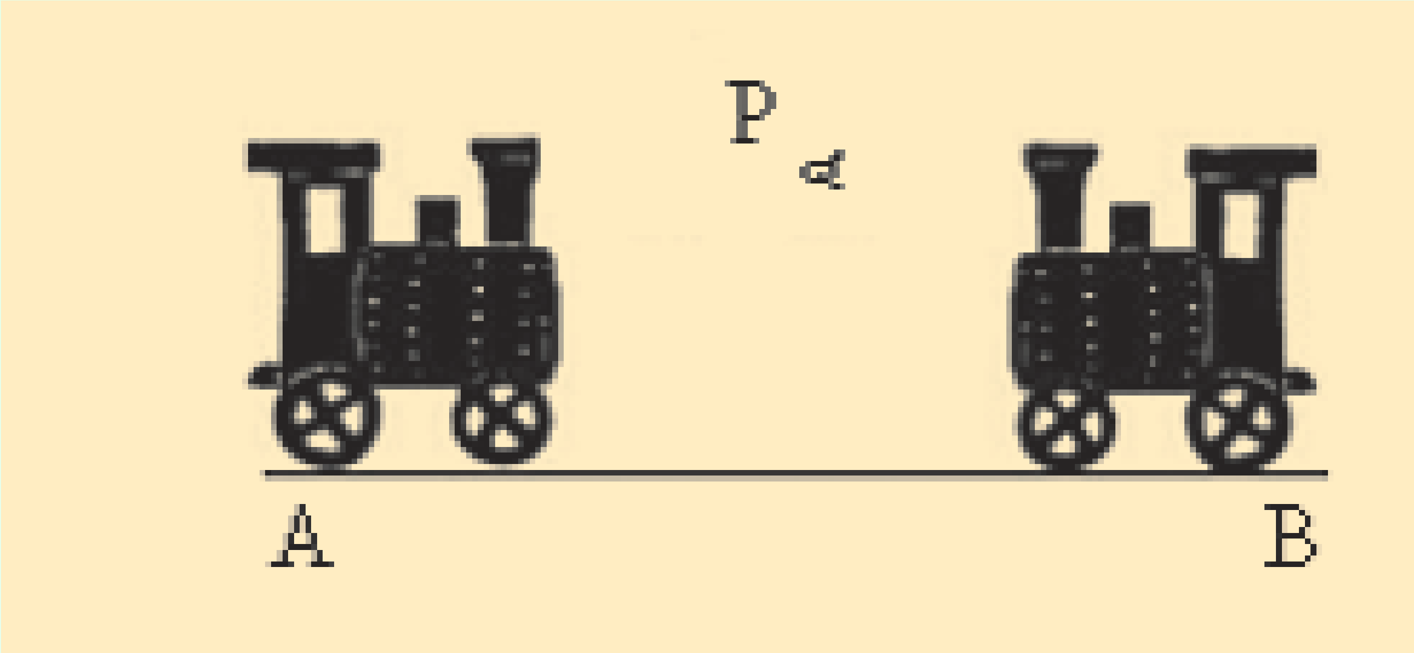
Passo dopo passo verso l'infinito

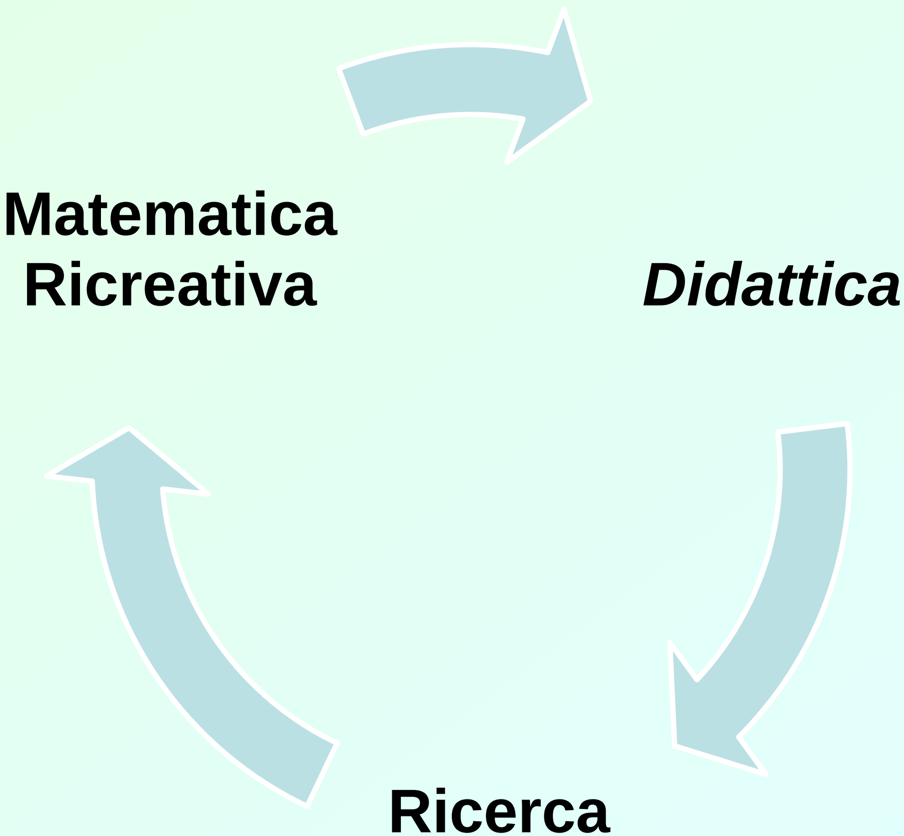
La mosca oscillante

Paderno Del Grappa, 29 Agosto 2012



Bonaventura Paolillo
Liceo Scientifico "Francesco Severi ", Salerno

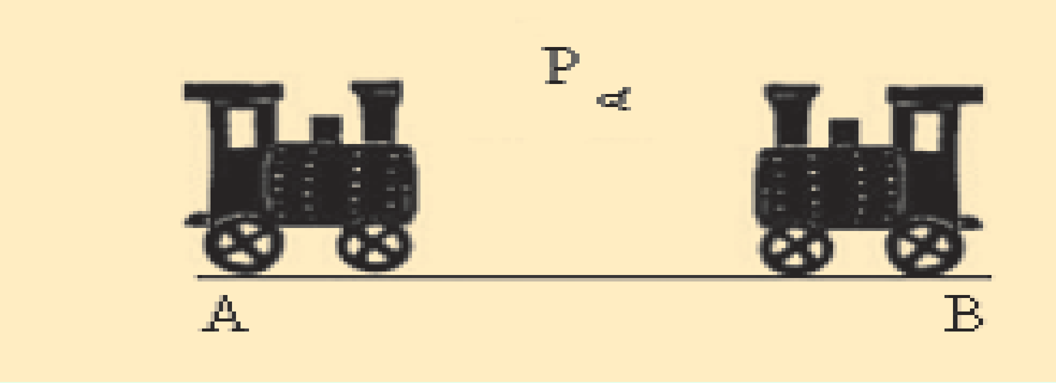
Uno sguardo… d'insieme



Linee guida

- Il Quesito come fonte
- Analisi e strategia risolutiva
- Modello generale mosca-treni
- Serie telescopiche
- Il modello mosca-treni come approccio didattico
- Conclusioni

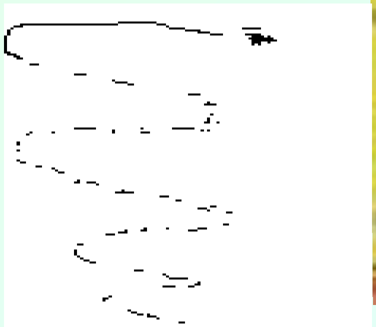
Articolo di riferimento “La mosca di Zenone”
B. Paolillo **Lettera Pristem 61** (**2007**) 60-64



Noto Quesito di Matematica Ricreativa e Fisica.

Due locomotive, inizialmente ferme a distanza ***s****, iniziano a viaggiare l'una verso l'altra a velocità* ***v****. Contemporaneamente una mosca* ***P*** *si stacca da una delle due locomotive e inizia anch'essa a muoversi con velocità costante* $\boldsymbol{v_p}$*.La mosca tocca l'altra locomotiva, torna indietro, ritocca la precedente locomotiva e così via…, indefinitamente, prima dell'inevitabile scontro.*

Cosa succederà ai treni e alla mosca?


Quanta strada ha percorso la mosca?

Ipotesi di lavoro
il cronometro si azzera sempre dopo ogni contatto

Equazioni del moto

$(s_0=s)$

Percorsi L_i della Mosca P

$v_p t_1 + v t_1 = s_0 \Rightarrow t_1 = s_0 / (v + v_p)$ $\quad L_1 = v_p t_1$

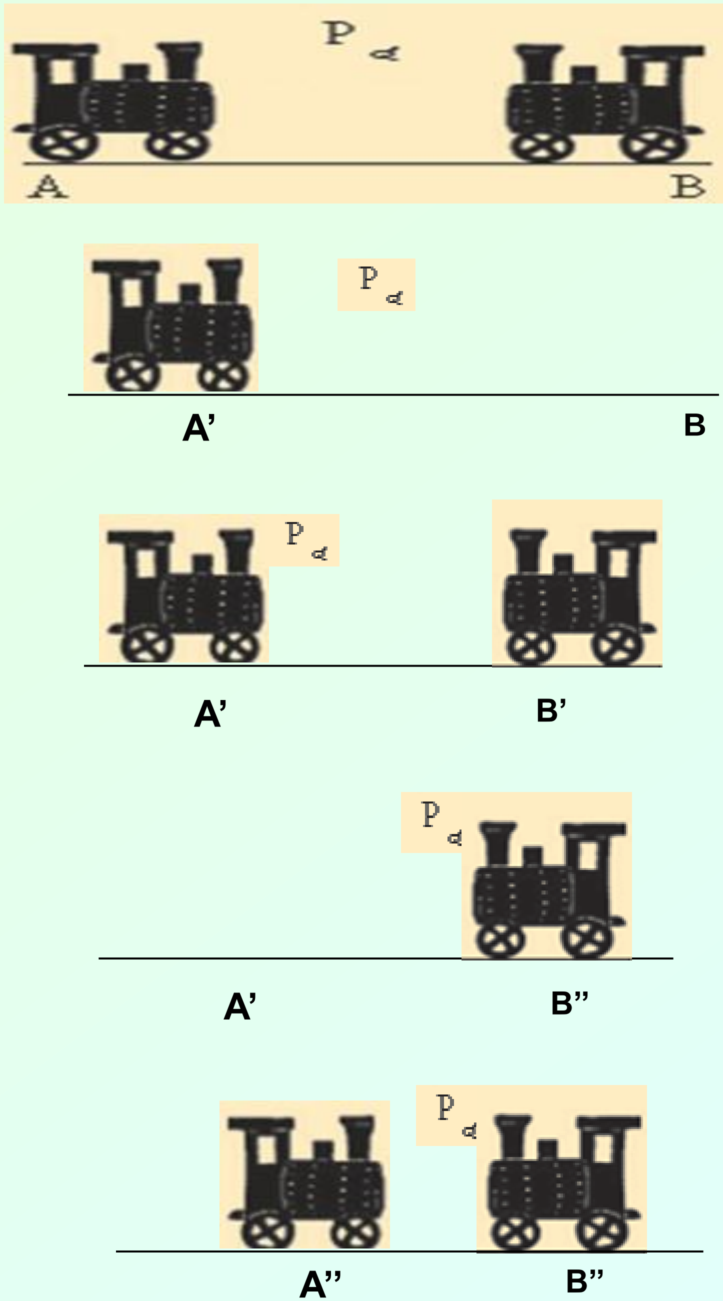
$v_p t_2 + v t_2 = s_1 \Rightarrow t_2 = s_1 / (v + v_p)$ $\quad L_2 = v_p t_2$

$\vdots$

$v_p t_n + v t_n = s_{n-1} \Rightarrow t_n = s_{n-1} / (v + v_p)$ $\quad L_n = v_p t_n$

Equazione degli spazi che intercorrono tra i due treni

$$s_n = s_{n-1} - 2 v t_n$$



Situazione di partenza (istante $\boldsymbol{t_0=0}$)
Distanza $\boldsymbol{s_0}=\boldsymbol{s}$ tra le locomotive *A* e *B*

Dopo l’intervallo di tempo $\boldsymbol{t_1}$del primo contatto
Distanza *mosca-locomotiva A*

$$A'B = v_p t_1 = s_0 - v t_1$$

Distanza tra le locomotive *A* e *B*
dopo l’intervallo di tempo $\boldsymbol{t_1}$

$$A'B' = s_1 = s_0 - 2 v t_1$$

Dopo l’intervallo di tempo del secondo contatto $\mathbf{t_2}$
Distanza *mosca-locomotiva A*

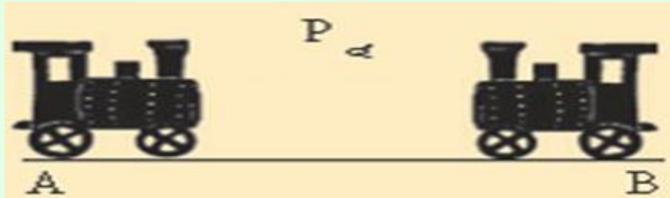
$$A'B'' = v_p t_2 = s_1 - v t_2$$

Distanza tra le *due locomotive*
dopo il secondo contatto

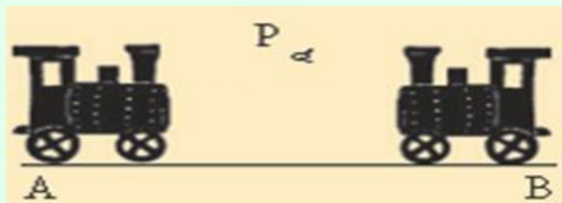
$$A''B'' = s_2$$

Sequenza delle successive distanze s_n

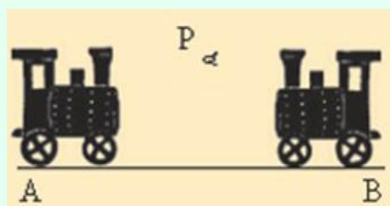
Paderno del Grappa, 2012



s_0

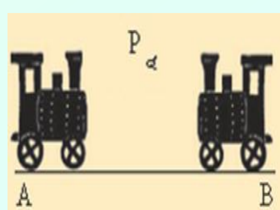


s_1



s_2

....



s_n

I percorsi $\boldsymbol{L_n}$ *effettuati dalla mosca sono sempre non nulli?*

Le distanze della successione $\boldsymbol{s_n}$ sono sempre non nulle?

Proprietà. La successione s_n ha termini non nulli.

Dim.

Sia $\boldsymbol{n}$ il più piccolo indice tale che $\boldsymbol{s_n = 0}$. Allora, da

$$s_n = s_{n\text{-}1} - 2vt_n \quad \text{risulta} \quad s_{n\text{-}1} = 2vt_n$$

Risulta che t_n è *non nullo* poiché $s_{n\text{-}1}$ è non nullo.

Dall'equazione del moto $t_n = s_{n\text{-}1}/(v + v_p)$ risulta

$$t_n = 2vt_n /(v+v_p)$$

Dividendo per t_n si ha

$$1 = 2v/(v + v_p)$$

Assurdo, poiché $v_p > v$.

Corollario

La successione dei tempi t_n della mosca *ha tutti valori non nulli*.

La successione dei percorsi *della mosca* $L_n = v_p t_n$ *ha tutti valori non nulli*.

R*isultato Paradossale*

*La mosca **P** è "schiacciata" dai treni **A** e **B** in un tempo finito.*

Paradossi del filosofo Zenone

- somma finita di una serie infinita

Tecnica standard di risoluzione

Passo 1.

Determinazione dei tempi di contatto della mosca $t_1, t_2, \ldots, t_n$

Risoluzione della Serie Geometrica dei Tempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s \frac{(v_p - v)^{n-1}}{(v_p + v)^n} = \frac{s}{v_p - v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v_p - v)^n}{(v_p + v)^n} =$$

$$Ricordando \text{ che } \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

$$Ponendo\ q = \frac{v_p - v}{v_p + v}$$

$$= \frac{s}{v_p - v} \frac{q}{1-q} = \frac{s}{2v};$$

(v_P non compare)

Passo 2.

Serie relativa ai percorsi $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ della mosca.

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = v_P (t_1 + t_2 + \ldots + t_n + \ldots) = v_p \frac{s}{2v}$$

Soluzione alternativa
(L'efficacia di un'euristica)

***Osservazione*:**

I treni *A* e *B* si incontrano dopo un tempo pari a $\frac{s}{2v}$ **radice dell'equazione oraria d'incontro dei due treni:**

$$vt + vt = s$$

Tempo ***indipendente*** *dal moto della mosca P.*

La somma dei tempi di contatto della mosca *P* è allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n + \ldots + = \frac{s}{2v}$$

Il percorso totale compiuto dalla mosca è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = v_P \frac{s}{2v}$$

Il calcolo della somma della serie geometrica è evitato!

Ha senso estendere questo meccanismo ad altre serie di tempi ?

Estensione del modello

Ammettiamo che le velocità della mosca possano cambiare durante il volo, cioè ***la mosca per ogni percorso L_n abbia una velocità costante v_n*** *e un conseguente tempo di contatto* ***t_n*** *con il treno.* Si ha allora la successione delle velocità $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, .., \boldsymbol{v}_n, \ldots$

Velocità dei treni è sempre ***v****.*

Si hanno analoghe equazioni di ricorrenza del moto.

Equazione degli spazi che intercorrono tra i due treni

$$v_n t_n + v t_n = s_{n-1}$$

$$s_n = s_{n-1} - 2 v t_n$$

Esempio 1

Paderno del Grappa, 2012

Sia $\boldsymbol{v_n=(2n+1)v}$ la velocità della mosca, cioè:

$$v_1=3v\ ;\ v_2=5v\ ;\ v_3=7v,...$$

Allora:

$t_1=s/(4v)$; $s_1=s/2$;

$t_2=s_1/(6v)$; $s_2=s_1-2vt_2=(1/3)s$;

In definitiva:

$t_n=s_{n-1}/(2n+2)v$ $s_n=s/(n+1)$

La successione s_n tende a zero

- Sommando i termini t_n

$$s/(4v) + s/(12v) + s/(24v) + \ldots + s/(n(2n+2)v) + \ldots = s/(2v)$$

- Eliminando il termine ***s/v*** nei due membri:

$$\sum \frac{1}{n(2n+2)} = \frac{1}{2}$$

Serie di Mengoli

(a partire da velocità dispari $v_n = (2n+1)v$)

Esempio 2

Paderno del Grappa, 2012

Siano $v_n = (2n)v$ le velocità della mosca (velocità pari):

$$v_1 = 2v;\ v_2 = 4v;\ v_3 = 6v, \ldots.$$

Allora:

$$t_1 = s/(3v); \qquad s_1 = s/3;$$

$$t_2 = s_1/(5v); \qquad s_2 = s_1 - 2vt_2 = (1/5)s, \ldots$$

Equazioni di ricorrenza del moto

$$t_n = s_{n-1}/(2n+1)v \qquad s_n = s/(2n+1)$$

(successione s_n infinitesima)

$$s/(3v) + s/(15v) + s/(35v) + \ldots + s/(2n-1)(2n+1)v + \ldots = s/(2v)$$

$$\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

Osservazione

Per il quesito originario la velocità della mosca era $\boldsymbol{v_n = v_P}$ costante con **successione s_n infinitesima**

$$s_n = s\left(\frac{v_P - v}{v_P + v}\right)^n$$

Comunque si prendano delle velocità $v_n = f(n)v$ si ottengono sempre risultati significativi, ovvero risultati corretti di *convergenza* della somma dei tempi?

La risposta è negativa.

Teorema

Gli esperimenti di convergenza della serie hanno successo se e solo se la successione delle distanze $\boldsymbol{s_n}$ *tra i punti mobili* ***A*** *e* ***B*** *è infinitesima.*

Dimostrazione

Dall'equazione delle distanze tra i due treni: $s_n = s_{n-1} - 2vt_n$

$$t_n = \frac{s_{n-1} - s_n}{2v}, n \geq 1$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \ldots = \frac{s_0 - s_1}{2v} + \frac{s_1 - s_2}{2v} + \frac{s_2 - s_3}{2v} + \ldots + \frac{s_{n-1} - s_n}{2v} + \ldots$$

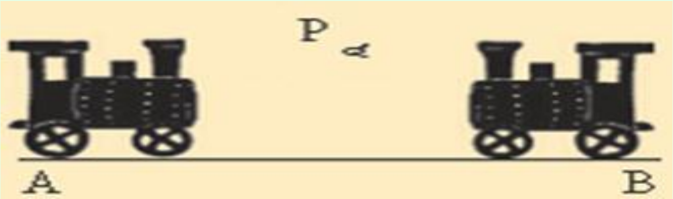
$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{s - s_n}{2v}$$

Passando al limite, si ha: $$\sum_{i=1}^{\infty} t_i = \frac{s - s'}{2v}$$ ***s'*** limite della successione $\boldsymbol{s_n}$.

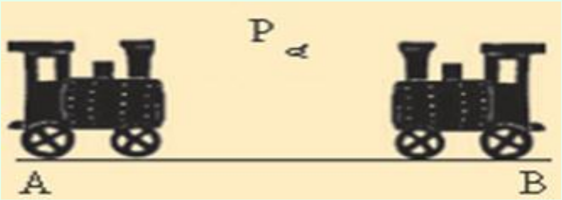
Termine correttivo ***s'*** /(**2*v*)** rispetto al termine primitivo $\frac{s}{2v}$

Sequenza delle successive distanze s_n

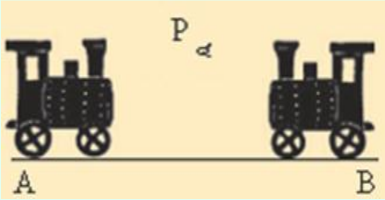
Paderno del Grappa, 2012



s_0

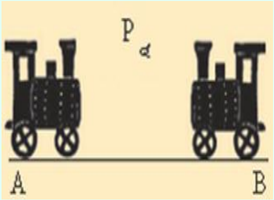


s_1



s_2

....



s_n

Esempio 3 (*che non ha successo*)

*La mosca **P** passa ad una velocità $\boldsymbol{v_n}$ di tipo quadratico rispetto ad **n:***

$$v_n = v\,[(n+1)^2-1]$$

Si ottengono i seguenti tempi di contatto:

$t_1=s/(4v)$;

$t_2=s/(18v)$ e in generale per n >1:

$$t_n = \frac{2^2-2}{2^2}\,\frac{3^2-2}{3^2}\cdots\frac{n^2-2}{n^2}\,\frac{1}{(n+1)^2}\,\frac{s}{v}$$

il termine ***s'*** è del tipo: $s' \sim s\ e^{-\frac{2\pi^2}{6}}$ (diverso da zero).

Paderno del Grappa, 2012

Discrepanza tra previsione teorica e andamento cinematico

Anche se i treni si schiacciano, la successione s_n *delle distanze tra i treni ha limite* $s' \neq 0$.

*La distanza tra i mobili **A** e **B** supera concretamente la distanza-soglia **s'**. Queste distanze sono estranee ai termini della successione* s_n.

(***Risultato Contro-intuitivo***).

Modello generale

Si ponga $\frac{v_n}{v} = f_n$ termini $f_n > 1$.

Si ottiene $t_1 = \frac{s}{v + f_1 v}$

Successivamente per iterazione:

$$\sum t_i = \frac{s}{v(1+f_1)} + \frac{f_1 - 1}{1+f_1} \frac{1}{1+f_2} \frac{s}{v} + \ldots + \ldots = \frac{s - s'}{2v}$$

Espressione generale del modello

La successione delle distanze tra treni s_n è:

$$s_n = s \frac{f_1 - 1}{1+f_1} \frac{f_2 - 1}{1+f_2} \cdots \frac{f_n - 1}{1+f_n}$$

s' il suo limite

Applicazioni

Calcolo di serie (*successione* s_n *infinitesima*).

- Da $f_n = 1/n$ si ottiene la serie seguente:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)} = 1$$

- Da $f_n = q/n$ (***q*** è una costante positiva fissata) s:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{q^{n-1} n q!}{(n+q)!} = 1$$

- Da $f_n = L-1+q/n$ si ottiene:

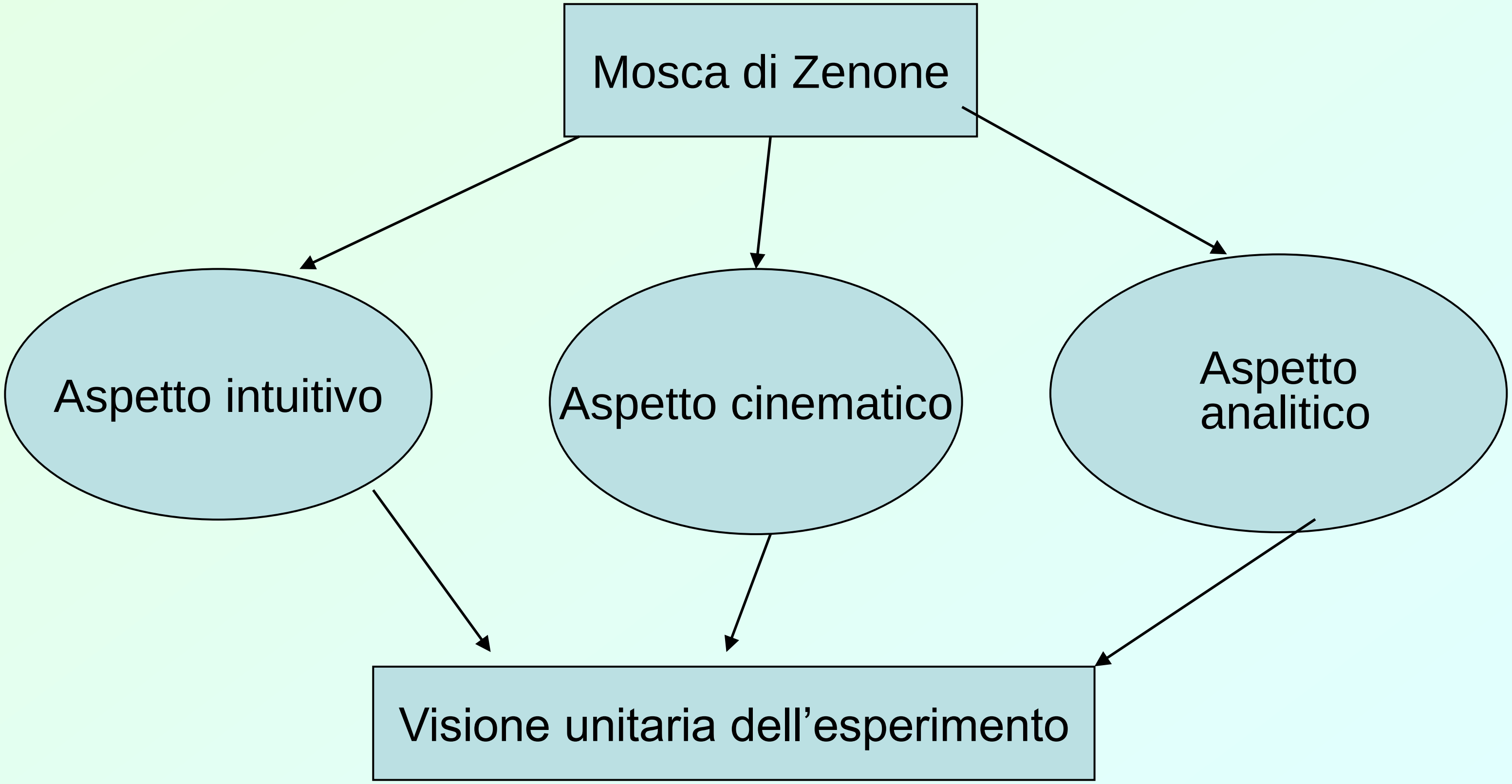
$$\frac{1}{L+1} + \frac{2}{(L+1)(L+2)} + \frac{3}{(L+1)(L+2)(L+3)} + \ldots + \frac{n}{\prod_{i=1}^{n} iL+1} + \ldots = \frac{1}{L}$$

Così se **L** *è intero > 0 da* $f_n = n+L-1$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+L)} = \frac{1}{LL!}$$

Nota: *Normalmente, nei corsi di analisi queste serie sono dimostrate utilizzando la* ***proprietà telescopica****.*

La mosca e …la sua scia



Quali sono le classi di serie che si possono estrapolare dall'esperimento concettuale mosca-locomotive?
È possibile classificarle o identificarle?

Le serie telescopiche – RIchiami

Definizione. Una serie convergente

$a_1 + a_2 + a_3 \cdot\cdot\cdot + a_n + \dots$

è chiamata telescopica quando può essere riscritta come:

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \dots +. (u_n - u_{n+1}) + \dots$$

La somma vale allora $u_1 - \lim u_n$.

Esempi classici

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$ ***Serie di Mengoli***

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \left(\frac{1-q^{k+1}}{1-q} - \frac{1-q^k}{1-q}\right) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}; |q| < 1$$ ***Serie Geometrica***

Equazione del modello generale

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i = \frac{1}{1+f_1}\frac{s}{v} + \frac{f_1 - 1}{1+f_1}\frac{1}{1+f_2}\frac{s}{v} + \ldots + = \frac{s - s'}{2v}$$

s' limite della successione $s_n = s\frac{f_1 - 1}{1+f_1}\frac{f_2 - 1}{1+f_2}\ldots\frac{f_n - 1}{1+f_n}$

Proprietà

Tutte le serie ottenute dall'equazione del modello generale sono **serie telescopiche (**per costruzione**)**.

Dimostrazione. Basta considerare la somma ridotta dell'equazione del modello generale

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{s - s_1}{2v} + \frac{s_1 - s_2}{2v} + \frac{s_2 - s_3}{2v} + \ldots + \frac{s_{n-1} - s_n}{2v} = \frac{s - s_n}{2v}$$

Proprietà

Ogni serie convergente può essere vista come serie telescopica.

Data la serie convergente $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ Si consideri la somma ridotta $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, con $S_0 = 0$.

Allora dalla $S_n - S_{n-1} = a_n$ vale

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + \ldots = S_n$$

Dalla serie al modello

Proprietà

Sia data una **serie numerica** a termini positivi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ e convergente (a ½). Essa è allora descritta da **un' istanza** del modello mosca-locomotive, con le velocità della mosca $\mathbf{f_n v}$ date da:

$$f_1 = \frac{1 - a_1}{a_1}; \; f_n = \frac{1 - 2a_1 - \ldots 2a_{n-1} - a_n}{a_n}$$

Dalla serie al modello

$$f_1 = \frac{1-a_1}{a_1};\ f_n = \frac{1-2a_1-...2a_{n-1}-a_n}{a_n}$$

Esempi. *Dalla serie di Mengoli:*

$$\sum \frac{1}{n(2n+2)} = \frac{1}{2}$$

$$f_1 = \frac{1-a_1}{a_1} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

$$f_2 = \frac{1-2a_1-a_2}{a_2} = \frac{1-2\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = 5$$

$$f_3 = 5;\ f_4 = 7;...$$

Istanza del modello mosca-treni

Dalla serie al modello

$$f_1 = \frac{1-a_1}{a_1};\ f_n = \frac{1-2a_1-\dots 2a_{n-1}-a_n}{a_n}$$

Esempi. Dalla serie $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

$$f_1 = \frac{1-a_1}{a_1} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

$$f_2 = \frac{1-2a_1-a_2}{a_2} = \frac{1-2\frac{1}{3}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}} = 4$$

$$f_3 = 6;\ f_4 = 8;\dots$$

Istanza del modello mosca-treni

Conclusioni

Ad ogni ’***istanza*** del modello mosca-treni (fissate le leggi delle velocità) c’è corrispondenza con ***una particolare serie*** convergente (telescopica)

*Ad ogni **serie convergente** c’è corrispondenza con una particolare **istanza** del modello mosca-treni*

Trasposizione di una situazione derivante da un esperimento cinematico concettuale in un modello analitico di calcolo e viceversa.

Utilizzazione in contesto classe

del modello mosca-treni

Primo anno universitario come integrazione tra Analisi e Fisica

Classi di un liceo (*a partire dal terzo anno)*

Integrazione tra le unità di Cinematica e le Serie numeriche

Prerequisiti

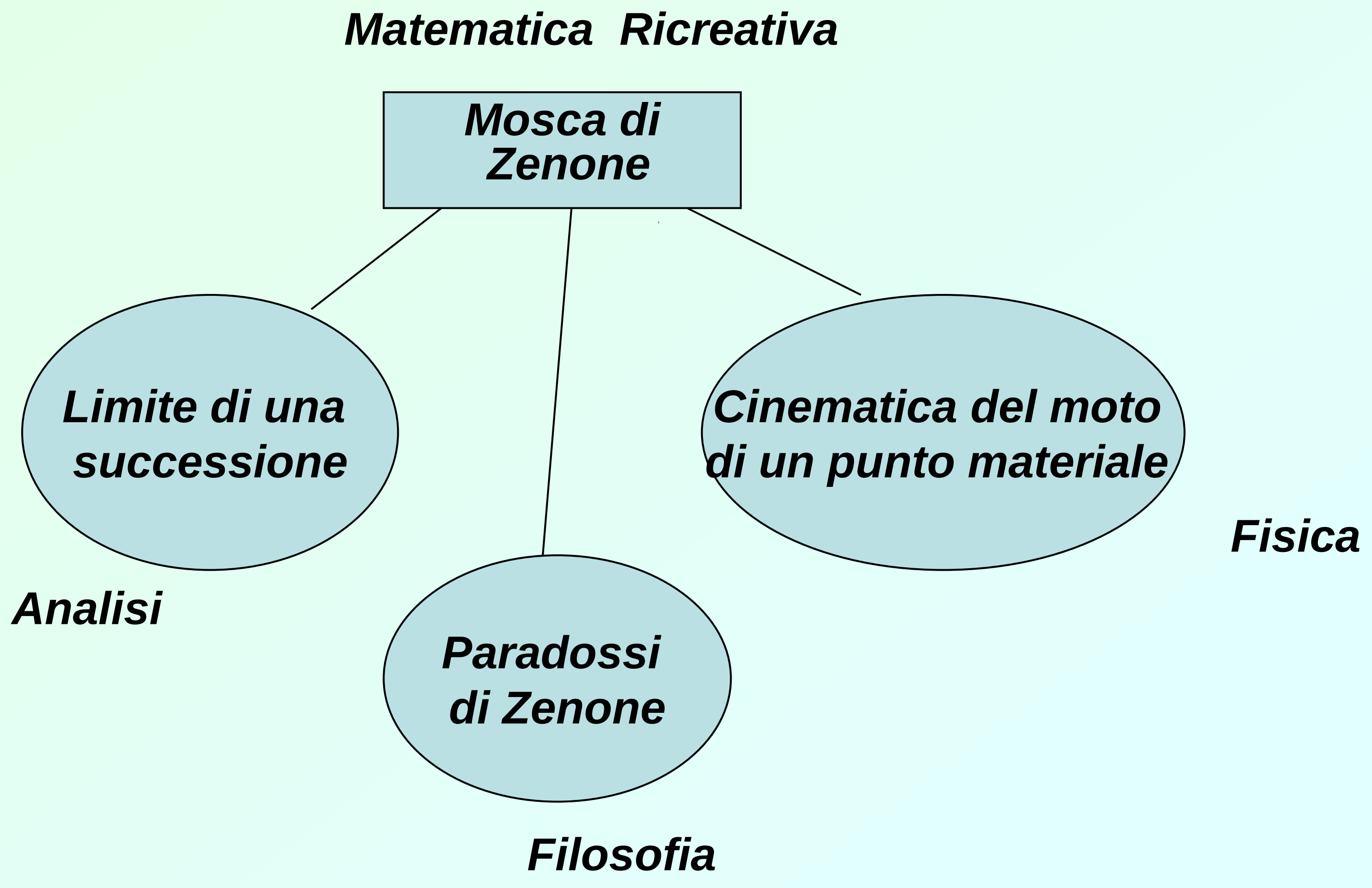
- Primi concetti su Successioni e Serie.
- Elementi di cinematica: moto rettilineo uniforme.

Obiettivi

- Far sorgere nell'allievo stimoli e interesse per il lato ludico della ricerca matematica.

  Argomento per integrare lo sviluppo di problematiche sull'infinito, secondo un approccio analitico e algoritmico, fisico, filosofico.
- Sviluppo di tecniche di calcolo per generare serie convergenti.

La mosca e… la sua ragnatela



Vari livelli di presentazione di una proposta didattica

Domanda. Quanto tempo impiega la mosca prima di essere schiacciata?

Domanda. Quanto strada percorre la mosca prima di esssere schiacciata?

Domanda. Il numero dei percorsi e dei tempi è finito o infinito?

Discussione sulla discrepanza tra modello intuitivo e modello teorico.

Viaggio tra le serie di …Zenone

Quesito
Mosca di zenone

Formalizzazione

Generalizzazione(del quesito)

Modellizzazione

Dalla serie al modello

Applicazioni
serie telescopiche.
Diversi sviluppi ...

“Da tempo immemorabile l'infinito ha suscitato le passioni umane più di ogni altra questione. E' difficile trovare un'idea che abbia stimolato la mente in modo altrettanto fruttuoso, tuttavia nessun altro concetto ha più bisogno di chiarificazione” **(*D. Hilbert*).**

Articolo di riferimento “La mosca di Zenone”
B. Paolillo **Lettera Pristem 61** (**2007**) 60-64

Bonaventura Paolillo
Liceo Scientifico F.Severi; Salerno
bonaventura.paolillo@gmail.com
bpaolillo.@unisa.it