
pochi segni di oggettificazione;
poca flessibilità nel passare da un registro di rappresentazione a un altro;
tendenza a esprimersi in prima persona e in termini di azioni e processi;
frequenti segni di routine e rituali.

Discorsi matematici colti:
forte flessibilità nell’uso di registri di rappresentazione diversi e nel passaggio dall’uno all’altro;
tendenza all’uso impersonale (che è conseguenza dell’alienazione) e all’uso strutturato del discorso (che è conseguenza della reificazione).

Il passaggio da un discorso tipico dei principianti a un discorso da esperti è un processo lungo e non lineare ed è caratterizzato essenzialmente da quattro momenti:

1. uso passivo della parola, che si ha quando il principiante non utilizza ancora la parola nel discorso, ma, se la sente pronunciare da altri, è in grado di mettere in opera certe reazioni routinarie

2. uso guidato dalla routine, che avviene quando i principianti iniziano a usare la parola, ma solo all'interno di discorsi particolari quando eseguono particolari routine.

3. uso guidato dalla frase, in cui si usa la parola all'interno di intere frasi ed è il significato dell'intera frase che guida l'uso della parola.

4. uso guidato dall'oggetto in cui l'ex principiante, ormai esperto utilizza la parola in modo appropriato in differenti contesti, guidato dall'oggetto che quella parola significa.

Le routine hanno una grande importanza nei processi di oggettificazione e, quindi, nel passaggio dai discorsi dei principianti ai discorsi matematici colti.

"per molti bambini alcune routine matematiche […] nascono […] come *rituali*, cioè come sequenze di azioni discorsive il cui obiettivo primario non è la produzione di una narrazione approvata o di un cambiamento negli oggetti, ma la creazione e il mantenimento di un legame con altre persone […] L'esecuzione di una routine è un modo per ottenere l'attenzione e l'approvazione altrui ed entrare a far parte di un gruppo sociale"

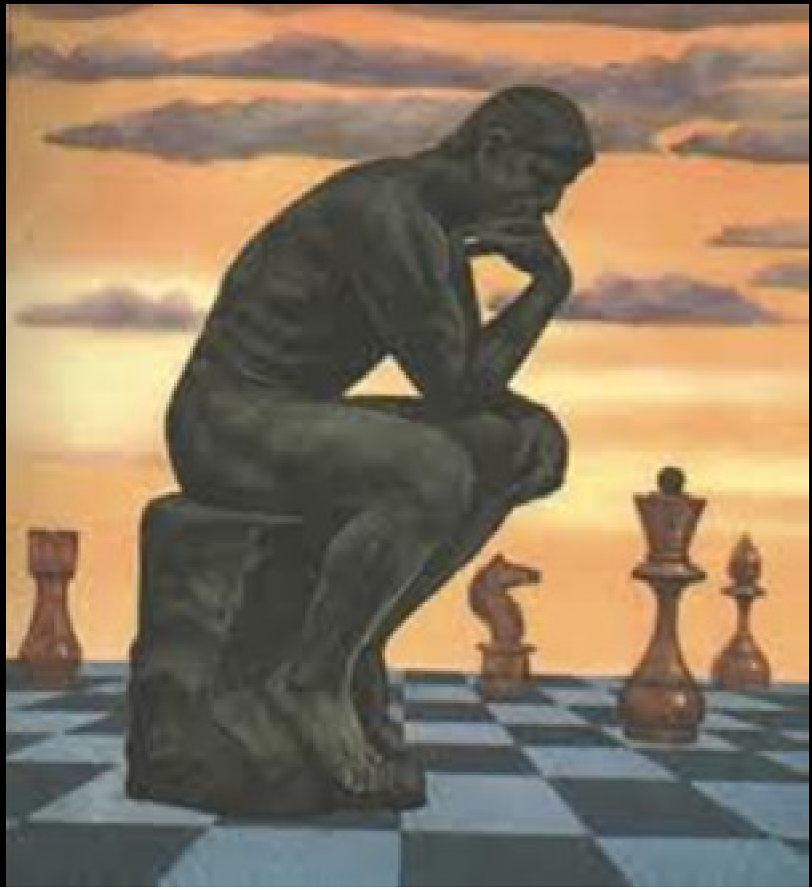
“Ma come fa il bambino, che ancora non ha un’idea chiara di quando la routine possa essere implementata o del motivo per cui funzioni, a collaborare alle sue implementazioni collettive e a essere, alla fine, perfino capace di implementarla in modo autonomo?”

“La risposta, a quanto pare, sta nella propensione infantile all’imitazione. L’imitazione, che evidentemente è una facoltà umana naturale, è il modo ovvio per introdursi in un nuovo discorso e forse l’unico immaginabile. La tendenza di imitare gli altri va di pari passo con il bisogno di comunicare”

L'importanza delle metafore

Come è possibile acquisire conoscenza di qualche cosa che non conosciamo ancora?

Come può, l'esperienza, trasformarsi in nuova conoscenza?



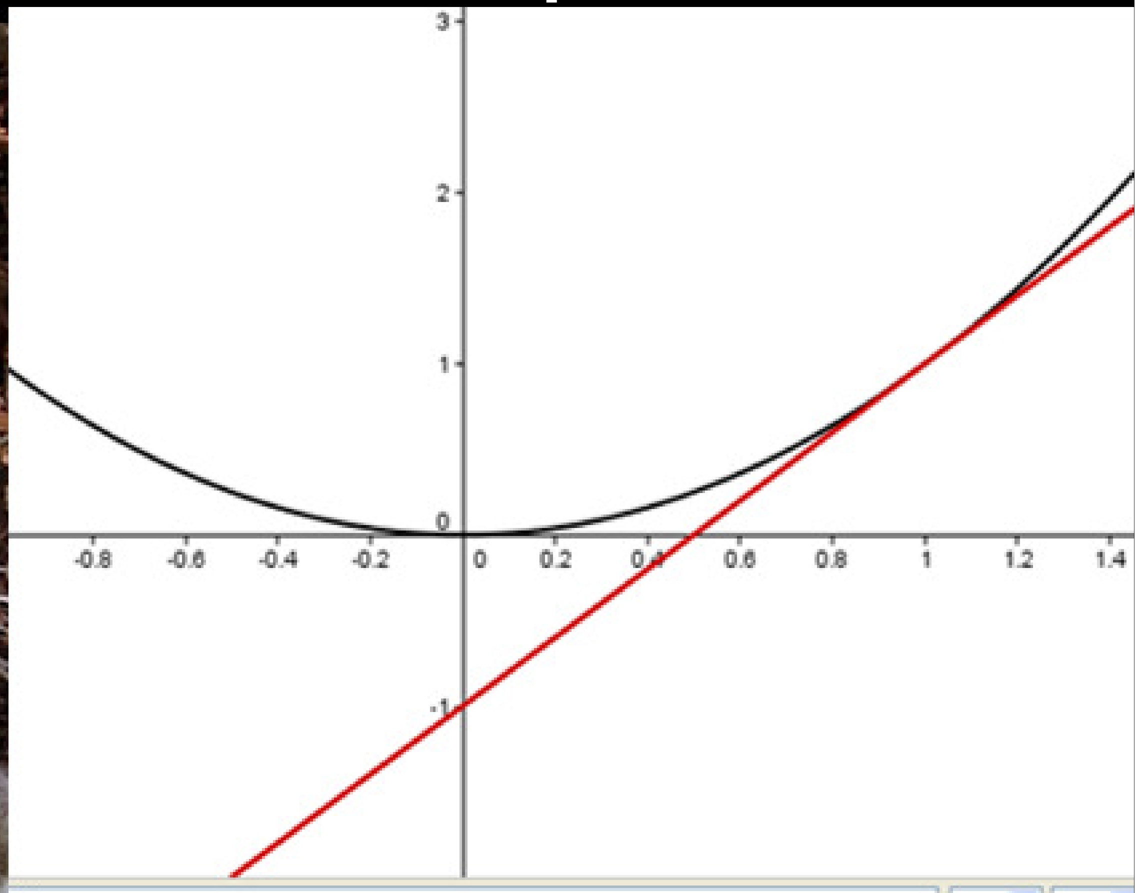
I recenti lavori sulle metafore, viste come agenti del cambiamento discorsivo, hanno contribuito a dare alcune possibili risposte ai precedenti quesiti.

“Le metafore sono un’arma a doppio taglio: da un lato, in quanto meccanismo fondamentale alla base di ogni concettualizzazione, esse sono ciò che rende possibile il nostro discorso di ricerca; dall’altro esse mantengono l’immaginazione umana entro i confini delle nostre esperienze e concezioni precedenti e, se non sono operazionalizzate, possono portare i diversi interlocutori a utilizzare in modo differente le stesse parole”

Un esempio

La tangenza fra una retta e una curva può fondarsi su due metafore:

a) la retta e la curva si <u>toccano</u> in un punto …



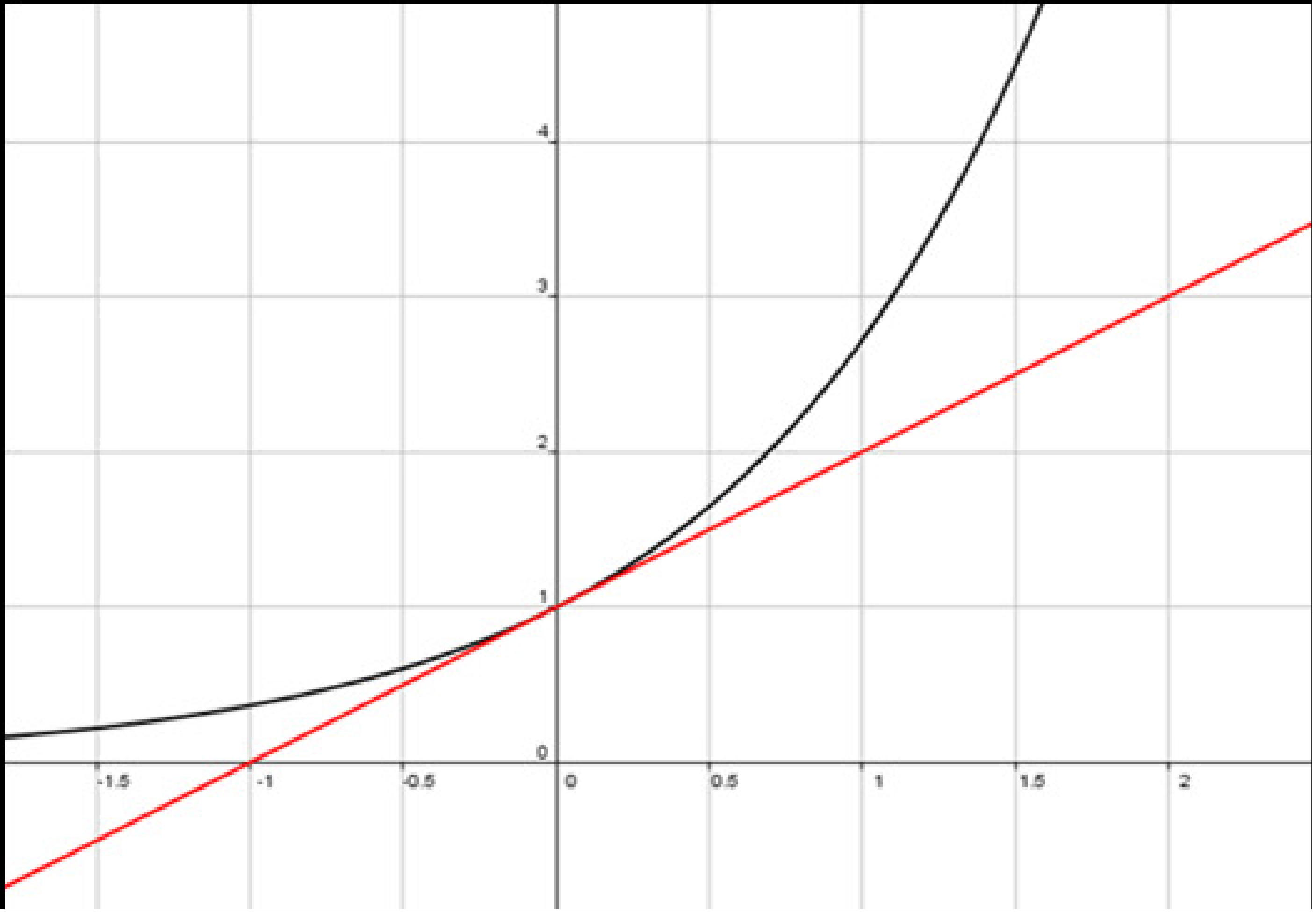
Quali differenze?

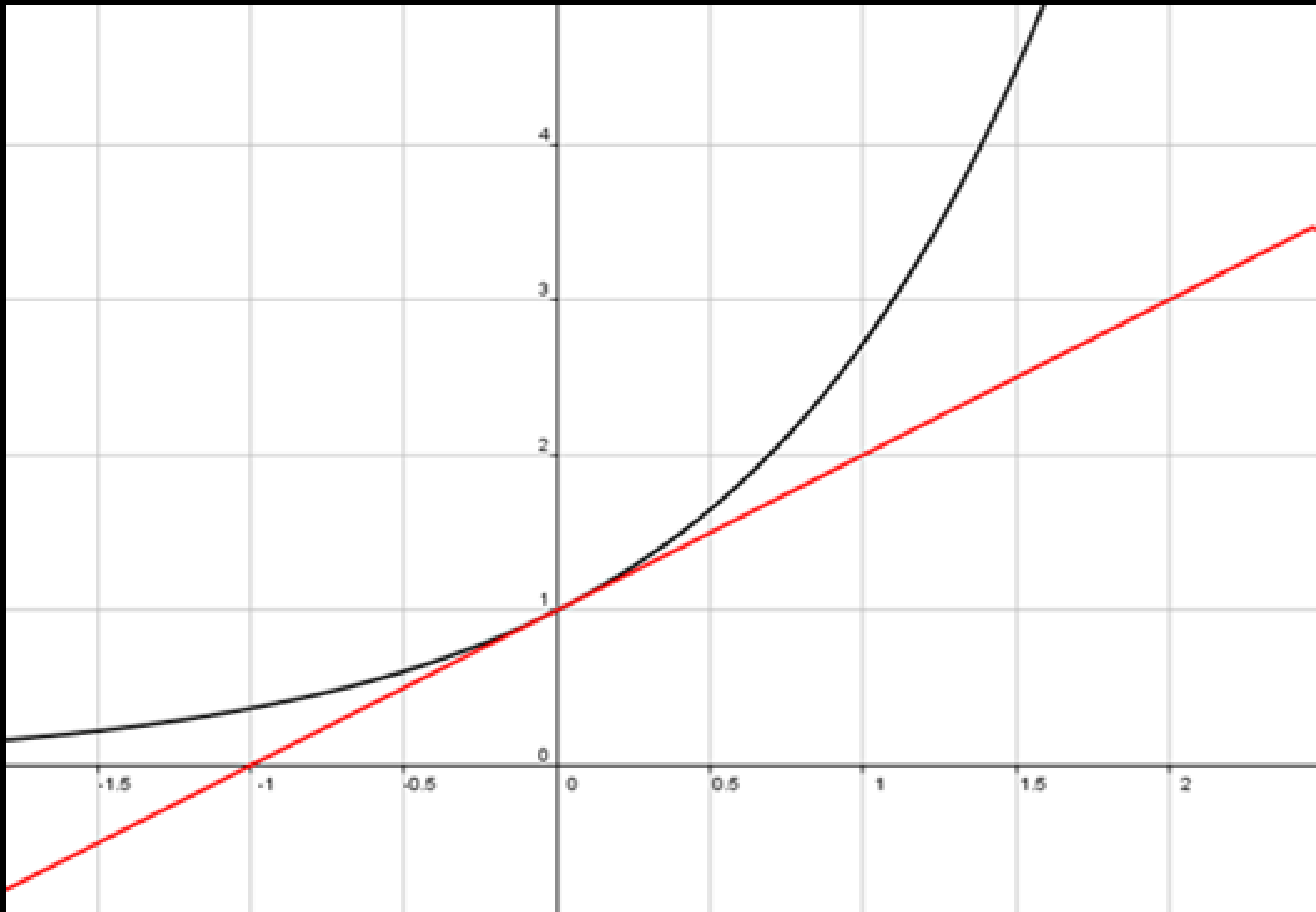
Un esempio

La tangenza fra una retta e una curva può fondarsi su due metafore:

a)La retta e la curva si <u>toccano</u> in un punto …

b)Si toccano in … due punti … <u>coincidenti</u>

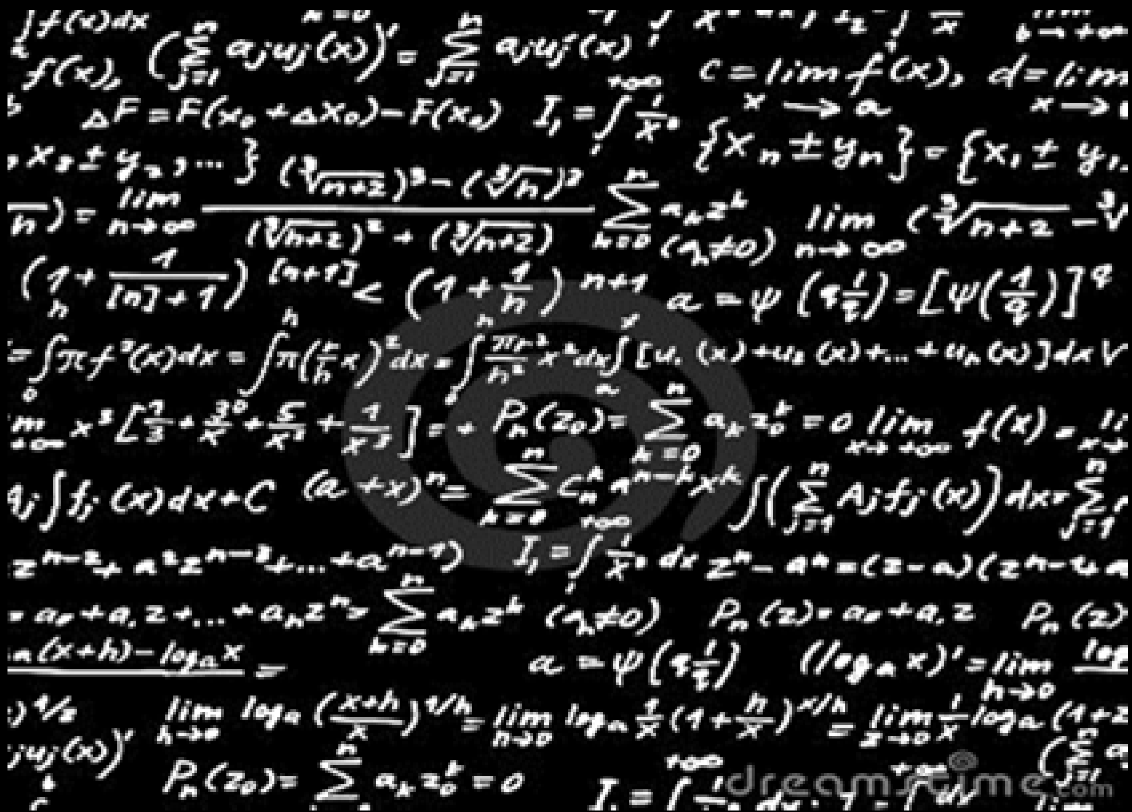



4
3
2
1
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Il caso dell’algebra

Essere capaci di vedere una stessa espressione sia come processo, sia come prodotto

Essere capaci di gestire la tensione fra la trasparenza di un simbolo e la sua capacità di essere manipolato.



Un esempio
Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?

Verifiche empiriche

Indicare un numero dispari con d.

1) $d + d = 2d$ numero pari (ma manca la razionalità epistemica)

2) $d + (d + 2)$ numero pari (c'è la razionalità epistemica, ma non c'è quella teleologica)

$2n + 1 + d$ consec $= 2n + 1 + 2n + 1 + 2$ numero pari (c'è la razionalità epistemica e forse anche quella teleologica, ma non quella retorica)

$2n - 1 + 2n + 1 = 4n$ oppure

$2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4$ oppure

"è il doppio del numero pari che sta in mezzo" (c'è la razionalità epistemica, teleologica e retorica)

Indicazioni didattiche

Cercare di equilibrare la richiesta di trasformazioni sintattiche di espressioni algebriche, tipica della prassi didattica, con la richiesta di produzione di espressioni e loro successiva interpretazione.

Equilibrare la direzione flessibile e orientata a uno scopo (per esempio per dimostrare, oppure per modellizare o per risolvere problemi) con la semplificazione meccanica di espressioni.

Si noti che la scrittura $d + (d + 2)$ è quella più trasparente per gli studenti, ma meno manipolabile: ecco un esempio specifico di quella tensione fra la trasparenza di un simbolo e la sua capacità di essere manipolato.

Alcune importanti competenze in algebra

Essere capaci di vedere una stessa espressione sia come processo, sia come prodotto

Essere capaci di gestire la tensione fra la trasparenza di un simbolo e la sua capacità di essere manipolato.

Essere in grado di gestire la dialettica tra i diversi *sensi* di espressioni che hanno lo stesso *significato*, per esempio, le due espressioni:

$$n^2 + n \qquad \text{e} \qquad n(n+1)$$

Operare sull'incognita, come fosse un oggetto noto

La visualizzazione

Come si riconosce che una figura è un rombo?

L'insegnante si aspetta che lo studente ricorra alla definizione di rombo. Tale tipo di identificazione è mediato discorsivamente, perché fa ricorso a una definizione.

Gli studenti, invece, spesso riconoscono gli oggetti, per esempio una figura geometrica, non facendo ricorso a una definizione, ma basandosi su stereotipi o, meglio su prototipi, riconosciuti direttamente e globalmente, come avviene per esempio, per i volti.

"L'identificazione mediata dal discorso richiede un profondo cambiamento di prospettiva: si tratta di passare da una formulazione del tipo *questo è un rombo*, che è tipicamente un enunciato che esprime una verità su un oggetto di un mondo, a formulazioni (più o meno esplicite) del tipo *questa forma può essere chiamata rombo* che è un'affermazione su un oggetto di un discorso e non su un oggetto di un mondo. La difficoltà della transizione dalle narrazioni determinate dal mondo stesso al discorso sul discorso è stata corroborata sia sul piano teorico che su quello empirico: la ricerca ha dimostrato che questo cambiamento avviene invariabilmente in modo lento" .

La mediazione visiva è essenziale nel discorso matematico

Per esempio, è probabile che anche molti insegnanti e non solo gli studenti, una volta rappresentate le frazioni 2/3 e 5/13 con le coppie (2,3) e (5,13), siano indotti a tornare alla consueta scrittura non lineare per eseguire l'addizione (2,3)+(5,13)

"attraverso anni di esercizio la sequenza dei movimenti oculari da eseguire su questo simbolo verticale canonico è diventata la vostra seconda natura e a/b è diventato la vostra realizzazione principale delle frazioni semplici"

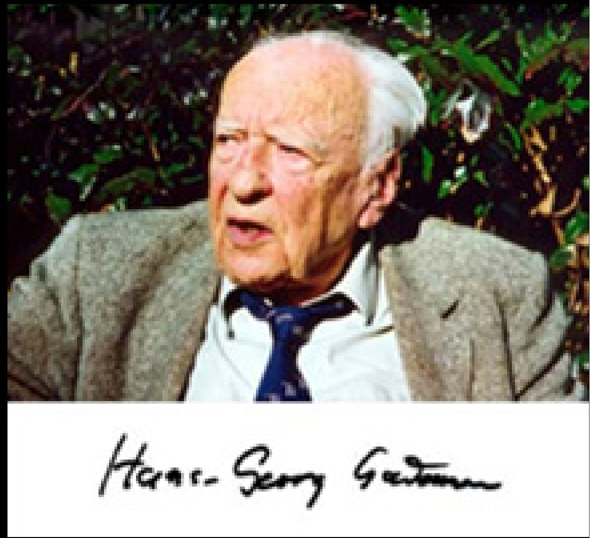
Un ulteriore esempio a sostegno di quanto affermato …

Tino Scotti ne “Il conto”

Basta la parola?

Conclusioni

“ Un aspetto caratteristico di ogni vera conversazione è che ognuno si apre all’altra persona, accetta veramente il suo punto di vista come degno di considerazione ed entra in lui tanto da comprendere non un particolare individuo, ma ciò che egli dice”.



“Nell’accordo di apprendimento-insegnamento c’è anche un’importante dimensione etica. Se è autentico e solido, promuove valori come il rispetto per gli altri e l’apertura alla differenza […]. Il suo valore va ben al di là del suo contributo ai processi ai apprendimento di un particolare discorso”

“L’educazione in generale e la comunicazione in particolare sono mezzi per apprendere e condividere un mondo culturale formato storicamente, un mondo nel quale la diversità e la differenza sono viste non come mancanza o insufficienza, ma come le qualità fondamentali e vincenti dell’esistenza umana […] La matematica può giocare un ruolo primario nei progetti educativi del Secolo XXI se si promuove un’aula come comunità di apprendimento dove gli allievi lavorano in modo critico e riflessivo verso il compimento di una forma comunitaria possibile di vita”.


Grazie