Definizioni di Numero

(Numero ordinale)

Estratto dalle

Esercitazioni Matematiche — Anno II. — Fasc. 9°-10° — 1922.

Off. Graf. del Cav. Vinc. Giannotta
Libraio di S. M. la Regina Madre
:: *Via Crociferi, 15* ::
CATANIA

1922.

PUBBLICAZIONI

IN LITOGRAFIA

1. Prof. MICHELE CIPOLLA: *Teoria dei gruppi d'ordine finito e sue applicazioni.* — Parte I e II. Gruppi astratti — Gruppi di sostituzioni L. 56 (42) — Parte III. Teoria delle equazioni algebriche secondo GALOIS L. 25 (L. 15).

2. Prof. MAURO PICONE: *Corso di Analisi superiore.*—Fasc. I. Equazioni differenziali, 2ª ediz. L. 20 (L. 14). — Fasc. II. Nozioni di Calcolo delle variazioni L. 60 (L. 44).

3. Prof. ORAZIO LAZZARINO: *Corso di Fisica Matematica.* Fondamenti della dinamica dei sistemi materiali. — I sistemi rigidi pesanti con un punto fisso. — Sistemi semi-rigidi con un punto fisso. — Meccanica dei sistemi continui. L. 52 (L. 38).

4. Prof. GIUSEPPE MARLETTA: *Corso di Geometria Superiore.*—Geometria proiettiva degl' iperspazi L. 45 (L. 30).

5. Prof. ENRICO BOGGIO-LERA: *Corso di Geodesia.*—Fasc. I. Teoriche fondamentali. Calcolo della probalità. Teoria della compensazione degli errori. L. 55 (L. 40).

6. Prof. ORAZIO LAZZARINO: *Meccanica razionale.* L. 60 (L. 46).

***N. B.** — Gli abbonati a " NOTE E MEMORIE ,, o ad " ESERCITAZIONI MATEMATICHE ,, godono dello sconto del 15 %.*

I prezzi in parentesi sono per i Soci del C. M. C.

Ogni parte o fascicolo è legato in brochure e si spedisce raccomandato.

Definizioni di Numero

(Numero ordinale)

Da una « *Conferenza fatta all' Istituto Matematico dell' Università di Bologna* » dal *Prof.* ***Ettore Bortolotti***

Ricercando sui libri d'aritmetica che in epoche diverse fecero testo nelle scuole, le defizioni di numero, si trovano formule che variano, piuttosto che da autore ad autore, da tempo a tempo, e rispecchiano le vedute che, in un determinato momento storico si avevano per più plausibili, circa i fondamenti della scienza numerica.

Raccogliere quelle definizioni, vuol dire preparare materiale per la storia critica dello svolgimento del concetto di numero; concetto che è base essenziale dell' analisi matematica, e che, nei suoi successivi stadî di sviluppo, segna gli stadî successivi dello sviluppo del pensiero e della civiltà.

Ho già osservato [1] che in detta storia si possono distinguere tre periodi:

Nel primo periodo, che va sino ai primi decenni del secolo XVII, sono quasi esclusivamente seguiti gli indirizzi classici, quali furono posti dai *Pitagorici,* da *Platone*, da *Eudosso,* da *Aristotile,* ed estrinsecati, in concettoso compendio, negli *Elementi* di *Euclide.*

In questo periodo l' aritmetica è concepita come: *disciplina di quantità discreta ;* l' unità è definita « **per astrazione,** » come la *proprietà delle cose, per la quale ciascuna cosa è detta uno;* ed è considerata come *invariabile* ed *indivisibile.* Il numero, invece, viene considerato come *una collezione composta di unità ;* ed ha quindi una definizione che può dirsi « **genetica** » perchè afferma, stabilisce o dichiara la generazione di esso dalla unità.

Il secondo periodo incomincia quando, con la introduzione dei metodi infinitesimali nella scienza, accenna a scomparire quella sostanziale differenza fra *quantità continua* e *quantità discreta,* che gli

---

[1] Cfr. « E. Bortolotti » — *Definizioni di Numero — Numero Cardinale* — [Periodico di Matematiche — Serie IV. Vol. II. N. 5 (1922)].

antichi consideravano come caratteristica distinzione delle scienze geometriche dalle aritmetiche.

Ho già esposto i motivi che inducono a segnare l'inizio di questo periodo con la comparsa della *Geometria degli Indivisibili* di *Cavalieri* (2): la definizione di numero nuovamente adottata fu allora quella detta poi *Newtoniana,* che considera il numero come *rapporto di grandezze emogenee.*

Quasi tutti i trattati d'aritmetica scritti nel secolo XVIII e nella prima metà del secolo XIX, contengono una tale definizione; ma la dipendenza, che per essa veniva posta, del concetto di numero da quello di grandezza, richiedeva che quest'ultimo fosse preventivamente chiarito.

Occorreva perciò *definire la grandezza;* ma nessuna delle molte definizioni proposte dagli scienziati, e riportate nei testi, riuscì a soddisfare le esigenze di una critica informata a postulati logici sempre più precisi; talchè parve infine che *non fosse possibile il definir la grandezza senza ricorrere a quello stesso concetto di numero, che per mezzo della grandezza si era voluto introdurre.*

Si riconobbe così la necessità di abbandonare le vedute Newtoniane sul concetto di numero; e quello stesso movimento filosofico che portò al rinnovamento dei principî che sono a base della Geometria, si rivolse alla ricerca ed all'esame critico dei fondamenti logici, empirici e psicologici della scienza numerica.

Fino ad allora il *numero matematico,* era stato studiato nel suo aspetto *cardinale,* che ammette come idee primitive quelle di *collezione, di pluralità, di moltitudine, di estensione nello spazio;* ma sul finire del secolo XVIII, con gli scritti del *Kant* (3), del *de Condillac,* (4) di Condorcet (5) degli *enciclopedisti,* si incominciò a considerare

(2) loc. cit. — V. anche: E. BORTOLOTTI — Lo studio di Bologna ed il rinnovamento delle Scienze matematiche in Occidente — (Annuario della R. Università di Bologna per l'anno 1920-21).

(3) Cfr. p. es. « *Kritik der reinen Vernunft.* » 1. Ausgabe 1781.

(4) Cfr. La Langue des Calculs—(Opera Postuma) Paris. a. VI (1788)— Saggio sopra le origini delle cognizioni umane—(trad. Fassadoni) (1793)—Sez. IV— Delle operazioni con cui diamo dei segni alle nostre idee.

(5) Cfr. p. es. Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. (Paris a. VII, p. 78).

come possibile fondamento logico della aritmetica il concetto di *numero ordinale,* che ammette come elemento primitivo la *successione nel tempo;* mentre gli ammaestramenti del *Pestalozzi,* dell' *Herbart,* l' esempio della applicazione del *metodo euristico* all' insegnamento dell' algebra dato dal *Clairaut* (6) ed il rinnovamento degli ordinamenti scolastici, seguito in Francia ed in Italia nel periodo Napoleonico, rendevano possibile la introduzione di nuovi metodi e di nuove idee nell' insegnamento, anche elementare, della aritmetica.

Incomincia così un *terzo periodo,* di gran lunga più interessante di quelli ora ricordati; ma non ancora sufficientemente studiato nei riguardi dello svolgimento logico e cronologico delle idee, e della applicazione pratica che queste idee ebbero nell' insegnamento dell'aritmetica.

Questo periodo storico può dirsi caratterizzato dalla introduzione, nella scienza aritmetica, del *numero ordinale;* ma, insieme con questo aspetto del numero, continua a venire, in esso periodo, considerato l' antico, il *cardinale;* ed anche intorno a questo si moltiplicano le ricerche e gli studi.

Troveremo dunque ad un tempo: — definizioni di numero, che considerano il solo aspetto *ordinale,* — definizioni che si riferiscono all' aspetto *cardinale,* — definizioni che, implicitamente od esplicitamente, involgono entrambi gli aspetti del numero.

Le definizioni di numero potranno inoltre distinguersi secondo che esse seguono la *tesi empirica* o la *tesi idealistica:* cioè secondo che per esse si considera il concetto di numero come acquisito per mezzo di esperienze elementari su classi di oggetti materiali, realmente dati; oppure come *esistente in noi,* od acquisito col semplice esame riflesso del nostro pensiero, che opera con associazioni ed astrazioni puramente ideali, sopra classi di oggetti pensati. (7)

* * *

1. Taluni attribuiscono ad *Aristotile* la enunciazione del principio di dipendenza della nozione di numero da quella di tempo: (8) ma nel fatto egli dice semplicemente che:

---

(6) A. C. Clairaut *Eléments d' algèbre* — (Paris 1749).

(7) Cfr. F. Enriques — *I numeri reali,* da — Questioni riguardanti le matematiche elementari — Vol. I. (1912) pag. 376.

(8) Cfr. p. es., Encyclop., d. sc. Math. I., 1. fasc. 1. pag. 8.

« *...il tempo è il numero del movimento in rapporto all' anteriore*
« *ed al posteriore... ma il tempo è ciò che è numerato, non già ciò per*
« *cui noi numeriamo.* » [9]

Quel principio si trova, invece, espressamente enunciato nella *Critica della Ragion pura del* KANT [10] sotto la forma:

« *....il tempo è una necessaria rappresentazione, che è fondamento*
« *di ogni nostra nozione,... il tempo è dato a priori..., il numero non è*
« *altro che la unità della sintesi che io opero fra le diverse parti di*
« *una intuizione omogenea in generale, introducendo il tempo nella*
« *apprensione della intuizione* ».

2. Il medesimo concetto si rileva dalla dottrina dello SCHOPENHAUER [11], ed è esplicitamente ammesso dall' HAMILTON, il quale afferma che:

« *il tempo, considerato come una forma dell' intuizione, è il fonda-*
« *mento del concetto di numero,... e l' aritmetica è null' altro che la*
« *scienza dell' ordine nella progressione, o del puro tempo* [12].

3. Questo modo di introdurre il concetto di numero si connette a quello indicato dall' HELMHOTZ [13] il quale dice che:

« *.... noi determiniamo il numero degli oggetti, isolandoli l' uno*
« *dopo l' altro, e nominando ogni volta, a partire da uno, i numeri*
« *della* **Serie naturale**. *L' ultimo numero cui per tal modo si per-*
« *viene, si dice essere il numero degli oggetti numerati.*

« *I numeri sono dunque essenzialmente segni percettibili, visivi o*
« *tattili* [14] *i quali non hanno altra proprietà sostanziale, all' infuori*
« *di quella di essere situati sempre in un ordine determinato e di es-*
« *sere distinti l' uno dall' altro.*

---

(9) Fisica Cap. 16, lib. IV. (Trad. di *Saint. Hilaire*, Vol. II. pag. 237).

(10) KANT' S *Sämmtliche Werke*, III. pg. 144.

(11) *Die Welt als Wille und Vorstellung* (1819), trad. Burdeau 2 pg. 170. (Cit. nella Enciclopédie al loc. cit.). V. anche nelle trad. italiane di Savj-Lopez, al Vol. I, pag. 97: « *l' intuizione dei numeri è nel tempo solamente* ».

(12) Cfr. Trans Irish Acad. 17. (1837) pg. 293 — Lectures on quaternions — (1853) pref. pg. 2.

(13) Cfr. *Vorlesungen uber theor. Physik.* — Bd. I. §. 12. — pg. 30. Cfr. anche. *Philos. Aufs. zu Keller 's Jubil.* (1887), Zählen und Messen, erkentnis-theoretisch betrachtet.

(14) hörbare oder sichtbare oder fühlbare Zeichen.

« *Per ogni segno è perciò necessario che sia conosciuto il segno « successivo: quando questo sia noto, e si conosca il primo segno, al- « lora si saprà numerare.*

È da osservare per altro che in questa definizione non è esplicitamente enunciata la *dipendenza della nozione di numero dalla nozione di tempo:* ma che implicitamente si ammette, come *data a priori,* la *serie naturale dei numeri ordinali.*

4. Una più precisa determinazione di questo concetto è data dal KRONECKER sotto la forma seguente ([15]).

« *Io trovo il naturale punto di partenza per lo sviluppo del con- « cetto di numero nel numero ordinale; in questo noi possediamo una « sicura provvidenza* ([16]), *poichè esso ci fornisce una successione fissa « ed ordinata di contrassegni che possiamo applicare ad una schiera « di oggetti distinti e fra loro permutabili. La totalità di cotesti con- « trassegni è da noi compresa nel concetto di Numero degli oggetti di « cui si compone la schiera, e noi connettiamo in modo biunivoco la « espressione di questo concetto all' ultimo dei contrassegni adoperati.*

Vediamo anche qui il concetto di numero non necessariamente dipendente dalla nozione di tempo, ma legato alla presupposta conoscenza della successione dei numeri ordinali. Ed inoltre osserviamo che in questa definizione viene considerato anche l' *aspetto* **cardinale**, nella **Totalità** *dei contrassegni adoperati;* anzi, che in questa totalità si fa consistere il concetto di numero: l'ultimo contrassegno adoperato, cioè l' *ordinale,* non è che la *espressione di tale concetto.*

*
* *

5. Le definizioni dell' *Helmholtz* e del *Kronecker* non fanno che presentare, sotto forma più precisa, concetti che già da tempo erano stati enunciati ed introdotti anche in libri di testo elementari, specialmente in Germania. A riprova di ciò, si confrontino le date definizioni con la seguente, che si legge nella *Aritmetica* pubblicata nel 1846 da TH. WITTSTEIN: ([17])

([15]) Cfr. *Crelle 's Journ.* 101, (1887) — citato da HUSSERL — *Phylosophie der Arithmetik* — 1871 — pg. 197.

([16]) einen Vorrat gewisser.

([17]) TH. WITTSTEIN. *Lehrbuch der Arithmetik*—(Hannover 1845— Vol. I. pg. 3).

« *L' Aritmetica ammette come elementare il concetto di numero.*

« *Se, nel fatto, si ha che fare con parecchie cose, la cui differen-*
« *ziazione non deve esser presa in ulteriore considerazione, si pongono*
« *tali cose, secondo un ordine arbitrario, in corrispondenza coi nomi*
« *uno, due, tre,..., e si connette con ciascuno di questi nomi il concetto*
« *del posto che la corrispondente cosa occupa nella schiera presup-*
« *posta.*

« *Questi concetti sono i Numeri, e la loro schiera forma la serie*
« *naturale dei numeri.*

6. Dopo l' *Helmholtz* ed il *Kronecker* furono moltissimi gli autori di aritmetiche elementari che seguirono, nel definire il numero, i modelli da essi tracciati.

Anche in Italia ne abbiamo dovizia, e sono troppo noti perchè meriti conto che io qui imprenda ad enumerarli.

Per citarne un esempio riporterò dal *Palatini* ([18]) le definizioni:

« *I numeri interi assoluti sono lo 0 ed i numeri della serie na-*
« *turale...*

« *... Contare gli oggetti di una collezione significa far corrisponde-*
« *re ad un oggetto di questa il numero 1, ad un altro il numero 2 e*
« *così via finchè siansi considerati tutti gli oggetti della collezione.*
« *Il numero che corrisponde all' ultimo oggetto si dice numero degli*
« *oggetti della collezione.*

Altri, pur muovendo dalla successione naturale dei numeri ordinali, considera nella generazione di questa l'azione del pensiero umano, accostandosi così alla veduta idealistica, di cui fra poco faremo parola.

Notevole, per lucidità di esposizione, la definizione proposta, su questo tipo, dal Beppo Levi: ([19])

« *Il contare è l'esplicazione di una facoltà particolare della nostra*
« *intelligenza, la facoltà di concepire per successione: e numeri sono gli*
« *elementi di una successione tipica, (di parole o di segni qualsiasi)*
« *in cui tale facoltà si concreta.*

([18]) Cf. Palatini Francesco. *Aritmetica ed Algebra* (Torino—G. Gallizio) senza data ma posteriore al 1898.

([19]) Cfr. Beppo Levi. *Il primo avviamento alla aritmetica* (da *L'Arduo* — 1922 4°. 2.)

*
* *

7. Alla *tesi empirica*, che considera la successione naturale dei numeri ordinali come *esistente fuori di noi*, ed a noi rivelata per mezzo di esperienze elementari sopra oggetti del mondo reale (il Kronecker dice « a noi rivelata come *Dono di Dio*, dalla divinità ») ([20]), contrasta la *tesi idealistica*, che considera la successione dei numeri come generata da atti del pensiero umano successivamente ripetuti ed indefinitamente ripetibili.

8. La considerazione del numero quale « *ente astratto liberamente formato dall'atto del numerare* », si riscontra già presso gli antichi autori.

Tale, infatti, è il **numero matematico**, definito dal TARTAGLIA come « *l'uso e l'atto del numerare nelle cose diverse* » ([21]).

Il CONDILLAC. nella *Langue des Calculs*, afferma esplicitamente *che: la numeration fait le nombre* ([22]).

Ed il GAUSS dichiara che: *il numero è una pura creazione della nostra mente; in opposizione allo spazio, che ha una realità fuori di noi* ([23]).

9. Nel concetto di numero interviene così un elemento *psicologico*, assai bene avvertito dal nostro ROMAGNOSI, ([24]) (prima ancora che dall' HERBART) ([25]) e da lui espresso al modo seguente:

« Se con un concentrato raccoglimento interroghiamo il nostro « senso interno, noi travediamo che in tutte le operazioni matema- « tiche intervengono due specie di concetti, sempre associati. Il pri- « mo lo chiamo *aritmetico*, ed il secondo geometrico.

« ... *l'***uno** *aritmetico è segno di una esistenza e nulla più. L'* **uno** « *geometrico, per lo contrario, indica una data estensione finita.*

([20]) Cfr. K. ZSIGMONDY « *Zum Wesen des Zahlbegriffes und der Mathematik* » Antrittsrede gehalten bei der feierlichen Rektors — Inauguration auf 26 Oktober 1918 — Technische Hochschule in Wien — (Wien 1919) — pg. 15, nota 10.

([21]) Cfr. *General Trattato di Numeri e Misure*, Lib. I (Venezia 1556) carte 1, 2.

([22]) Cfr. E. B. DE CONDILLAC. *Langue des Calculs* (Opera postuma) Paris a. VI. (1798) p. 12.

([23]) Cfr. *Lettera a F. W. Bessel* — 9 Aprile 1830 — Werke — 8 — pg. 201.

([24]) Cfr. ROMAGNOSI — *Dell'insegnamento primitivo della matematica* — (Milano 1822) — pg. 53-57.

([25]) Loc. cit.

« Da ciò ne viene che *il numero aritmetico è tutto metafisico;* il « geometrico, all'opposto, è tutto fisico.

« Ma per quanti sforzi possiamo fare, non giungiamo mai a « scompagnare il senso geometrico dall'aritmetico. Così si formano « grandezze aritmetiche, come si formano grandezze geometriche.

« Ma, tostochè voi formate grandezze aritmetiche, voi togliete « all'uno aritmetico la indivisibilità che gli prestaste; e sostituite « un indefinito dimensivo, che in sostanza coincide con l'uno geo- « metrico. Allora, secondo le funzioni che **voi** esercitate, egli prende « gli aspetti, ora di elemento, ora di un tutto, ora di misuratore, « ora di misurato, ora di componente, ora di dividente, ora di com- « plessivo, ora di segregato....

« Nè la cosa può accadere diversamente, perchè *l'* **io** *che pensa,* « *che distingue, che paragona, che disgiunge, che connette...* è **uno**; e « tutti questi concetti non sono che l'io stesso, il quale esiste ora « in una, ora in un'altra delle maniere suddette.

10. A questo modo di vedere si accosta il BAUMANN quando afferma che: *i concetti aritmetici, quello di numero e di operazioni numeriche, sorgono per mezzo di una operazione dello spirito; così si creano* **in noi**, *delle rappresentazioni puramente spirituali delle matematiche.* (26)

Ed il M. SIMON, nettamente afferma che *l'unità e la pluralità* « *sono concetti soggettivi, essi* **esistono in noi, non nelle cose.** (27)

Infine il DEDEKIND, nei suoi, ormai classici, opuscoli, dice:

« *Io considero l'intiera aritmetica come una conseguenza necessaria* « *o per lo meno naturale, del più semplice atto — la numerazione —,* « *ed il numerare, non è altro che la successiva generazione della se-* « *rie dei numeri naturali.* (28)

« ... *I numeri sono libere creazioni della mente umana, essi servo-* « *no come mezzo per comprendere facilmente ed esattamente le relazio-* « *ni fra le cose.* (29)

(26) Cfr. BAUMANN Die Lehre von Raum, Zeit ùnd Mathematik in der neueren Philosophie (Berlin 1869) II. pg. 669 (cit. da Husserl loc. cit. pg. 44 - 45).

(27) Cfr. MAX SIMON. *Methodik der Elem. Arithm.* (1906) pg. 6.

(28) Cfr. R. DEDEKIND. *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) pg. 12.

(29) Cfr. R. DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) pg. VII, VIII.

Citeremo ancora:

WUNDT W. [*Logik* — I. (1880). pg. 469]: « Zahl ist...., die abstrachteste

*
* *

11. Le nuove dottrine filosofiche, presto trovarono eco nel campo della pura matematica. Il modo puramente idealistico e formale di concepire il numero, si riscontra diggià anche in libri matematici pubblicati verso la fine del secolo XVIII. Nel *System der Elemente der allgemeinen Grossenlehre,* pubblicato da F. MURHARD nel 1798, si legge: (30)

« Essendo date più cose A, B, C, D.., possiamo ad ognuna di « esse considerare come applicato un *contrassegno*, il quale può an- « che essere comune ad esse.

« Il concetto comune a questi contrassegni lo voglio indicare « con x, e soltanto questo x voglio ritenere dinanzi agli occhi.

« Qui dunque io penso uno stesso e medesimo x, ma lo penso « come ripetuto; perciò questo x deve essere contraddistinto dal « posto che esso occupa nelle schiere ove io lo penso.

« Quando io computo le applicazioni dell' atto del pensiero « (Denkakt) che in me genera questo x, e per mezzo della cui ripe- « tizione risulta una schiera di x, allora concepisco un *numero*.

« In questa operazione del contare, io posso arrestarmi al pri- « mo termine della schiera, o proseguir fino ad un elemento determi- « nato, oppure continuare senza propormi alcun limite.

« Ciò produce, nell'ordine suddetto, la *unità, un numero deter- « minato e finito, o la infinita serie dei numeri.*

« *Numero è dunque nient' altro che il risultato del contare, esso « vien determinato ogni qualvolta io abbia ripetuto un determinato atto « del pensiero.* (31)

« Quando si voglia indicare ciò che si è concepito come nume- « ro, si usa un Segno, il quale vien detto **Segno numerico**, od « impropriamente *Numero*.

« In questo senso, Numero non è altro che il simbolo di un « numero:

« Form, in welcher das Gesetz des discursiven Denkens, wonach jeder Zusam- « mengesetzte Gedanke aus einzelnen Denkacten besteht, zum Ausdruck kommt ».

(30) Lemgo — 1798 — pg. 66.

(31) Eine Zahl ist also nichts anders, als Resultat des Zahlers, es wird dadurch bestimmt, wie oft ich einen gewissen Denkakt wiederholt habe.

« *Il simbolo di un numero astratto, è dunque un contrassegno gene-*
« *rale, poichè egli indica solamente quante volte è ripetuto un certo atto*
« *del pensiero, senza dire quale sia questo atto del pensiero.* (32)

12 L'opera del MURHARD, sotto molti rapporti interessantissima, è, a quanto mi consta, sconosciuta in Italia, e poco nota anche in Germania, ove si fa risalire l'origine della trattazione formale della aritmetica ordinale alla *scuola di* MARTIN OHM. (33)

« *L'Ohm ha, quale predecessore di Hankel,* (così afferma il M. Simon)
« *per primo assunto un punto di partenza puramente formale.*

« Quell'uomo, ricco di dottrina, provvisto di spirito vivace,
« amante del rigore, alieno da pedanterie; ha avuto la disgrazia di
« rimanere per lunghi anni collega di facoltà con giganti della scienza,
« quali *Dirichlet, Kummer, Jacobi, Steiner...* (34) perciò egli non venne
« abbastanza apprezzato.

L'opera innovatrice di M. OHM, viene così caratterizzata da M. CANTOR : (35)

« Presso gli antichi la geometria precedeva la Aritmetica; ed i
« teoremi della aritmetica avevano valore solo in quanto essi erano
« passibili di una interpretazione geometrica.

« Presso i matematici moderni *Martin Ohm e la sua scuola* par-

---

(32) Das Symbol für eine bestimmte unbenannte Zahl, ist schon ein allgemeines Zeichen, weil es bloss anzeigt, wie oft ein gewisser Denkakt wiederholt ist, aber mit dem Denkakt selbst nicht bekannt macht.

(33) Cfr. M. OHM — *Elementarzahllehre* (1816) — *Versuch eines vollkomm. cons. System* (1822) — *Die reine Elem. math.* (1826) — *Der Geist d. Math. Analysis, und ihr Verhaltnis z. Schule* (1842-46) etc. — (Cfr. M. SIMON — *Didaktik und Methodik* (1908) pp. 167-168).

(34) Cfr. *M. Simon.* loc. cit, Il M. Simon, continua dicendo :

« Sehr interessant ist in dieser Hinsicht die Kritik *E. E. Kummers,* in den
« Jahrbüchern fur wissenschaftliche Kritik von August 1842, über OHM'S GEIST,
« die heute wohl gemildet würde. »

Aggiungerò che nella Prefazione della già citata Aritmetica di WITTSTEIN (1846) si legge: « Unter den Neuern, welche die Aritmetik in dem hier angedeuteten
« und in der Geschichte der Arithmetik so entschieden ausgeprägten Geiste zu
« behandeln unternommen haben, *muss vor allen Ohm's gedacht werden,* als dessen
« eigentliches Verdienst gerade die grelle Hervorhebung der genannten Ansicht
« bezeichnet werden muss..... ».

(35) Cfr. *Grundzüge einer Elementararithmetik* — (Heidelberg 1885) pag. 2.

« tono dal principio opposto. Per loro le formule hanno valore per « se medesime, anche senza che esse sottointendano nessun oggetto « determinato ».

Lo stesso Ohm, nella prefazione alla 2ª edizione (1828) della opera: *Versuch eines vollkommen consequenten Systems des Mathematik* (36) avverte:

« Nelle più svariate manifestazioni del calcolo, l'autore *non ha « in vista proprietà delle grandezze; ma* **proprietà delle Opera- « zioni**, *le quali proprietà risultano necessariamente dalle considera- « zioni su numeri, e si traducono poi in proprietà e relazioni valevoli « nel dominio della fisica e della psicologia* ».

La trattazione formale della aritmetica è dall' *Ohm* basata sulla seguente definizione:

« Contare, vuol dire formare determinate espressioni mediante le leggi delle Operazioni (37).

La definizione di numero è fondata sui seguenti principi:

« I numeri, e con essi l' unità astratta, sono da considerare « come dati.

« La unità si indica col segno 1.

« I numeri sono da noi concepiti come:

« 1) disposti in una serie, cosicchè per pervenire ad uno di « essi, noi possiamo lasciar scorrere tutti i precedenti, a partire da 1; « e noi diciamo che di due numeri della serie il seguente è mag- « giore ed il precedente minore,

« 2) tutti gli elementi della serie numerica sono l'uno dall'altro « distinti,

« 3) sono l' uno con l' altro combinabili per generare un nuovo « numero, e noi sempre operiamo su due numeri per formarne un « terzo, e poi su questo e su di un nuovo; per modo che ogni volta « non si considerano insieme mai più di due numeri (38).

---

(36) pg. 7.

(37) Cfr. Ohm, *Die Arithmetik bis zu den höheren Gleichungen* (3. Aufl. Berlin 1844)... Rechnen heisst gegebiene Ausdrücke mittelst der Gesetze der Operationen umiformen.

(38) Ho tradotto liberamente. Per maggior precisione riporto l'originale tedesco: « Die Zahl und mit ihr die absolute (abstrakte) Einheit, wir hier, als

13. Queste proposizioni sono certo notevolissime, specialmente in riguardo al tempo in cui furono formulate (intorno al 1820), ma il sistema deduttivo che sopra di esse fu costruito dall' Ohm e dalla di lui scuola, trovò scarso favore presso i logici puri, e fu presto abbandonato dagli insegnanti, i quali ad esso preferivano l' antico, più intuitivo e più perspicuo.

Il sistema di postulati, più tardi enunciato dal DEDEKIND, certamente più perfetto dal punto di vista della logica matematica, non fu (almeno al suo primo apparire) giudicato che di mediocre interesse, nel riguardo della metodologia pratica, e non ebbe forza di staccare i cultori di matematica elementare dagli antichi principi.

Un vero, profondo rinnovamento nei principî e nei metodi che reggono l' insegnamento della aritmetica elementare è avvenuto per opera di *G. Peano,* e della di lui scuola. [39]

La pubblicazione degli *Arithmetices Principia* (1889) e le discussioni che, sui fondamenti della aritmetica, seguirono nella *Rivista di Matematica* (diretta dallo stesso *Peano*), promossero un rigoglioso rifiorire di studi, ed una ricca produzione di libri scolastici; improntati a senso critico ognor più raffinato, talchè su questa materia l' Italia

---

uns gegeben angesehen. Die Einheit bezeichnet man durch das Zeichen 1. (Eins).

Die Zahlen erscheinen uns:

1) in einer Reihe, so dass wir um zu einer zu gelangen alle vorhergehenden von der 1 ab, an unsern Geiste vorübergehen lassen müssen; und wir nehmen jede folgende Zahl die *grössere,* so wie jede vorhergehende die *kleinere*;

2) als durch diese Folge von einander verschieden.

3) als mit einander verbindbar zu einer neuen Zahl, und zwar dergestalt, dass wir immer erst zwei Zahlen zu einer dritten, und diese dann erst wieder mit einer neuen verbinden, so dass jedesmal nie mehr als zwei zahlen mit einander verbunden werden.

(39) Cfr. O STOLZ und F. A. GMEINER. *Theoretische Arithmetik* (2a ed. 1911—) pag. 13. — « Das soeben erwähnte Verfahren von *R. Dedekind;* die naturlichen « Zahlen einzuführen und damit den Grund für das System der Arithmetik zu « legen, erscheint als *ziemlich umständlich. Bei diesem Umstande wird der gewöhnliche « Vorgang, die natürliche Zahlen als solche an die Spitze dieser Systems zu stellen, « stets seine Berechtigung behalten.*

« Eine fertige Definition einer bestimmten natürlichen Zahlen, lässt sich « nicht gehen, *man kann nur die Lehre von den naturlichen Zahlen nach* PEANO « *auf etlicher Grundsätze zuruckführen* ».....

ha conseguito un primato, che gli stranieri non ci disconoscono. ([40])

L' ENRIQUES avverte che « i principî della teoria ordinale dei « numeri sono stati formulati dal Peano in un sistema deduttivo « che tende a ridurre al minimo le premesse della intuizione e ri- « sponde ad una preoccupazione di economia e semplicità algoritmi- « ca » ([41]), il sistema di *Peano* si presta perciò ottimamente, sia ad una trattazione compiuta e logicamente perfetta delle teorie aritmetiche, sia ad una chiara, perspicua, efficace compilazione didattica, di trattati elementari.

Abbiamo infatti molti, ottimi testi scolastici (Burali Forti — Gazzaniga — Nassò — Catania....) pubblicati in Italia secondo l' indirizzo del Peano, ed anche nelle *Theoretische Arithmetik* di STOLZ und Gmeiner ([42]) è espressamente seguito quel medesimo indirizzo.

14. Il PEANO non dà vera e propria definizione di numero; ma il concetto di numero viene da lui determinato mediante il seguente sistema di proposizioni:

1) zero, è un numero

2) ogni numero ha un successivo

3) due numeri aventi eguali successivi sono eguali

4) lo zero non è successivo a nessun numero

5) se una proposizione è vera per il numero zero, e se, essendo vera per un numero, è vera anche pel successivo, tale proprietà è vera per tutti i numeri (principio di induzione).

Lo zero, ed il numero intero, sono considerati come idee primitive; tale è pure quella di successivo, e « mercè le proposizioni pre- « cedentemente ammesse, i numeri vengono ordinati in una se- « rie, rispetto alla operazione successivo. Viceversa, l' ipotesi della « esistenza di una serie ben ordinata di numeri, corrisponde alle « premesse di *Peano,* se è soddisfatto il postulato di induzione » ([43]).

([40]) Sarebbe interessantissima la storia dei progressi che, per opera di matematici italiani ha fatto in questi ultimi tempi lo studio dei fondamenti della aritmetica. Non mi è possibile qui toccare, nemmeno fuggevolmente, così vasto argomento. In questi giorni è stata annunziata la prossima pubblicazione di un libro di A. NATUCCI, che sarà appunto consacrato a questo soggetto.

([41]) Cfr. ENRIQUES, loc. cit. pg. 395.

([42]) loc. cit.

([43]) Cfr. ENRIQUES loc. cit.

La introduzione di questi concetti nello insegnamento elementare, ha conferito ai corsi di aritmetica razionale nelle nostre scuole medie, un assetto logico rigoroso e completo. Ecco, per citare uno degli autori più favorevolmente noti, come è introdotto il concetto di numero nella *Aritmetica Razionale per i Ginnasi Superiori di* S. CATANIA:

« Ammettiamo come primitive le idee di *numero* e di *successivo* « di un numero.

« Determiniamo il valore di queste due idee primitive mediante « le seguenti quattro proposizioni primitive:

« I. Esiste almeno un numero.

« II. Il successivo di un numero è un numero.

« III. Due numeri, nessun dei quali sia successivo di un nu- « mero, sono sempre eguali fra loro.

« IV. In qualsivoglia classe esistente di numeri esiste almeno un « numero che non è il successivo di alcun numero della classe ».

*
* *

15. Non è mia intenzione l'inoltrarmi in considerazioni critiche sul concetto di numero; ma solo di **raccogliere le varie definizioni di numero (intero positivo).**

Ricorderò tuttavia, come notizia storica, che al modo ordinale di definire il numero furono fatte obbiezioni di varia natura.

In primo luogo si è richiesto che *fosse dimostrata la invarianza del numero cui si perviene cambiando l'ordine in cui gli oggetti di una data collezione si suppongono considerati.* [44]

Ma questa domanda non ebbe risposta soddisfacente e perciò tale invarianza dovette essere espressamente postulata.

In secondo luogo si è osservato che « *il supporre come idea*

---

[44] Il *postulato della invarianza del numero ordinale*, è stato enunciato dallo SCHRÖDER (Lehrbuch der Arithm. und Alg — Leipzig 1873 1 pg. 14). — Le dimostrazioni di questo principio date da L. KRONECKER (Philosoph. Aufsätze zu Keller 's Iubil. 1887) da H. von HELMHOTZ (Wiss. Abh. 3. Leipzig. 1895, pg. 372) furono criticate, principalmente da G. CANTOR. (Z. Philos, 91 — 1887 — pg. 90) e da L. COUTURAT (De l' Infini mathém. Paris 1896 pg, 313 — [Cfr. Encyclop. d. Sc. Math. I. 1_1, pg. 6].

primordiale la nozione della intiera classe dei numeri naturali e delle proprietà ad essa relative, ha troppo del dogmatico. ([45])

Infine che: « *Quei grandi matematici che introdussero il concetto « di numero ordinale (Kronecker ed Helmhotz) considerarono solo il for- « male, cieco processo di formazione, misconoscendo il suo intimo signi- « ficato simbolico, e scambiando il segno con la cosa significata.* » ([46])

16. Questa confusione non è certo in *Kronecker*, ma veramente si presenta a chi prenda letteralmente le definizioni date dalla maggior parte degli autori che seguirono quell' indirizzo.

Così, ad esempio, a chi legga, in JAMES MILL, ([47]) « *numero « è un* **nome comune** *per i concetti due, tre..., i numeri sono in senso « stretto* **nomi di oggetti** »...

E, con maggior ragione, a chi riscontri, in trattati scolastici a tipo ordinale, definizioni come la seguente:

« *chiamasi numero degli elementi di un gruppo la* **parola** *alla quale « si arriva nel confronto fra gli elementi del gruppo e la serie natu- « rale dei numeri incominciando dalla sinistra.* » ([48])

Cui a ragione si potrebbe obbiettare con l' HUSSERL che « *cam- « biando i nomi dei numeri anche i numeri dovrebbero cambiare* ».

17. Ma pur evitando una così gretta interpretazione della veduta

---

([45]) Cfr. D. HILBERT. Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. (1909) Anhang VII. *Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* (Dalle Verhandlungen des III Intern. Math. Kongr. in Heidelberg 1904) pp. 263-264 ;..., « L. KRONECKER hat « bekanntlich in dem Begriff der ganzen Zahl das eigentliche Fundament der « Arithmetik erblicht,..... Insofern möchte ich ihn als *Dogmatiker* bezeichnen; « er nimmt die ganze Zahl mit ihren wesentlichen Eigenschaften als Dogma hin « und blicht nicht weiter rückwärts ».

A ciò il prof. K. ZSIGMONDY (della *Technische Hochschule* di Vienna) aggiunge: « Mit dieser Bemerkung stimmt die Äusserung *Kroneckers* welche ich im Jahre « 1891 gehört habe, überein : *die ganze Zahl sei ein Geschenk Gottes, alles andere « in der Mathematik Menschenwerk* ».

[Cfr. « Zum Wesen des Zahlbegriffes und der Mathematik, von Dr. KARL ZSIGMONDY — (Antrittsrede gehalten bei der feierlichen Rectors — Inauguration am 26 Oktober 1918) pg. 15, nota 10].

([46]) Cfr. HUSSERL *Philosophie der Arithmetik* — (1891). pg. 198.

([47]) Cfr. Analysis — II, 4, 92 (citato da Husserl loc. cit. pg. 88, 180).

([48]) Cfr. A. FONTEBASSO — *Aritmetica razionale per il Ginnasio superiore* 1ª Ed.— (senza data) n.° 20, pg. 6.

formale, alcuni autori espressamente dichiarano di voler preferire le definizioni che fanno consistere il numero nel segno numerico materiale e sensibile, perchè « *così almeno non può esser posta in dubbio* « *la esistenza effettiva di numeri così fatti.* » (49)

Ad esagerate preoccupazioni critiche, si vengono così ad opporre argomentazioni poco persuasive; poichè, invero, « *non può il mate-* « *matico creare il numero col solo definirlo, come non può il geografo* « *creare un mare col solo tracciare una linea sulla carta geografica, e* « *col dichiarare, io chiamerò mar giallo questa distesa di acqua.* » (50)

*
* *

18. Parallelamente alla *aritmetica dei numeri ordinali,* prendeva nuovo sviluppo l' antica *aritmetica dei numeri cardinali,* con la considerazione e lo studio della generazione psicologica e del contenuto essenziale dei concetti di *unità* e di *pluralità,* quali elementi primordiali nella formazione del concetto di numero.

E, dal confronto dai numeri cardinali con gli ordinali, si traevano poi argomenti per lo studio dei procedimenti che conducono al *concetto astratto di numero.* (51)

19. Ma prima di trattare questa materia accennerò ad una evasiva riposta, che suol darsi per soddisfare la domanda « *che cosa è numero ?* », che naturalmente deve porsi chi si appresta a definire il numero.

La risposta è la seguente:

Numero è la risposta alla domanda: **quanti?**

In sostanza si dice che *le domande*: **qual numero?, quanti?**

---

(49) Cfr. E. Heine, *die Elemente der Funetionslehre* (Crelle — 74 pg. 173).
« Ich stelle mich bei der definition auf den rein formalen standpunkt in dem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, so dass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht. »

(50) Cfr. G. Frege *Grundgesetze der Arithmetik.* (Jene 1893). Vol. I. pg. XIV.
« Wie der Geograph kein Meer schafft wenn er Grenzlinien zieht und sagt:
« den von diesen Liuen begrenzten Theil des Wasserfläche will ich Gellbes
« meer nennen, so kann auch der Mathematiker sein Definiren nicht eigentlich
« schaffen. »

(51) Cfr. Enriques, loc. cit., pg. 374.

sono equivalenti, o, in altri termini, si afferma che *numero esprime quantità.*

Un tal modo di definire il numero, forse appunto a causa della sua imprecisione, ha avuto buona e costante fortuna.

Si trova enunciato nella *Psicologia dell'* HERBART ([52]) sotto la forma:

« *Zahl ist jede mögliche Antwort auf die Frage* **wie viel?** » e, letteralmente presa, escluderebbe dalla classe dei numeri lo zero e l'unità. Tuttavia critici arcigni, quali l'*Husserl*, fanno ad essa buona accoglienza, e libri elementari, giustamente apprezzati fra noi e che nelle scuole fanno ottima prova, ([53]) l'assumono quale definizione.

Altri l'usa con qualche modificazione formale come;

« *Numero è una parola mediante la quale si esprime quanti sono*
« *gli oggetti di una collezione data.* ([54])

« *Il numero esprime quante siano le unità di una collezione qual-*
« *sivoglia.* ([55])

« *Nombre est l'expression scientifique de l'idée sensible de plu-*
« *ralité* ([56])

« *... combien il y a d'objets dans ce groupe?....., c'est le nombre*
« *entier qui nous permet d'atteindre ce but. Nous dirons donc que le*
« *nombre entier sert au denombrement des objets.* ([57])

Dunque, in conclusione, *numero è ciò che serve a numerare.* E questo almeno è poco, ma sicuro.

***

20. Gli antichi avevano posto a fondamento del concetto di numero cardinale, *l'idea di una cosa sola;* ma quando si è esaminata la formazione psicologica di questa idea, si è visto che *non si può concepire una cosa sola,* se non si pensa ad altre da cui quella si

---

([52]) HERBART — Psycol. als. Wissensch. (1825) II. § 116, pg. 162 (Cit. da *Husserl*, loc. cit. pag. 143).

([53]) Cf. S. PINCHERLE — *Gli elementi della Aritmetica.*

([54]) A. FAIFOFER. Elementi di aritmetica. [XIV edizion (1895)]. pg. 6.

([55]) G. INGRAMI — *Aritmetica* — (1890).

([56]) DELBOEUF — *Logique Arithm* — (Liége — 1877).

([57]) E. HUMBERT. Traité d'Arithm. (1893).

immagini distinta. Perciò *l' idea primitiva non può essere quella di unità ma quella di pluralità o di collezione.*

L' HERBART nella sua *Psicologia*, già citata, afferma: *non esser vero che i numeri maggiori di uno nascano dall'uno; ma che, tutt' al contrario, è l'unità che nasce dalle pluralità.* ([58])

Anche l' HUSSERL dice che: *la base della Astrazione non è costituita dai singoli elementi, bensì dal concreto aggregato in cui essi si trovano riuniti, considerato come una totalità.* ([59])

Ed il MACH osserva che: *non esiste una cosa sola, nel senso proprio della parola.* ([60])

21. Bisogna dunque concepire l' unità come *una delle parti onde risulta una data collezione.*

Ma, quando parliamo di *parte*, presupponiamo la conoscenza del *tutto*, o della *pluralità*: di quale elemento ci gioveremo allora per definire la pluralità, cioè il numero?

22. C' è tutta una schiera di matematici e di filosofi che pretendono di *riscontrare la caratteristica della pluralità nella diversità che intercede fra gli oggetti da numerare.*

Citeremo, ad esempio, lo SCHUPPE, pel quale: « ... *ciò che non* « *si può differenziare non si può numerare. Il numero afferma solo* « *diversità, senza precisare il carattere differenziativo* » ([61]); lo JEWONS, il quale afferma che: *numero è nome che significa diversità* ([62]), e finalmente l' HUSSERL, il quale pure dice essere: *numero, nel senso più vasto della parola, null'altro che una forma vaga della diversità* ([63]).

Un riflesso di queste idee è nella definizione, che spesso si

([58]) Cfr. Bd. II. pg. 662 : « *Es entstehen die grösseren Zahlen nicht aus der Eins, sondern gerade ungekehrt die Eins aus der Merheit* ».

([59]) loc. cit. pg. 13.

([60]) Cfr. E. MACH. Erkenntnis und Irrthum (Leipzig. 1905) pg. 13. (cit. da *K. Zsigmondy*, loc. cit. nota 22: « ... dass ein *isoliertes Ding* genau genommen « nicht existiert. »).

([61]) Cfr. SCHUPPE — *Erkenntnistheoretische Logik* — p. 405 (cit. da *Husserl* — loc. cit. — pg. 51).

([62]) Cfr. JEVONS. *The principle of. Science.* [2a ed. (1883)] pg. 156.

([63]) loc. cit. pg. 50.

incontra nei testi di aritmetica; *L'idée de nombre entier résulte, par abstraction, de l'idée d'une collection d'objets distinctes* (64).

23. Ma, d'altra parte, è possibile concepire il numero come composto di unità fra loro diseguali?

Ciò negano risolutamente i filosofi: HOBBES (65), HERBART (66), ST. MILL. (67) DELBOEUF (68)...., ed anche P. DU BOIS REYMOND esprime tale opinione affermando che:

« *il numero è ciò che rimane nella nostra anima quando svanisce* « *tutto ciò che fa differire le cose, e rimane solo l'immagine del fatto* « *che esse erano separate* (69).

24. Per conciliare questa disparità di idee, parve buon espediente il seguire la *veduta idealistica* anche nella definizione di *numero cardinale,* accostando così questo concetto a quello di numero ordinale.

I numeri cardinali, infatti, si riferiscono a *classi (collezioni),* gli ordinati a *successioni,* cioè a classi ordinate. *Per una classe ordinata l'ordinale dell'ultimo elemento è il cardinale della classe.* (70)

Secondo questa veduta, nella generazione del numero cardinale si riscontrano quattro successivi momenti:

I. *La facoltà del nostro spirito di sceverare nettamente singoli obbietti dal groviglio delle immagini esistenti nel nostro mondo ideale.*

II. *La capacità di comprendere in un unico concetto, quello di* **classe**, *anche infiniti di tali obbietti, in relazione con altri pensati insieme con essi.*

III. *L'applicazione del principio di* **corrispondenza** *alla formazione del concetto di* **classi equivalenti.**

---

(64) Cfr. J. TANNERY — Cours Complet de Mat Elém., publié sous la diréction de *G. Darboux.* (1900) pg. 57 — Cfr. anche BACHMANN — Nieder Zahlentheorie (1902).

(65) « Die Zahl setz in Mathematik unter sich *gleiche Einheiten* voraus » (cit. *Husserl* — loc. cit. — pg. 154).

(66) Cfr. loc. cit. II. pg. 160 « ... *Jede Zahl nun bezieht sich auf solche Weise* « *auf einen allgemeinen Begriff der Gezählten...* ».

(67) *Logic* — lib. II. Cap. VI.

(68) Cfr. *Logique Algorithmique* — loc. cit. — *L'égalité des unités,* telle est l'hypothèse fondamentale de l'arithmétique.

(69) Cfr. *Allg. Functionentheorie* — pg. 16 — Cfr. anche MUHRARD. al loc. cit.

(70) Cfr. *Enriques* — loc. cit. — pg. 376.

IV. *La concezione della* **totalità degli elementi** *appartenenti ad una qualunque delle classi fra loro equivalenti* ([71]).

25. Cotesti momenti sono nitidamente rispecchiati nelle proposizioni del CAPELLI:

« *Qualunque oggetto od ente, in quanto venga da noi pensato, è*
« *atto a risvegliare in noi l' idea di unità,*
« *Ogni aggregato dà origine ad un numero,*
« *Aggregati coordinabili danno origine ad uno stesso numero,*
« *Aggregati non coordinabili danno origine a numeri diversi* ([72]).

E sono implicitamente riconosciuti anche nelle **definizioni nominali di Russell**:

« *Due classi si dicono equivalenti quando si può stabilire fra di*
« *esse una corrispondenza univoca e reciproca.*
« *Numero cardinale è una classe di classi equivalenti.* ([73])

Analoga a questa è la definizione data dal CIPOLLA ([74]) nella sua *Analisi algebrica,* essa ha pure carattere ordinale, ma è riferita ad una relazione egualiforme qualunque.

***

26. Nei trattati aritmetici scritti in questi ultimi anni, si riscontrano entrambi gli indirizzi: il *cardinale,* l' *ordinale;* il primo di preferenza nei manuali di aritmetica pratica, l'altro in quelli di aritmetica razionale.

E, quasi per regola costante, al *concetto astratto di numero* vien sostituito il *segno numerico* ad esso corrispondente. ([75]) Ciò perchè, come giustamente osserva il *Cappelli* ([76]):

([71]) Cfr. K. ZSIGMONDY — *Zum Wesen des Zahlbegriffes...* loc. cit. pg. 7.

([72]) Cfr. A. CAPELLI — *Elementi di aritmetica razionale e di algebra* (Napoli 1902).

([73]) Cfr. The principle of. mathematics (1903), pg. 116, 136. — Cfr. anche i « *Principia Matematica* » di RUSSEL e WHITHEAD (Cambridge, 1912).

([74]) Palermo, ed. Capozzi, 2ª edizione, 1921, p. 28.

([75]) Cfr. p. es. l' *Aritmetica pratica di* E. BORTOLOTTI (Albrighi e Segati 1920) — Quella di G. VIVANTI (1920) ove si dice che *numero è la notazione, il segno corrispondente alla pluralità.* — Quelle di A. CAPELLI, M. DE FRANCHIS,....

([76]) loc. cit. pg. 11.

« ... nella pratica dei calcoli, colla parola *numero* si suole inten-
« dere indifferentemente così l' una cosa come l' altra.

« Ciò non è, come è facile comprendere, di alcun danno. Chè « anzi, si ha il vantaggio di sostituire in certo modo ad un ente « astratto (e quindi di origine in gran parte soggettivo) qual è il nu- « mero, qualche cosa di obbiettivo, cioè il simbolo stesso che lo « rappresenta.

« Da quest' ultimo punto di vista sembra quindi opportuno di « dare la definizione di numero come segue:

« *Numero è un segno speciale di ricognizione verbale o scritto,* « *che si attribuisce a tutti quegli aggregati che sono fra loro coordi-* « *nabili, allo scopo di riconoscerli come tali, e distinguerli dagli altri* « *aggregati che non sono ad essi coordinabili.*

27. Ma, presso la maggior parte degli autori che definiscono il numero cardinale seguendo le moderne vedute, si riscontra un ritorno più o meno evidente alle *formule Euclidee*. Così. nell' Aritmetica di ARZELÀ ED INGRAMI, con le definizioni :

1. *esistono infiniti, cioè quanti si vogliano elementi che nominiamo unità e rappresentiamo con* 1, *leggendo* **uno**;

2. *Tutti questi elementi sono eguali fra loro, cioè l' uno all' altro promiscuamente sostituibili ;*

3. *Possiamo con queste unità* **contare**, *generando infiniti enti diseguali fra loro e dai precedenti, i quali enti noi diciamo numeri,* (77) vediamo riprodotti i due momenti Euclidei :

1. 2. la definizione assiomatica della unità,

3. la definizione genetica del numero, quale *collezione di unità.*

Nè si può disconoscere la reminiscenza delle formule euclidee in definizioni del tipo delle seguenti:

Ciascuna delle cose (dita, steccolini. segni 1) *cui altre vengono coordinate nella azione del contare, dicesi unità.*

I numeri si generano con l' operazione del contare (78).

Numero è: uno ed uno, ovvero: uno ed uno ed uno, ovvero.... (79)

---

(77) Cfr. C. ARZELÀ e G. INGRAMI. Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie inferiori (Bologna 1894).

(78) Cfr. H. SCHUBERT. *Elementare Arithmetik und Algebra* [Samml. Schubert. — N. 1 — (1899) — pg. 13].

(79) HOBBES. De corp. VII, 7, cit. da Hus. Serl. loc. cit. pg. 142.

Numero intero è una collezione di unità, cioè una somma di segni 1 (80)

*
* *

Ho incominciato questo ormai troppo lungo discorso, col ricordare le definizioni di Euclide: termino ora con Euclide.

E qui parmi vedere l'arguto FRATTINI, *correre ad arruolarsi nella schiera dei retrivi, con tanto di « Elementi di Euclide » sotto il braccio!* (81)

ETTORE BORTOLOTTI

(80) Cfr. M. DE FRANCHIS. *Elementi di Aritmetica razionale* (ed. 2a) pg. 6.

(81) Cfr. G. FRATTINI. Grandezze finite ed indefinite. (Roma 1897).