I linguaggi della matematica a scuola. Seminario per le elementari

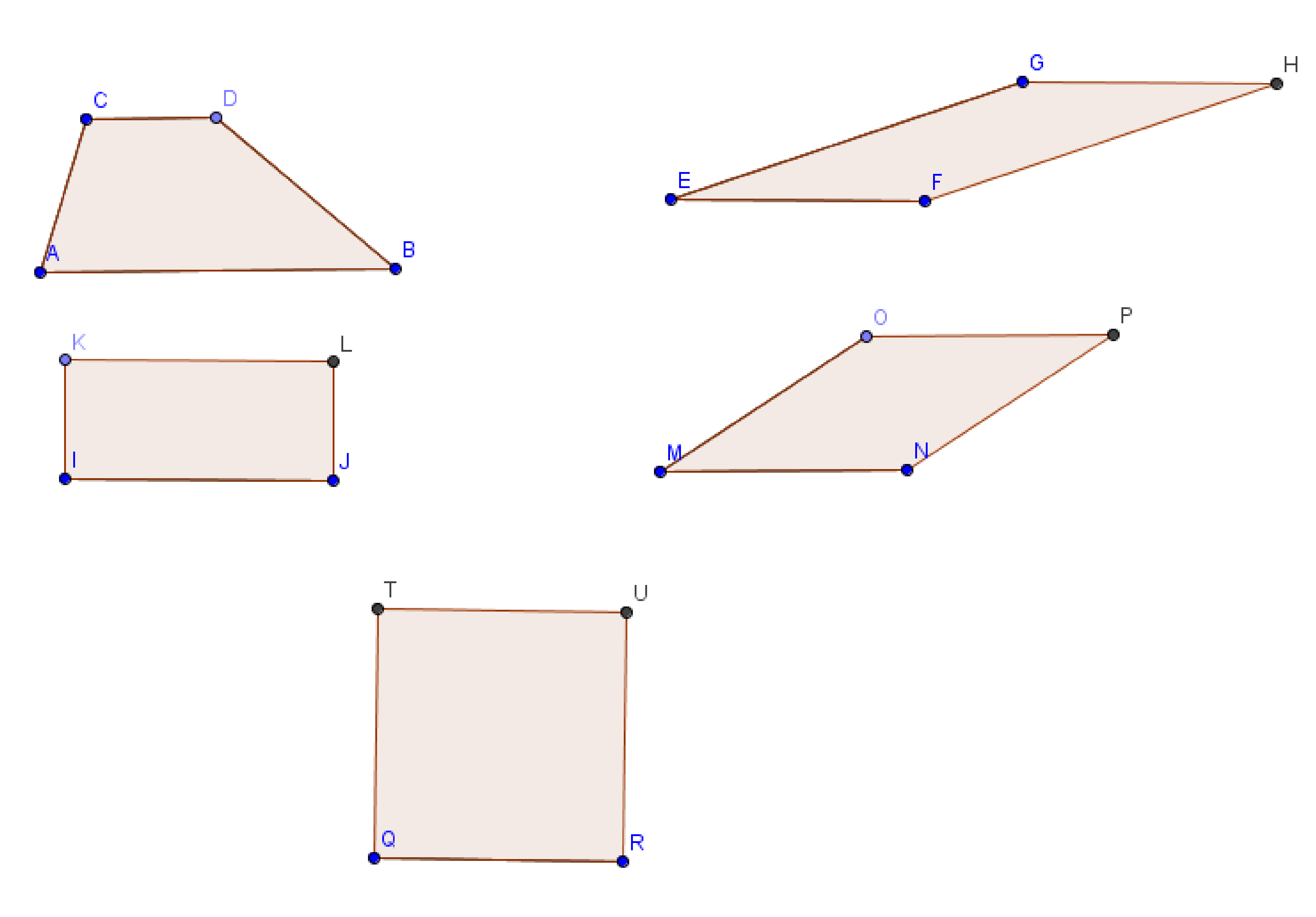
Domingo Paola
Liceo Issel di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

http://www.matematica.it/paola

Paderno, Agosto 2011

La capacità di riconoscere analogie e somiglianze è alla base del processo di *oggettificazione*, ossia di costruzione dei concetti, necessario per rendere il discorso più efficace ed efficiente per quel che concerne la comunicazione. Naturalmente c'è una grande differenza tra i concetti concreti, come quelli di sedia o cane, e quelli astratti, come numero o funzione. I concetti concreti si formano in seguito a esperienze con oggetti che esistono indipendentemente dalla comunicazione. I concetti astratti, invece, sono un prodotto della nostra consapevolezza di certe somiglianze in alcuni dei nostri atti comognitivi precedenti

Un esempio: definizioni dei quadrilateri



"L'identificazione mediata dal discorso richiede un profondo cambiamento di prospettiva: si tratta di passare da una formulazione del tipo *questo è un rombo*, che è tipicamente un enunciato che esprime una verità su un oggetto di un mondo, a formulazioni (più o meno esplicite) del tipo *questa forma può essere chiamata rombo* che è un'affermazione su un oggetto di un discorso e non su un oggetto di un mondo. La difficoltà della transizione dalle narrazioni determinate dal mondo stesso al discorso sul discorso è stata corroborata sia sul piano teorico che su quello empirico: la ricerca ha dimostrato che questo cambiamento avviene invariabilmente in modo lento" .

L’avvio alla formalizzazione è fondamentale in matematica: si formalizza per liberarsi dal labirinto del concreto, per orientarsi con maggiore sicurezza e perizia nei vari problemi. Si pensi, per esempio, alla seguente questione:

è di più, il 50% di 17 euro o il 17% di 50 euro?

Ma è sempre così?
Il registro simbolico è sempre d’aiuto?

Un primo esempio: passeggiate su un reticolo

Si dice *percorso* l'insieme di tutti i numeri compresi fra 1 e 25 in cui si può *passeggiare* da un numero all'altro usando composizioni delle funzioni seguenti:

$S(x) = x+5, \quad x \leq 20$
$N(x) = x - 5, \quad x > 5$
$E(x) = x+1, \; x \neq 5n, \; n \in N$
$O(x) = x - 1, \; x \neq 5n+1, \; n \in N$

Per esempio, la passeggiata $S(O^3(S^2(5)))$ porta da 5 a …

$5 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 17$

Trovare una passeggiata che porti da 11 a 3
Trovare tutti i numeri a cui è possibile arrivare passeggiando partendo da 9 senza usare le funzioni N o E

Un primo esempio: passeggiate su un reticolo

Il *percorso* è lo schema a fianco presentato. Una *passeggiata* all'interno del percorso è una funzione composta di N, E, S, O, mentre N(x), E(x), S(x) e O(x) sono, rispettivamente, le caselle a nord, est, sud e ovest di x.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Trovare una passeggiata che porti da 11 a 3
Trovare tutti i numeri a cui è possibile arrivare passeggiando partendo da 9 senza usare le funzioni N o E

Un secondo esempio

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, del prodotto di tre numeri naturali consecutivi?

Un terzo esempio

Si consideri un rettangolo; che cosa capita alla sua area se un lato diminuisce del 10% e l'altro aumenta del 10%?

È solo con il ricorso al linguaggio algebrico che la situazione può essere interpretata in forma chiara e incontrovertibile: se il rettangolo di partenza ha lati di lunghezza *a* e *b*, l'area del secondo rettangolo vale $1{,}1a \cdot 0{,}9b = 0{,}99ab$ cioè l'area diminuisce dell'1%.

“Le metafore sono un’arma a doppio taglio: da un lato, in quanto meccanismo fondamentale alla base di ogni concettualizzazione, esse sono ciò che rende possibile il nostro discorso di ricerca; dall’altro esse mantengono l’immaginazione umana entro i confini delle nostre esperienze e concezioni precedenti e, se non sono operazionalizzate, possono portare i diversi interlocutori a utilizzare in modo differente le stesse parole”

Un esempio: qual è l'insieme più grande?
Contare insiemi infiniti

Intervistatore	Dato l'insieme di tutti i numeri pari e l'insieme di tutti i numeri dispari, qual è l'insieme più grande?
Studentessa	I pari.
Intervistatore	I pari è più grande? (*si noti che l'insegnante usa la forma singolare anche se il soggetto della frase è plurale*)
Studentessa	Perché … uno … uno e … uno è dispari e due è pari. È così.

La studentessa sembra affermare che per ogni numero dispari, esiste un numero pari a esso successivo che quindi è maggiore e sembra tradurre questa relazione agli insiemi dei numeri dispari e dei numeri pari. La studentessa non confronta i due insiemi, ma i singoli elementi … ma che cosa vuol dire confrontare due insiemi? E due insiemi infiniti?

Il secondo esempio: aggiungi 1 ...

Situazione

Ciascuno di voi consideri otto numeri naturali (potete scegliere quelli che volete; quindi ci aspettiamo che tali numeri non siano gli stessi per tutti gli studenti della classe!).

Chiamate A l'insieme che ha per elementi questi otto numeri che avete scelto. Ora formate un secondo insieme B di numeri aggiungendo 1 a ciascuno dei numeri dell'insieme A.

Problema

Come cambiano, in seguito a questa operazione, le proprietà di ciascuno dei numeri dell'insieme A? Giustificate le vostre risposte.

Indicazioni di lavoro

Lavorate individualmente per cinque minuti e poi in piccoli gruppi confrontando e discutendo le vostre affermazioni per circa una decina di minuti. In seguito dicuteremo tutti insieme le vostre congetture, ossia quello che avrete scoperto e che ritenete sia vero.

Alcune possibili risposte

Aumentano di 1; si passa al successivo …

i pari diventano dispari …

Che succede a un numero primo?

Che relazione tra i divisori di ciascun numero dell'insieme A e i divisori del corrispondente numero dell'insieme B?

Siamo pronti a capire la dimostrazione sull'infinità dei numeri primi

Obiettivo principale è quello di costruire un ambiente favorevole allo sviluppo di una “cultura dell’argomentazione” in modo da favorire:

a) la riflessione sulle proprie conoscenze;

b) il passaggio da una conoscenza tacita, implicita a una esplicita, consapevole;

c) un diverso atteggiamento verso la matematica, che la proponga come disciplina di forte unità culturale;

d) l’avvio al sapere teorico come strumento per rispondere alle domande “perché è così?” e “che cosa succederebbe se …?”

Trattamento e conversione: dove le maggiori difficoltà?

Un esempio (da B. D'amore) la permanenza del senso

Siamo in quinta primaria e l'insegnante ha svolto una lezione in situazione a-didattica sui primi elementi della probabilità, facendo costruire agli allievi, almeno tramite qualche esempio, l'idea di "evento" e di "probabilità di un evento semplice". Come esempio, l'insegnante ha fatto utilizzare un normale dado a sei facce, studiando le uscite casuali da un punto di vista statistico. Ne emerge una probabilità frequentista che, però, viene interpretata in senso classico. A questo punto propone il seguente esercizio:

Calcolare la probabilità del seguente evento: uscita di un numero pari nel lancio di un dado.

Un esempio (da B. D'amore) la permanenza del senso

Gli allievi, discutendo in gruppo, guidati dall'insegnante, giungono a decidere che la risposta è espressa dalla frazione 3/6 perché «le uscite possibili nel lancio sono 6 (al denominatore) mentre le uscite che rendono vero l'evento sono 3 (al numeratore)». Dopo aver istituzionalizzato la costruzione di questa conoscenza, soddisfatto dell'esperienza efficace, contando sul fatto che questo risultato è stato ottenuto piuttosto rapidamente e sul fatto che gli allievi hanno dimostrato grande abilità nel maneggiare le frazioni, il maestro propone che, valendo l'equivalenza fra 3/6 e 50/100 si possa esprimere quella probabilità anche con la scrittura 50%, che è molto espressiva: significa che si ha la metà delle probabilità di verifica di quell'evento rispetto alla generalità degli eventi possibili presa come 100. Qualcuno nota che «allora va bene anche [la frazione] 1/2»; la proposta viene validata attraverso le dichiarazioni del proponente, rapidamente è ben accolta da tutti e, ancora una volta, istituzionalizzata dall'insegnante.

Un esempio (da B. D'amore) la permanenza del senso

Se si analizzano le rappresentazioni semiotiche differenti che sono emerse in questa attività, relative allo stesso evento: “uscita di un numero pari nel lancio di un dado”, troviamo almeno le seguenti:

· registro semiotico lingua naturale: probabilità dell’uscita di un numero pari nel lancio di un dado;

· registro semiotico linguaggio delle frazioni: 3/6; 50/100; 1/2;

· registro semiotico linguaggio delle percentuali: 50%.

Un esempio (da B. D'amore) la permanenza del senso

Ciascuna delle precedenti rappresentazioni semiotiche è il significante a valle di uno stesso significato *a monte* (Duval). Il “senso” a proposito di quel che si andava costruendo era sempre presente e dunque la pratica matematica effettuata ha portato a trasformazioni semiotiche (di conversione, nel passaggio dalla lingua naturale alle frazioni e poi alle percentuali, e trattamento, nel passaggio da una frazione ad altre a essa equivalenti) i cui risultati finali sono stati facilmente accettati.

Le conoscenze relative all'uso della lingua naturale, degli eventi, delle frazioni e delle percentuali interagiscono in modo costruttivo mettendo in evidenza una buona unità culturale degli studenti.

Un esempio (da B. D'amore): la perdita di senso

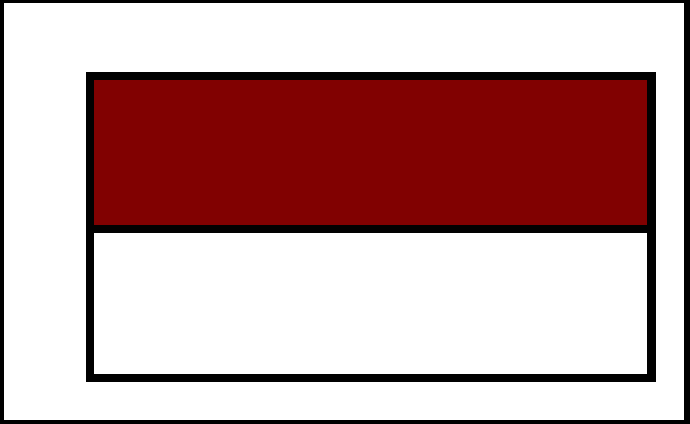
Terminata la sessione, si propone agli allievi la frazione 4/8 e si chiede se, essendo equivalente a 3/6, anche questa frazione rappresenta l'evento esplorato poc'anzi. *La risposta unanime e convinta è negativa*. Lo stesso maestro, che prima aveva condotto con sicurezza la regìa della situazione, afferma che « 4/8 *non può* rappresentare quell'evento perché le facce di un dado sono 6 e non 8». All'insistenza del ricercatore nel sapere il suo pensiero al riguardo, l'insegnante dichiara che «Esistono non solo dadi a 6 facce, ma anche dadi a 8 facce; in quel caso, sì, la frazione 4/8 rappresenta l'uscita di un numero pari nel lancio di un dado».

In questo caso il cambiamento di rappresentazione (un trattamento nel registro delle frazioni) ha causato una perdita di senso e significato: la rappresentazione 4/8 sembra non essere adeguata a rappresentare la probabilità dell'evento.

Un esempio (da B. D'amore): la perdita di senso

La perdita di senso è ancora maggiore utilizzando la frazione 7/14, mentre è minore se si utilizza una conversione passando da 3/6 a 0,5.

Sarebbe interessante vedere che cosa accade per conversioni del tipo (i bambini che sanno dimezzare oggetti non sempre sanno dimezzare i numeri!) :



Evoluzione dei discorsi degli studenti verso livelli di maggiore concettualizzazione
Un esempio (Radford)

Ad alcuni bambini dei primi due anni di scuola primaria è stato chiesto di prendere in considerazione, in un contesto narrativo appropriato all'età degli studenti, la successione 8, 10, 12, 14, … e di dire se 27 faceva parte oppure no della successione.

La risposta dei bambini è corretta: essi sono in grado da soli, senza alcun aiuto da parte dell'insegnante, di capire e di dire che 27 non fa parte della successione, in genere grazie a operazioni di conta più o meno esplicite.

Evoluzione dei discorsi degli studenti verso livelli di maggiore concettualizzazione
Un esempio (Radford)

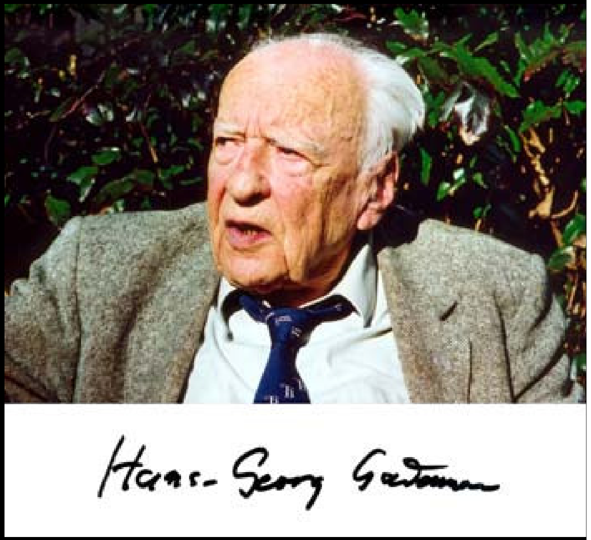
In nessun caso, però i bambini sono in grado di spiegare con argomenti espliciti, consapevoli, che 27 non fa parte della successione. Affinché ciò avvenga è necessario l'aiuto dell'insegnante in zona di sviluppo prossimale, che fa notare come nell'operazione di conta i bambini arrivino a 26 e poi, per come è strutturata la successione debbano passare a 28, saltando il 27 e debbano poi proseguire con numeri sempre maggiori. Un'altra osservazione dell'insegnante, sempre in zona di sviluppo prossimale, è sulla parità dei numeri: tutti i numeri della successione sono pari (la regola è "parti da 8 e aggiungi 2"), mentre 27 è dispari. Quindi 27 non può far parte della successione.

Evoluzione dei discorsi degli studenti verso livelli di maggiore concettualizzazione
Un esempio (Radford)

"Con l'aiuto dell'insegnante [i bambini] sono arrivati a fornire una prova diretta (*la successione contiene …, 22, 24, 26, 28: quindi non contiene 27*) e una più generale fondata sulla parità dei numeri. Si vede così che un'argomentazione più sottile consente l'accesso a un livello di concettualizzazione superiore […]. L'apprendimento è avvenuto attraverso la presa di coscienza che la successione numerica 8, 10, 12, 14, 16 … non è più solo costituita da un aggregato di elementi, ma che i suoi elementi costituiscono un sistema governato da proprietà matematiche precise. La comunicazione è dunque importante in aula, non perché la matematica è un'attività discorsiva, ma perché la comunicazione è un mezzo per trasformare oggetti culturali in oggetti di coscienza e perché imparare equivale ad appropriarsi di questi oggetti".

Conclusioni

" Un aspetto caratteristico di ogni vera conversazione è che ognuno si apre all'altra persona, accetta veramente il suo punto di vista come degno di considerazione ed entra in lui tanto da comprendere non un particolare individuo, ma ciò che egli dice".



"Nell'accordo di apprendimento-insegnamento c'è anche un'importante dimensione etica. Se è autentico e solido, promuove valori come il rispetto per gli altri e l'apertura alla differenza […]. Il suo valore va ben al di là del suo contributo ai processi ai apprendimento di un particolare discorso"

“L’educazione in generale e la comunicazione in particolare sono mezzi per apprendere e condividere un mondo culturale formato storicamente, un mondo nel quale la diversità e la differenza sono viste non come mancanza o insufficienza, ma come le qualità fondamentali e vincenti dell’esistenza umana […] La matematica può giocare un ruolo primario nei progetti educativi del Secolo XXI se si promuove un’aula come comunità di apprendimento dove gli allievi lavorano in modo critico e riflessivo verso il compimento di una forma comunitaria possibile di vita”.

Grazie