

Definizioni di numero ⁽¹⁾.

(NUMERO CARDINALE)

Il concetto di numero si presenta, nel suo stadio primordiale, come una nozione comune; nessuna persona, anche mediocrementemente colta, crederebbe di non saper facilmente rispondere alla domanda: « *che cosa è numero?* »; ma quanti, messi alla prova, saprebbero trovare risposta soddisfacente? atta, cioè, a rappresentare senza ambiguità tutte e sole le proprietà caratteristiche di un tale concetto, ed a comprenderne tutte le molteplici, svariatissime accezioni?

I più risponderanno ripetendo viete formulette apprese all'uscir dell'infanzia sui primi banchi scolastici, e rimaste poi nella mente come dogmi che si debbono accogliere e non si possono discutere.

Come sono nati questi dogmi? d'onde traggono origine quelle formule che da secoli si trasmettono, da maestro a scolaro? Ho cercato di risalire alle origini, e, consultando i libri che dai tempi più antichi successivamente fecero testo nelle scuole di aritmetica, ho raccolto le *definizioni di numero* proposte dagli autori ed insegnate nelle scuole, da Euclide fino all'inizio del presente periodo di indagine critica sui fondamenti dell'aritmetica.

Espongo qui tali definizioni, nell'intento di preparare materiale per lo studio dello svolgimento storico del concetto di numero, e tralascio le discussioni critiche ⁽²⁾, che di troppo allungherebbero la presente comunicazione.

⁽¹⁾ Da uno *Studio* di prossima pubblicazione *Su la storia della Aritmetica*.

⁽²⁾ Sul concetto di numero intero, e sul significato empirico dei numeri cfr. l'articolo di F. ENRIQUES: *I numeri reali*, nelle « *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari* » (Bologna, 1912), vol. I, pp. 365-493.

1. EUCLIDE nel VII degli *Elementi* dà le definizioni:

« Unità è ciò secondo cui ogni cosa è detta uno.

« Numero è la moltitudine composta di unità ».

Per intendere lo spirito che anima queste definizioni, occorrerebbe esaminare ciò che, sul concetto di numero, lasciarono scritto i filosofi da cui Euclide più direttamente ha attinto le cognizioni onde egli compose i suoi *Elementi*.

2. Ricorderemo qui brevemente che la più antica definizione di un numero è quella, attribuita a TALETE ⁽¹⁾,

« Numero è un sistema di unità ».

3. I PITAGORICI, stando a ciò che afferma GIAMBlico ⁽²⁾, definivano l'unità come « il limite della quantità » — « il confine fra i multipli ed i sottomultipli ». — TEONE SMIRNEO attribuisce ai Pitagorici una definizione « per astrazione » secondo la quale: « il principio di tutto ciò che è uno è la monade, di tutto ciò che è due la diade, di tutto ciò che è tre la triade.... » ⁽³⁾.

4. In vari passi delle Opere di PLATONE ⁽⁴⁾ si parla della unità e del numero; notevoli i seguenti:

« La scienza del calcolo (λογιστική), e la scienza dei numeri (ἀριθμητική) ci conducono alla conoscenza del vero.

« L'arte del calcolo deve essere trattata in modo da condurre gli uomini alla contemplazione della essenza dei numeri per il bene dell'anima, facilitandole il modo di innalzarsi dall'ordine delle cose terrene verso la verità e l'Essere.

« È, difatti, questo studio, che, col dare alla nostra anima

⁽¹⁾ TALETE DI MILETO (n. 624 a. C.?) avrebbe, secondo GIAMBlico [Jamblichus, in « Nichomachi Arith. introd. », ed. S. Tennelius, Arnheim 1668, p. 12], appreso questa definizione dagli Egiziani. Cfr. la Nota di TANNERY all'art.: *Principes fond. de l'Arithm.*, nella ed. fran. della « Encyclopédie des Sciences Mathemat. », I, 1₁, note 12 e 41. HEATH: *A history of Greek Mathematics* (Oxford, 1921), tom. I, p. 70.

⁽²⁾ Loc. cit., p. 11.

⁽³⁾ Cfr. THÉON. DE SMYRNE, ed. Dupuis (Paris, 1892), p. 31.

⁽⁴⁾ Cfr. il Cap. VII della *Repubblica*.

« un possente slancio verso la ragione suprema, l'obbliga a ragionare sui numeri quali essi sono per loro stessi, senza giammai consentire che la discussione porti sopra unità visibili e tangibili ».

Più precise determinazioni del pensiero di Platone si trovano indicate negli scritti del filosofo platonico TEONE DA SMIRNE ⁽¹⁾:

« Numero è una collezione di monadi ... ,

« ... è una progressione della moltitudine che comincia con la monade, e torna alla monade;

« Monade è la quantità terminante, principio ed elemento dei numeri,

« ... è l'idea di uno intelligibile, il qual uno è indivisibile; è detta monade perchè è separata e messa fuori dei numeri ⁽²⁾.

« Le monadi sono infinite, l'uno è unico; le monadi si compongono e formano i numeri, l'uno è lui solo e non può essere più di uno,

« l'uno è la essenza della monade, è qualche cosa di assoluto e di immutabile; è definito, è termine, mentre le monadi sono indefinite ed indeterminate ⁽³⁾.

5. Una definizione, dal punto di vista aritmetico più precisa, è quella attribuita ad EUDOSSO DA CNIDO ⁽⁴⁾:

« Numero è una pluralità definita ».

Ed a questa si accostano alcune delle definizioni contenute nelle opere di ARISTOTILE ⁽⁵⁾.

« Numero è una pluralità che si misura dalla unità ⁽⁶⁾.

« Numero significa ciò che è misura di una determinata moltitudine;

« Numero è la moltitudine misurata e la moltitudine delle misure;

(1) Visse al tempo di Traiano, e fu contemporaneo di Tolomeo.

(2) Cfr. THÉON. DE SMYRNE, *philosophe platonicien* (ed. Dupuis, 1892), pp. 29, 31.

(3) Loc. cit., pag. 35.

(4) Viveva l'a. 370 a. C. — Cfr. GIAMBlico, loc. cit.

(5) (384-322 a. C.).

(6) *Metafisica*, lib. IX, cap. 6.

« ... secondo la ragione uno non è numero, ma principio
« dei numeri »⁽¹⁾;

« ... uno è l' Essere ... uno esprime ad un tempo l'esistenza
« reale dell' uno e la esistenza reale dell' Essere »⁽²⁾.

6. Da tutto ciò si raccoglie che le definizioni Euclidee rispecchiano le idee dei Platonici e quelle degli scolastici, e che, nella determinazione del concetto di numero si riscontrano due momenti distinti:

La definizione « per astrazione » della unità.

La definizione genetica di numero, che afferma, stabilisce o dichiara la generazione di questo dalla unità.

7. Nelle scuole medioevali di arti liberali, l'aritmetica era studiata secondo BOEZIO, il quale dà la definizione seguente⁽³⁾:

Numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus.

L'unità non è propriamente definita, ma, in moltissimi passi, considerata come un ente di natura incorporea « ... prima
« cunctorum numerorum, et genetrix pluralitatis, indivisibilis,
« insecabilis, per se constantis, quantitatis principium, omnium
« numerorum mensura communis, virtute atque potentia per-
« fecta ... ».

Più precise determinazioni si trovano nel *Compendio del quadrivio*, composto nell' XI secolo dallo scrittore bizantino MICHELE PSELLO⁽⁴⁾, sull'opera di Teone e di altri platonici, ad uso delle scuole di arti liberali.

« *Omnium numerorum principium est unitas, innumerus
« fons numerorum.*

« *Est enim numerus, multitudo ex unitatibus constituta.*

« *Unitas sane numerus nequaquam est, sed numeros gignit;
« fons et radix adeoque primordium omnis multitudinis.*

⁽¹⁾ *Metafisica*, lib. XIII, cap. 1.

⁽²⁾ *Fisica*, lib. I, cap. 4, 9.

⁽³⁾ A. M. T. SEVERINO BOEZIO (n. 470 ?, m. 526): *De Institutione Arithmetica*. - Ed. Friedlein, Lipsia (1867), p. 13.

⁽⁴⁾ MICHAELIS PSELLI (n. 1020, m. 1110) *Quadrivium hoc est, perspicuus liber de quatuor Mathematicis scientiis....* (Lugd. Batav., MDCXLVII).

« *Quo fit, ut imaginem in se Dei contineat...* ».

Questi passi ricordano quello di ANATOLIO ALESSANDRINO ⁽¹⁾ « *su la decade* », tradotto dal TANNERY, nei termini seguenti:

« *L'unité est antérieure à tout nombre, tous naissent d'elle, elle même ne naît d'aucun. Aussi est-elle appelée Semence, étant la matière des nombres..., indivisible, intran-*
« *sitive, ne sortant point de sa propre nature, même dans les*
« *multiplications... elle désigne le point.*

« *Les Pythagoriciens l'ont appelée intellect, et l'ont assimilée*
« *à l'Un, au Dieu intelligible: Beau et Bien en soi...* ».

Pare dunque lecito il concludere che il pensiero greco sul concetto di numero si sia conservato fra noi, anche attraverso il più oscuro periodo medioevale.

8. Il secolo XII vide i primi albori della rifiorita scienza matematica con le traduzioni dall'arabo, fatte principalmente da GERARDO CREMONESE e da PLATONE TIBURTINO ⁽²⁾. L'autore che, nelle scienze matematiche, ebbe in quel tempo maggior fama fra noi, quegli dal cui nome è designato il più generale atto della analisi, « *l'Algoritmo* », e dalle prime parole della cui opera ha preso nome la nuova scienza « *l'Algebra* »: MOHAMED-BEN-MOUSA ALKUAREZMI, introduce il concetto di un numero al modo seguente ⁽³⁾:

« *Omnemque numerum, ab uno compositum esse inveni;*

« *Unus itaque inter omnes consistit numerus.*

⁽¹⁾ Cfr. TANNERY P.: *Oeuvres*, III, p. 321. Questo ANATOLIO occupava verso l'anno 270 d. C. una cattedra di filosofia aristotelica in Alessandria. Nel 270 fu nominato vescovo a Laodicea in Siria. In Alessandria ebbe a scolaro GIAMBILICO.

⁽²⁾ Cfr. LIBRI: *Histoire des Sciences Mathém. en Italie*, vol. I, p. 168.

⁽³⁾ Cfr. *Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala*, pubblicato dal LIBRI [Nota XII al vol. I (p. 253) dell' *Histoire d. Sc. Math. en Italie*] nella traduzione di GERARDO CREMONESE. Questo è il più antico trattato di algebra conosciuto (sec. IX), ed a proposito di esso il TANNERY P. nelle *Note* all'art. cit. della *Encyclop. d. Sc. Math.* [(I, 1₁ nota 119)], osserva giustamente che *l'origine di questa algebra pare piuttosto greca che indiana*. Su questo argomento si vedano anche le note di G. ENESTRÖM nella *Tribune publique della Encyclopédie*.

« *Et inveni omne quod ex numeros verbis exprimitur, esse quod unus usque ad decem pertransit.*

« *Decem quoque ab uno progreditur, quia postea duplicatus et triplicatus et cetera quemadmodum fit de uno* ».

Si vede da queste righe che l'autore arabo, pur assumendo come punto di partenza la definizione classica, trova che il miglior mezzo di introdurre il concetto di numero è quello di spiegare la numerazione.

Più tardi, in un libretto, da lui composto per divulgare fra il popolo arabo il sistema indiano di numerazione posizionale, egli commenta le date definizioni, col passo seguente ⁽¹⁾.

« *Et iam patefeci in libro algebre et almuchabalah, idest « restaurationis et oppositionis, quod universus numerus sit « compositus, et quod universus numerus componatur super « unum. Unum ergo invenitur in universo numero: et hoc « est quod in alio libro arithmetice dicitur. Quia unum est « radix universi numeri, et est extra numerum ».*

Anche in questo libro, dunque, che è quello onde si inizia il nuovo sistema di numerazione scritta (impropriamente detta araba) ritroviamo il pensiero greco espresso con la vieta formula e con le stesse parole.

Questo riscontro potrebbe forse portare un nuovo argomento a favore della tesi, che fa risalire ad origine neopitagorica anche il sistema posizionale di numerazione scritta ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. *Trattati di Aritmetica*, pubbl. da B. BONCOMPAGNI. I. *Algoritmi de numero indorum* (Roma, 1857).

⁽²⁾ Cfr., p. es., T. H. MARTIN: *Les signes numériques et l'arithmétique, chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge* [*Ann. di Mat.*, t. V (1864), § XVII].

Nelle note all'articolo delle *Encyclopédie*, sup. citato, si legge a questo proposito (nota 12): « L'opinion que la unité doit être regardée comme « en dehors du nombre, fut adoptée par ALKHOWARESMI, et, après lui, par « les mathématiciens arabes et chrétiens du moyen-âge: elle rencontra encore « des partisans au 17^{ème} siècle (J. A. LE TENNEUR) ».

Cui si può osservare che gli autori cristiani del medioevo attingevano direttamente a quelle stesse fonti classiche da cui derivano le opinioni espresse da Alkhowaresmi. I matematici italiani (v. TARTAGLIA) citano espressamente quelle fonti, e non citano mai (in questo argomento) alcun autore arabo. Sta il fatto che, mentre per mezzo di LEONARDO PISANO, essi attinsero da fonti arabe regole e nozioni riguardanti la pratica del calcolo

9. LEONARDO PISANO, che, al principio del secolo XIII, segna col suo *Liber Abbaci*, il rinascimento della scienza matematica in Occidente, definisce il numero dicendo:

« nam numerus est unitatum perfusa collectio, sive
« congregatio unitatum, quae per suos in infinitum ascendit
« gradus ⁽¹⁾.

Ed è notevole, in questa definizione, la esplicita indicazione della *serie infinita dei numeri cardinali*, la cui comprensione costituisce, al dire di P. DU BOIS-REYMOND, il secondo grado nello sviluppo del concetto di numero ⁽²⁾.

10. Ma, mentre LEONARDO si limita a quella concettosa definizione, i *matematici-mercanti*, che dietro lui fecero stuolo in Italia, non trascurarono le disquisizioni teoriche sui concetti di *grandezza*, *unità*, *numero*. Notevolissime, ed anche oggi interessanti, le considerazioni che si leggono nel *General Trattato di Numeri e Misure* di NICOLÒ TARTAGLIA ⁽³⁾:

« Ogni quantità, magnanimo lettore, è continua ovvero
« discreta; la continua è detta magnitudine ovvero grandezza,
« et la discreta moltitudine...

« L' Aritmetica è disciplina di quantità discreta...

« L' unità è quella dalla quale ciascaduna cosa è detta
« una....

« e niuna cosa può esser meno di uno, poichè il meno
« di uno è niente.

« ... il Matematico considera le cose in sè come astratte da
« materia sensibile secondo la ragione (et tutto questo afferma
« pure ARISTOTILE nel predetto sistema della Phisica...).

« et però la unità, secondo tal considerazione Mathe-
« matica, saria un certo indivisibile secondo la quantità, et
« questa unità viene a esser quasi simile al Punto geometrico...

« ... ella è da esser comparata al Sommo Iddio, et per

(logistica), la scienza dei numeri (arithmetic) si conservò e si svolse indipendentemente da influenze orientali.

⁽¹⁾ *Liber Abaci*, compositus a LEONARDO filio BONACIJ PISANO, in anno M° CC° II° (pg. 2).

⁽²⁾ Cfr. « *Allgemeine Functionentheorie* » (Tubingen, 1882) pg. 19.

⁽³⁾ Venezia, 1556, carte 1, 2.

« questa ragione tengo che li nostri antichi savi attribuissero
« questo nome di *unità* al detto nostro Sommo Architetto ».

Considerazioni di simile natura egli fa seguire alla definizione (data secondo EUCLIDE) di Numero, e nel numero egli distingue tre sorta:

« il *numero numerante*, egli è l'anima nostra, la qual numera le cose per gli strumenti della bocca et del core.

« lo *numero numerato*, sono le cose numerate, come sono gli animali, la moneta...

« lo *numero numerabile*, per el qual noi numeremo, egli è l'uso e l'atto del numerare nelle cose diverse: cioè quella quantità discreta che comenza dalla unità, come sono questi: uno, duoi, tre... et così procedendo in infinito; et questo è quello che noi chiamiamo *numero matematico* ».

11. Col TARTAGLIA si accordano tutti gli autori italiani del secolo XVI e della prima metà del secolo XVII.

In Francia il CARTESIO accenna più sensibilmente al modo di vedere pitagorico colla « *definizione per astrazione* », che egli dà nei *Principiorum Philosophiae* ⁽¹⁾.

« Ita etiam, cum *numerus* non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi duntaxat; ut et alia omnia quae *universalia* vocamus ...

« Ita, cum videbimus duos lapides, nec ad ipsorum naturam, sed ad hoc tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam ejus numeri quem vocamus *binarium*, cum postea duas aves, aut duas arbores videmus, nec etiam earum naturam, ad tantum quod duae sint consideramus, repetimus eandem ideam quam prius, quae ideo est *universalis*; ut et hunc numerum eodem *universali* nomine *binarium* appellamus ... ».

È non dissimile è il concetto che si trova espresso dal LEIBNIZ ⁽²⁾.

« Il numero è una figura incorporea risultante dalla riunione di enti comunque pensati.

⁽¹⁾ Opere, vol. III, pg. 27. (RÉNÉ DESCARTES, n. 1596, m. 1650).

⁽²⁾ De arte combinatoria (1666). — WERKE, ed. C. I. Gerhardt « Math. Schrif. », 5, Halle, 1858, pg. 12.

« P. es.: Dio, un angelo, un uomo, il movimento, fanno « insieme quattro. Il numero è dunque un *universalissimum* ».

12. Le definizioni euclidee sono rimaste fino ai giorni nostri nella scienza e nelle scuole, ma, presso molti fra gli Autori che adottarono tali definizioni, il concetto metafisico di unità si muta nella considerazione di una *cosa materiale, sola o considerata come sola*.

Così in ADRIANO MEZIO ⁽¹⁾: « *unitas vero est qua unum- quodque dicitur unum, sive id corporeum, sive incorporeum fuerit, ut unus angulus, unum animal, unus lapis ...* »

In A. G. KÄSTNER ⁽²⁾: « *Numero intero è una moltitudine di cose della stessa specie* ».

Ed in moltissimi testi ad uso delle scuole, come:

F. SOAVE ⁽³⁾: « *Unità vuol dire una cosa sola o considerata come sola, p. es. un uomo, un cavallo...* ».

G. NOVI ⁽⁴⁾: « *Una compagnia di soldati è un numero, ed ogni soldato è una unità* ».

R. BALTZER ⁽⁵⁾: « *La riunione di più cose omogenee si esprime con un numero, una di queste cose dicesi unità* ».

J. A. SERRET ⁽⁶⁾: « *Les arbres contenus dans une pépinière forment un nombre, et chaque arbre est une unité* ».

13. L'unità, trasmutata da concetto astratto in oggetto materiale e sensibile, perde anche gli attributi della *indivisibilità* e della *invariabilità*, ed il concetto di numero viene presentato in guisa da poter comprendere in una unica definizione l'intera classe dei numeri reali.

Già leggiamo nel diffusissimo trattato del FIGATELLI ⁽⁷⁾ che:

⁽¹⁾ *Arithmeticae* — libri duo — (1640), pg. 1.

⁽²⁾ *Anfangsgründe der Arithmetik* (1758), pg. 21.

⁽³⁾ *Elementi di Aritmetica* (1786). Questo manuale è stato usato nelle nostre scuole fino a pochi anni or sono. Il RICCARDI registra « *fra le molte* » ben 18 ristampe di esso!

⁽⁴⁾ *Elementi di Aritmetica* (1850), pg. 1.

⁽⁵⁾ *Elementi di Matematica* (traduzione Cremona) Parte 2^a. — *Aritmetica generale* (1865), pg. 8.

⁽⁶⁾ *Éléments d'arithmétique* (1868) pg. 1.

⁽⁷⁾ *Trattato Aritmetico* (1664). Il RICCARDI registra 11 successive ristampe di questo manuale scolastico, che è stato usato, come testo, per più di un secolo e mezzo.

« anzi questa unità è tanto familiare alla natura, che
 « anco l'usa nella moltitudine. Laonde si dice una dozzina,
 « una quantità, un esercito, ecc.

« Anzi l'unità istessa, divisa, ritiene il nome di unità, che
 « perciò si dice un mezzo, un terzo ... ».

Questo stesso modo di interpretare il concetto di unità
 ispira la definizione, che così spesso si trova nei testi scolastici:

« *le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties*
 « *d'unités, une quantité est composée* ⁽¹⁾ ».

Ma più recisamente SIMONE STEVIN ⁽²⁾ afferma che:

« *Nombre est cela par le quel s'explique la quantité de*
 « *chacune chose.*

« *Comme l'unité est nombre par lequel la quantité d'une*
 « *chose expliquée se dict un, et deux par lequel on la nomme*
 « *deux, et demi par lequel on l'appelle demi, et racine de trois,*
 « *par lequel on la nomme racine de trois ... ».*

Ed il LE ROUX ⁽³⁾:

Nombre est ce qui exprime la valeur ou la quantité de
quelque chose.

14. L'introduzione dell'irrazionale nella scienza numerica,
 è indice del profondo mutamento nelle idee, nei metodi, negli
 stessi principî posti a fondamento della scienza matematica,
 che ebbe luogo nella prima metà del secolo XVII.

In Francia il CARTESIO aveva pubblicato la sua *Geometria* ⁽⁴⁾, ed in Italia il CAVALIERI la *Geometria degli indivisibili* ⁽⁵⁾, opere, all'apparire delle quali parve, per dirla col LACROIX, che dopo lunghe tenebre si riaccendesse la fiaccola della scienza.

Il metodo degli indivisibili sopprimeva, nel fatto, quella
 sostanziale differenza fra la *quantità continua* e la *quantità discreta*, che gli antichi avevano posto a base della definizione di *numero matematico*; e le discussioni che si sollevarono al-

⁽¹⁾ Cfr. BÉZOUT: *Cours de Mathématique*, I, pg. 2 (1797).

⁽²⁾ Cfr. *Le premier livre d'Aritmétique* (1634).

⁽³⁾ *Le trésor de l'Aritmétique* (1643).

⁽⁴⁾ Cfr. *Discours de la méthode* (1637).

⁽⁵⁾ *Geometria Indivisibilibus continuorum, nova quodam ratione promota*
 (Bologna, 1635).

l'apparire del libro del CAVALIERI, le difese, le critiche, la estensione in ogni campo scientifico dei nuovi concetti ⁽¹⁾, portarono una essenziale modificazione anche sul modo di concepire il numero, il quale incominciò, allora, ad essere considerato come *rapporto di due grandezze omogenee*.

Vediamo infatti il WALLIS, che nella sua *Arithmetica infinitorum* (1655) intese di applicare alla aritmetica il metodo degli indivisibili, definire così la unità » ⁽²⁾.

« Unitas vero instar certae cujusdam lineae, seu alius « magnitudinis, ad arbitrium positae, ad quam aliarum homogenearum fit comparatio ».

Più francamente il NEWTON, nella *Aritmetica Universale* ⁽³⁾.

« Per numerus, non tam multitudinem unitatum, quam « abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis « quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus ».

Edd il WOLF ⁽⁴⁾:

« Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam « rectam, numerus dicitur ».

Questo concetto, poco a poco si introduce anche nei testi scolastici.

In Italia il CRIVELLI, nei suoi *Elementi di Aritmetica*, pubblicati nel 1728, scrive:

« Unità si dice tutto ciò che si concepisce come indiviso, « e tal nome si dà a tutte quelle quantità, che, sebbene sono

⁽¹⁾ Su l'opera di CAVALIERI Cfr. PIOLA: *Elogio di Bonaventura Cavalieri* (Milano, 1844). — E. BORTOLOTTI: *Lo studio di Bologna ed il rinnovamento delle Scienze Mat. in Occidente* (Annuario della R. Università di Bologna per l'anno 1920-21). Il metodo degli Indivisibili è stato usato, nella Geometria elementare (specialmente per la determinazione di volumi) fino a tutto il secolo XVIII. Cfr. p. es. LACAILLE: *Leçons Élém.* (1741). — E. MANFREDI: *Geom.* (1755). BOSSUT: *Corso di Matematica*, tradotto da A. MOZZONI (Piacenza, 1803), pg. III, e seg. — PURGOTTI: *Geometria* (1842), pp. 143 e seg.

⁽²⁾ Cfr. *Opere Mat.*, I, pg. 25.

⁽³⁾ Riproduce le lezioni fatte dal NEWTON dal 1669 al 1703 a Cambridge. La prima edizione (fatta ad insaputa dell'Autore) è del 1707; la edizione definitiva è del 1722. Il Newton considerava la genesi delle grandezze geometriche alla stessa guisa del Cavalieri; dal quale egli prese anche la nomenclatura: *fluenti*, *flussioni* sono termini usati dal Newton, con lo stesso significato loro attribuito dal Cavalieri.

⁽⁴⁾ *Elementa Matheseos universae*, t. I (1713), art. 19, def. 8.

« divisibili, vengono da noi considerate come indivise e come
« *primi principi, secondo cui determiniamo tutte le altre.*

« Quando vogliamo determinare una quantità, prendiamo
« ad arbitrio un'altra qualunque quantità dello stesso genere,
« la quale ci serve di misura per determinar quella ».

In Francia, il LACAILLE ⁽¹⁾:

« une quantité exprimée par des nombres, est une quan-
« tité qu'on a ordinairement conçue partagée en plusieurs
« parties égales; une de ces parties considérée seule, s'appelle
« l'Unité; un nombre est donc l'expression d'un assemblage
« d'unités.

« L'étendue est réellement composée d'une infinité de
« parties égales. On ne peut donc l'exprimer par un nombre
« fini, à moins qu'on ne suppose toutes ces parties partagées
« en plusieurs tas finis, égaux;

« un nombre qui exprime une étendue, exprime en combien
« de tas égaux on conçoit ces parties partagées, et un de ces
« tas est ce qu'on appelle ici l'unité ».

La definizione Newtoniana prende forma definitiva negli
Elementi di Algebra di EULERO, pubblicati nel 1770, e tradotti
in francese dal LAGRANGE ⁽²⁾:

« nombre n'est autre chose que le rapport d'une grandeur
à une autre prise arbitrairement pour l'unité ».

e, sotto questa forma, la troviamo di poi (spesso accom-
pagnata dalla vieta formula euclidea) nei testi di aritmetica.

15. Ma, il far dipendere il concetto di numero da quello
di grandezza, domandava che quest'ultimo fosse anzitutto
chiarito.

Ciò procura di fare il CRIVELLI con la proposizione ⁽³⁾:

« Quanto, si dice tutto ciò che è composto di parti e l'aver
parti, per astrazione, si dice aver quantità ».

La quale rispecchia la antica definizione di HERONE:

⁽¹⁾ *Leçons élémentaires de Mathématiques* (1741); opera diffusa, in numerosissime traduzioni e ristampe per tutte le scuole d'Europa. Nella prefazione si afferma espressamente di voler seguire la *dottrina degli indivisibili*.

⁽²⁾ *Éléments d'algèbre*, par LÉONARD EULER (Lyon, a. III, pg. 4).

⁽³⁾ Loc. cit. (a. 1728).

« grandezza è ciò che si può moltiplicare e dividere senza limite » ⁽¹⁾.

Di qui è venuta la definizione:

« Grandezza o quantità, è tutto ciò di cui si può assegnare o concepire il doppio e la metà, il triplo e la terza parte.... », che si legge nella *Algebra* del PAOLI (1803), nel *Corso di matematica per gli aspiranti alle Scuole di Artiglieria e Genio* del RUFFINI (1807), ed in molti altri testi scolastici, anche recentissimi.

Nè diversa da questa è la definizione proposta da M. CANTOR nel 1855 ⁽²⁾:

« Grösse ist wofon es ein gleichartiges Mehr oder Weniger giebt ».

Altre definizioni, proposte da scienziati tedeschi, ebbero minor fortuna; ricorderò:

LEIBNIZ G.: « Grandezza è la intrinseca differenza fra cose simili » ⁽³⁾.

MURHARDT F.: « Una cosa in cui si riscontra quantità è una grandezza » ⁽⁴⁾.

OHM M.: « Il continuo perfettamente determinato è una grandezza » ⁽⁵⁾.

GRASSMANN: « Chiamasi grandezza una qualsiasi cosa che possa essere supposta eguale o diseguale ad un'altra » ⁽⁶⁾.

Quest'ultima, invero, prelude al modo assiomatico di introdurre il concetto di grandezza che oggi è, di preferenza, seguito; ed appartiene già al periodo contemporaneo, del quale non voglio ora occuparmi.

La definizione che, nel periodo che stiamo studiando, ha avuto maggior fortuna è quella che afferma essere « grandezza tutto ciò che può essere aumentato o diminuito ».

(1). Cfr. PEANO: *Operazioni su le grandezze* (« Atti Acc. di Torino », 1922).

(2) *Grundzüge einer Elementararithmetik* (1855).

(3) Citata dal CANTOR al loc. ind. sup.: Grösse ist der innere Unterschied ähnlicher Dinge.

(4) *System der Elemente der Allgemeinen Grössenlehre* (1798): « Ein Ding, in welchem Quantität statt findet heisst Grösse ».

(5) *Die reine elementar Mathem.* (2^a ed. 1834-39): « Das völlige begrenzte Stetige ist eine Grösse ».

(6) *Lehrbuch d. Arithm.* (1861), pg. 1. « Grösse heisst ein jedes Ding, welches einem andern gleich oder ungleich gesetzt werden soll ».

Trovo questa definizione nelle già citate *Lezioni* del LACAILLE; e forse alla gran voga che ha avuto questo libro, alla enorme sua diffusione, alla sua straordinaria vitalità come libro scolastico (¹), si deve la fortuna di quella definizione.

Il LACAILLE, dopo aver ripetute le considerazioni, da noi già riportate, del CRIVELLI, sul concetto di grandezza, aggiunge:

« Par ces mots: quantité ou grandeur, on entend tout ce qui se peut concevoir composé de parties, *tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution* ».

Possiamo prendere a caso uno qualunque dei libri di aritmetica pubblicati nel secolo scorso, o nei primi anni del secolo presente, e quasi sicuramente troveremo questa definizione, cui fa seguito la definizione Newtoniana di numero.

Citerò solo, fra gli autori più noti:

L. EULERO: *Éléments d'algèbre* (1770).

J. BERTRAND: *Aritmetica* (traduzione), Novi (1856).

J. TANNERY: *Cours complet de Mathém. élém.*, publié sous la direction de M. DARBOUX (1900).

« la définition bien connue: *on appelle grandeur ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminutions est sans doute très vague, dans sa généralité: on va toutefois essayer d'en tirer parti pour relier la notion de grandeur et la notion de nombre....* ».

16. Non credo che ci sia nulla al mondo di più tenacemente conservatore dell'ambiente scolastico: le prime nozioni, apprese quando sul nostro animo la parola ha forza di concetto, divengono dogmi, che con forma immutata si tramandano da maestro a scolaro, di generazione in generazione. Ed ogni autore di testi scolastici che voglia esitare i suoi libri, si trova obbligato a rispettare quanto più è possibile delle formule tradizionali.

Si spiega così come in certi libri, per altri riguardi pre-

(¹) Per oltre un secolo, attraverso adattamenti, rifacimenti e ristampe, con nomi diversi (BOSCOVICH, MARIE, CANOVAI, DEL RICCO, BRUNACCI), nella lingua originale o tradotta, è stato usato nelle Scuole d'Italia e di Francia. — Cfr. CANTOR: *Vorlesungen über Gesch. d. Math.*, IV, pg. 40 e 47.

gevolissimi, si trovino affastellate tutte le definizioni e tutte le considerazioni che da ARISTOTILE in poi furono fatte sul concetto di numero, come se tutte coincidessero in una unica veduta (¹).

Alcuni autori peraltro si industriano, con ingegnose argomentazioni, di stabilire un legame logico fra le varie parti del loro discorso; e, per dare un esempio, che non sia fra i più noti, ricorderò le *Lezioni sugli elementi di Matematica* del P. DOMENICO CHELINI (²), nelle quali il concetto Newtoniano è collegato alla definizione Euclidea col seguente sistema di deduzioni:

« L'attributo che hanno le cose di poter crescere e diminuire dicesi *quantità*.

« *Quoto di due quantità* è un segno destinato a indicare quale summultiplo dell'una debbasi prendere, e quante volte ripetere, per avere un equivalente esatto dell'altra;

« *il quoto di due quantità eguali* è propriamente ciò che chiamasi *uno* od *unità numerica*; il *numero intero*, preso in astratto, è una collezione di *unità numeriche* ».

Ma i più non danno segno di avvedersi delle inevitabili contraddizioni. Per esempio nella *Aritmetica* del P. DENZA (³), si legge:

« La quantità a cui si riferiscono le altre della medesima specie per misurarle, e che si considera come *indivisibile*, dicesi *unità*; il numero denota quante unità o parti di unità si contengono in una quantità ».

E taccio, per carità di prossimo, di molti autori contemporanei.

17. La definizione, che potrebbe dirsi Newtoniana, di

(¹) Caratteristico è sotto questo riguardo il libro di O. GHERLI: « *Elementi teorico-pratici della matematica pura* », ora dimenticato; ma che dal LAGRANGE era tenuto per il migliore e più completo libro di analisi allora esistente.

(²) Queste *Lezioni* sono rimaste inedite. Ne possiedo un esemplare manoscritto, che pare debba riferirsi all'anno 1846.

(³) *Elementi di Aritmetica* per FRANCESCO DENZA barnabita (2^a ediz.), (1875), pg. 2.

grandezza o quantità, fu, fin dal suo apparire, aspramente criticata e debolmente difesa ⁽¹⁾.

Tutti ne avvertivano la imperfezione; ma quando si volle effettivamente sanare la indeterminazione che la rende vana ed inconcludente, non si trovò miglior espediente che quello di ricorrere al concetto di numero.

Leggiamo infatti:

SARRET J. B.: « *Quantité est tout ce qui peut être mesuré ou nommé* » ⁽²⁾.

KRAMP C.: « *L'arithmétique a pour objet les quantités en tant qu'elles sont exprimés en nombres* » ⁽³⁾.

PAOLI P.: « *Tutte le quantità si riducono a numeri* » ⁽⁴⁾.

WITTSTEIN T.: « *Grandezza è ciò che può essere indicato con un numero* ».

BELLAVITIS G.: « Da moltissimi anni ho combattuto la comune opinione che la quantità sia tuttociò che è suscettibile di aumento e di diminuzione... quantità non è ne questa nè quella grandezza, bensì il rapporto delle grandezze » ⁽⁵⁾.

P. DU BOIS-RAYMOND: « *Per grandezza matematica (quantum, quantitas, quantité) si intende una proprietà comune a cose diverse, in relazione alla quale esse possano essere numericamente paragonate* » ⁽⁶⁾.

In conclusione: mentre si voleva assumere il concetto di grandezza come punto di partenza per definire il numero,

⁽¹⁾ È nota la obiezione del D'ALEMBERT, il quale aveva fatto osservare che, quantunque la luce presenti aumento e diminuzione, non può dirsi propriamente una grandezza. A ciò lo ZANNOTTI F. M. (prof. di meccanica nella Un. di Napoli) ribatteva nella sua *Aritmetica* (1852) che i progressi fatti dalla fotometria al suo tempo permettevano di riguardare anche la luce come una grandezza. E pare volesse far intendere non esser lecito l'ammettere a priori la impossibilità di misurare anche le qualità morali suscettibili di aumento e diminuzione, come la bontà, l'intelligenza,...

⁽²⁾ *Éléments d'Arithmétique* (a. VII); quest'opera è attribuita al CONDORCET. (Cfr. « *Observations pour les instituteurs* » sur les *Éléments d'Arith.*, pg. VIII).

⁽³⁾ *Éléments d'Arithmétique*, 1801.

⁽⁴⁾ *Elementi di Algebra* (1803), pg. 2.

⁽⁵⁾ *Riassunto delle lezioni di Algebra* (1875).

⁽⁶⁾ *Allg. Functionentheorie* (1882), pg. 14.

si trovava che il concetto di numero era necessario per definire la grandezza! ⁽¹⁾).

Ciò spieghi la ragione per cui questo modo, che fu detto sintetico, di introdurre il concetto di numero, sia stato poco a poco abbandonato, e siano tornati in onore procedimenti puramente analitici, suggeriti dagli studi, con rinnovato fervore intrapresi, sui fondamenti della scienza aritmetica.

*
* *

La storia dello sviluppo del concetto di numero può essere divisa in tre periodi.

Nel primo, che va fin verso la metà del secolo XVII, viene quasi esclusivamente seguito il concetto euclideo o scolastico.

Nel secondo, che può farsi cominciare con la *Geometria degli Indivisibili*, e che si è affermato con la *Aritmetica Universale* di NEWTON, prevale l'indirizzo, che fa risiedere il concetto di numero nel rapporto di grandezze omogenee.

In entrambi si considera come numero matematico il *numero cardinale*, quello cioè che esprime la quantità delle cose.

Ma, sul finire del secolo XVIII, quello stesso movimento che portò alla revisione dei principî che stanno a base della Geometria, si rivolse alla ricerca ed all'esame critico dei Fondamenti logici e psicologici del concetto di numero; mentre gli ammaestramenti di G. G. ROUSSEAU, del CONDORCET, del PESTALOZZI, dell'HERBART, l'esempio dell'applicazione del *metodo euristico* all'insegnamento dell'algebra dato dal CLAIRAUT, ed il rinnovamento degli istituti scolastici seguito nel periodo Napoleonico, facevano penetrare i nuovi metodi anche nella Scuola primaria, ambiente solitamente refrattario alle nuove idee.

Incomincia così il terzo periodo che è caratterizzato, nella scuola, dalla introduzione della aritmetica dei *numeri ordinali*; e, nella scienza, dalla analisi e dallo studio critico dei fondamenti dei concetti aritmetici.

Del quale periodo, come già dissi, non intendo ora trattare.

ETTORE BORTOLOTTI

⁽¹⁾ Che la *teoria dei numeri* possa dedursi rigorosamente dal concetto di grandezza stabilisce più tardi BETTAZZI R. nella sua opera: *Teoria delle grandezze* (Pisa, 1890).