CENTRO RICERCHE DIDATTICHE "Ugo Morin"
Paderno del Grappa (TV)

XLI SEMINARIO NAZIONALE 27-30 agosto 2012

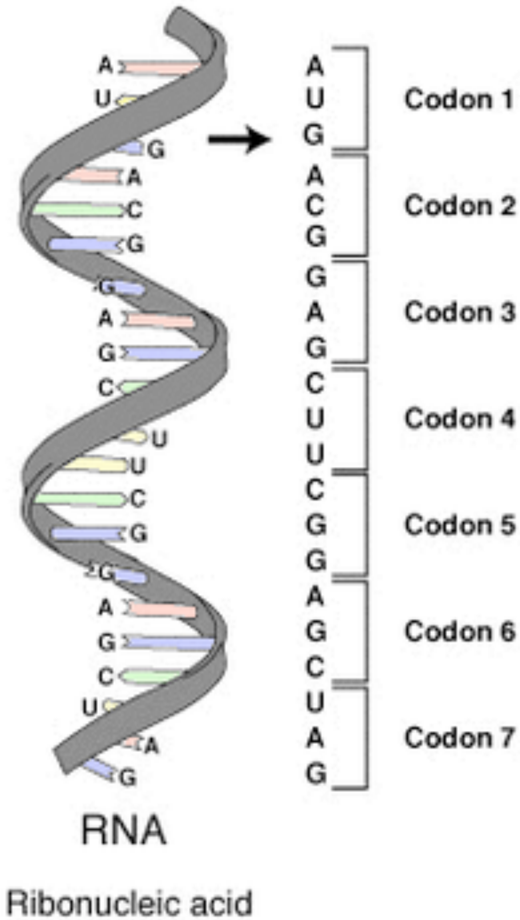
Scrivere tutti i numeri combinando pochi simboli: i sistemi di numerazione

28 agosto

Sergio Invernizzi
Dipartimento di Scienze della Vita
Università di Trieste
inverniz@units.it

(sullo sfondo una pagina dall'*Aritmetica di Treviso*, la prima aritmetica a stampa, 1478)

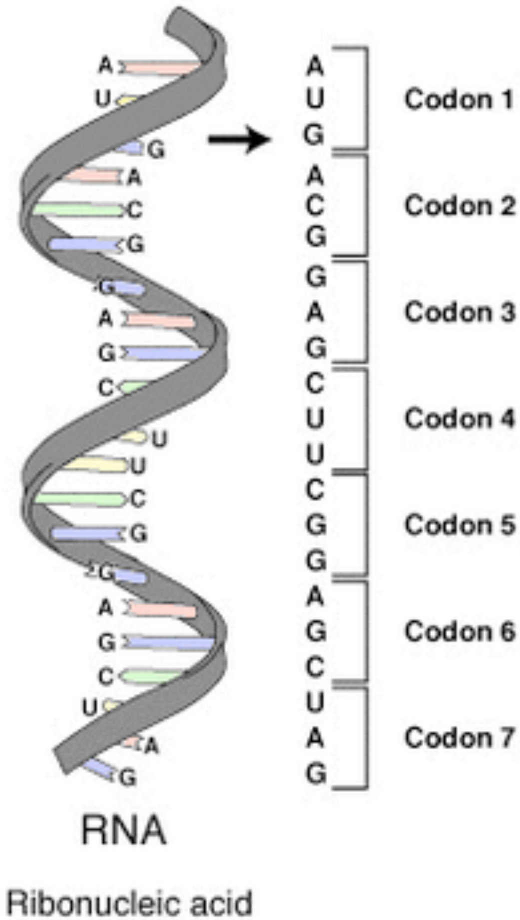
3.8 miliardi di anni fa?



Scrivere tutti i viventi combinando pochi simboli:
Il codice genetico

Una serie di *codoni* in una parte di una molecola di un RNA messaggero (mRNA).

Ogni codone consiste di tre *nucleotidi*, una *tripletta*, che solitamente rappresenta un singolo *aminoacido*.



Un codone è definito dal nucleotide iniziale da cui traduzione inizia. Ad esempio, la stringa GGGAAACCC, se letta dalla prima posizione, contiene i codoni GGG, AAA, e CCC; se letta dalla seconda posizione, contiene GGA e AAC, se letta a partire dalla terza posizione, GAA e ACC. Ogni sequenza può, quindi, essere letta in tre modi, ciascuno dei quali produrrà una diversa sequenza amminoacidica (nell'esempio dato, Gly-Lys-Pro, Gly-Asn, o Glu-Thr, rispettivamente). Il modo reale in cui si traduce una sequenza proteica è definita da *un codone di inizio*, di solito il primo codone AUG nella sequenza.
Esitono poi i *codoni di stop*: UAA, UAG, UGA.

Notazione posizionale? Zero?

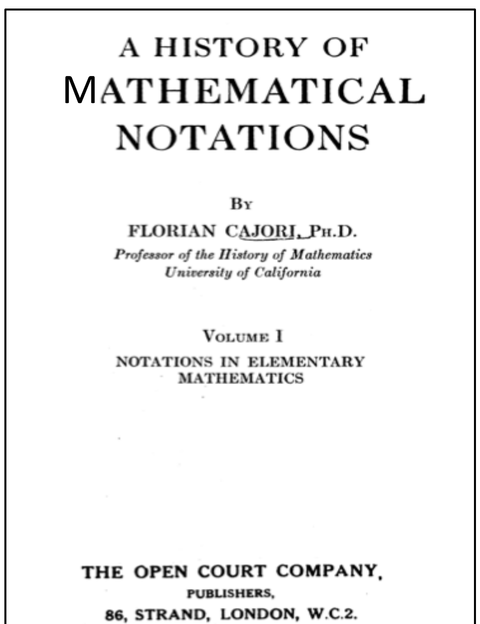
nonpolar	polar	basic	acidic	(stop codon)

Standard genetic code

1st base	2nd base								3rd base
	U		C		A		G		
U	UUU	(Phe/F) Phenylalanine	UCU	(Ser/S) Serine	UAU	(Tyr/Y) Tyrosine	UGU	(Cys/C) Cysteine	U
	UUC		UCC		UAC		UGC		C
	UUA	(Leu/L) Leucine	UCA		UAA	Stop (*Ochre*)	UGA	Stop (*Opal*)	A
	UUG		UCG		UAG	Stop (*Amber*)	UGG	(Trp/W) Tryptophan	G
C	CUU		CCU	(Pro/P) Proline	CAU	(His/H) Histidine	CGU	(Arg/R) Arginine	U
	CUC		CCC		CAC		CGC		C
	CUA		CCA		CAA	(Gln/Q) Glutamine	CGA		A
	CUG		CCG		CAG		CGG		G
A	AUU	(Ile/I) Isoleucine	ACU	(Thr/T) Threonine	AAU	(Asn/N) Asparagine	AGU	(Ser/S) Serine	U
	AUC		ACC		AAC		AGC		C
	AUA		ACA		AAA	(Lys/K) Lysine	AGA	(Arg/R) Arginine	A
	AUG[A]	(Met/M) Methionine	ACG		AAG		AGG		G
G	GUU	(Val/V) Valine	GCU	(Ala/A) Alanine	GAU	(Asp/D) Aspartic acid	GGU	(Gly/G) Glycine	U
	GUC		GCC		GAC		GGC		C
	GUA		GCA		GAA	(Glu/E) Glutamic acid	GGA		A
	GUG		GCG		GAG		GGG		G

Fonte:

- Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations,* Vol. I, 1929
- http://archive.org/download/historyofmathema031756mbp/historyofmathema031756mbp.pdf
- Cosimo Inc., New York, 2007, ISBN: 1602066841, € 14.91.

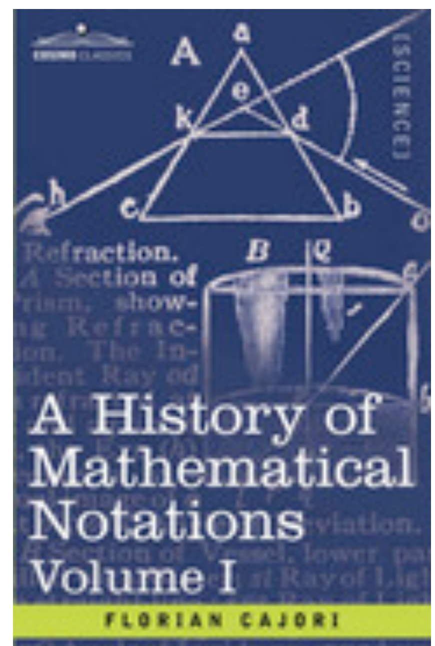


A HISTORY OF
MATHEMATICAL
NOTATIONS

By
FLORIAN CAJORI, Ph.D.
Professor of the History of Mathematics
University of California

Volume I
NOTATIONS IN ELEMENTARY
MATHEMATICS

THE OPEN COURT COMPANY,
PUBLISHERS,
86, STRAND, LONDON, W.C.2.

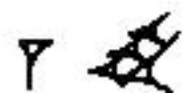


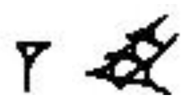
Sistema di numerazione sessagesimale posizionale babilonese

- Fa la sua comparsa nell'ambiente colto all'inizio del II millennio a.C. come strumento per la matematica e per l'astronomia.
- I numeri da 1 a 59 sono scritti in modo additivo con la base ausiliaria 10, per i numeri superiori a 60 è utilizzato il principio di posizione (il valore del simbolo dipende dal posto che occupa)

Quindi:

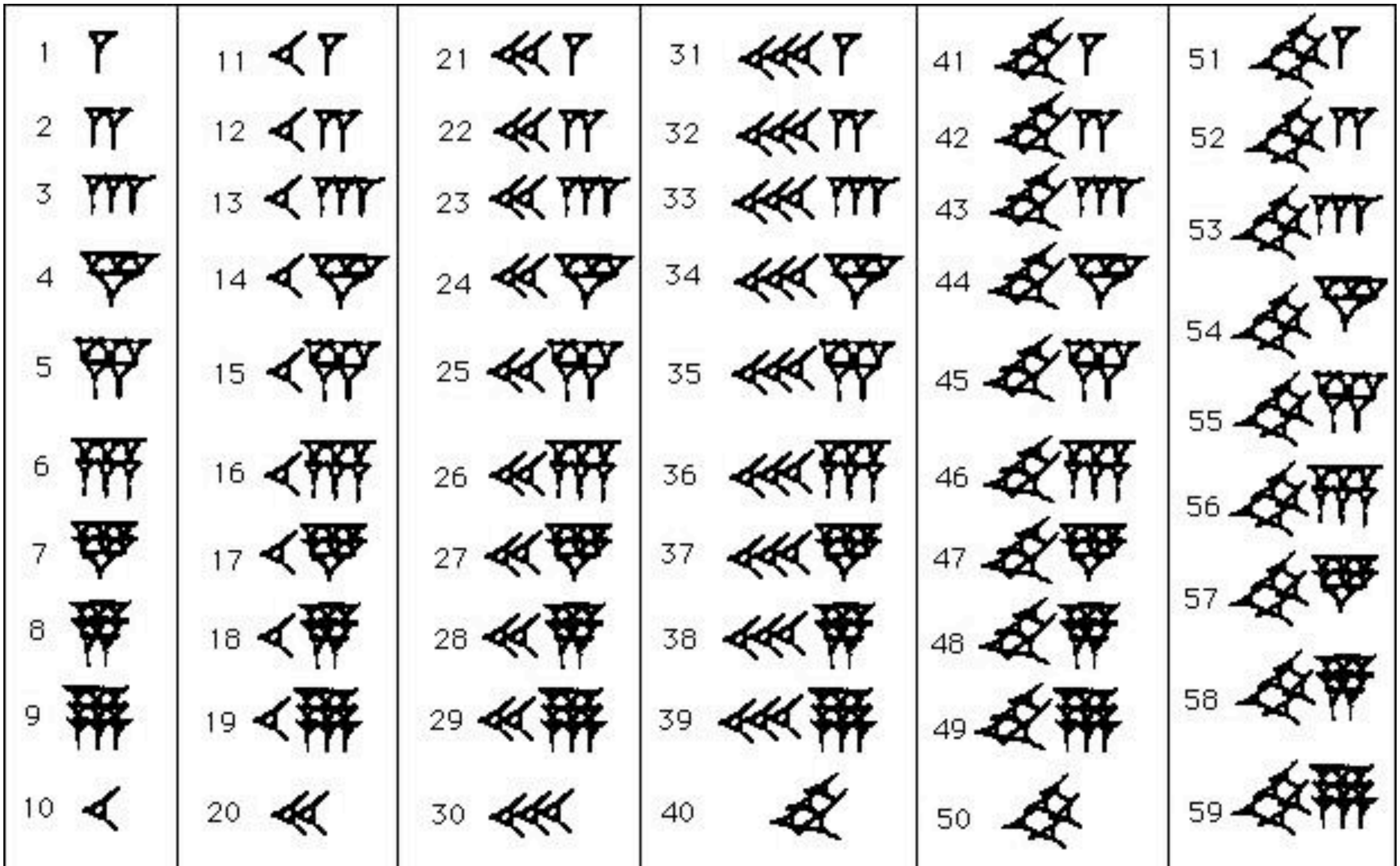
- Base 60, posizionale, ma ambiguo.
- Fa la sua comparsa il "dieci" (le dita delle due mani), ma non esiste il "cento" o il "mille", nel senso che per un babilonese

100 = 1 "sessanta" + "quaranta" = 

Però potrebbe essere  = 1 "sessanta"^{2} + 40 "sessanta"^{1} = 6000

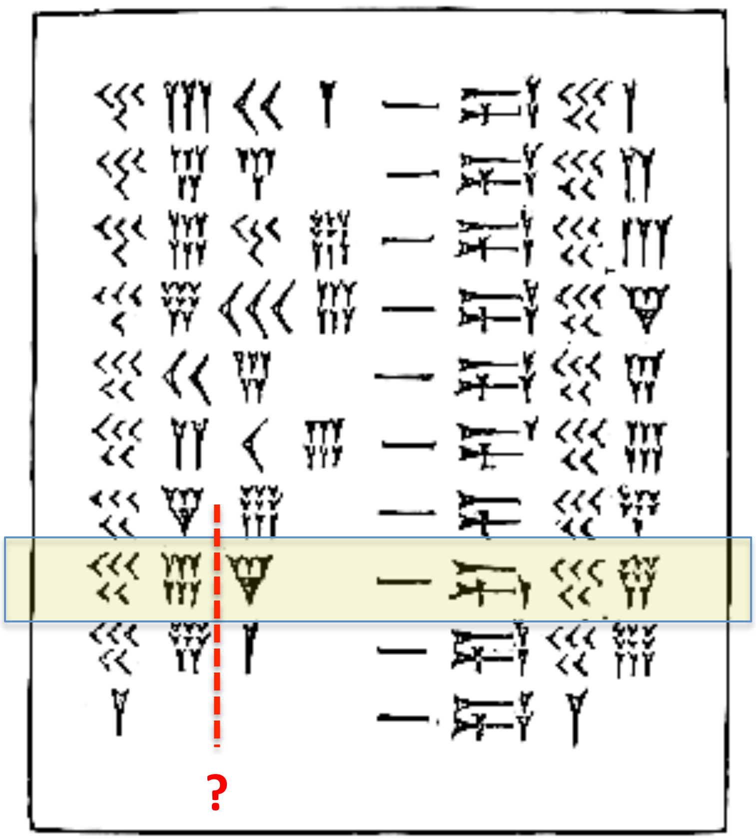
(uno spostamento in blocco "a sinistra" delle cifre porta a moltiplicare per 60)

Base 60 59 cifre (manca lo “zero”)



Un esempio: la tavola dei quadrati da 1 a 60

Extract from Senkareh Table of Squares.

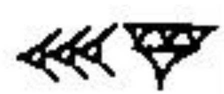


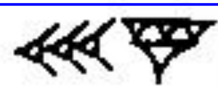
Senkareh: da 1^2 a 60^2

George Rawlinson, *The five great monarchies of the ancient eastern world*, London, Murray, 1862,
(First Monarchy, Chaldæa, Cap. 5, p. 129)

56 x 60 + 4 = x^2 58

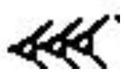
Probabilmente la “posizione” era affidata alla semantica, cioè al senso.

Se gli anni di vita di un nobile erano incisi come  , si trattava evidentemente di

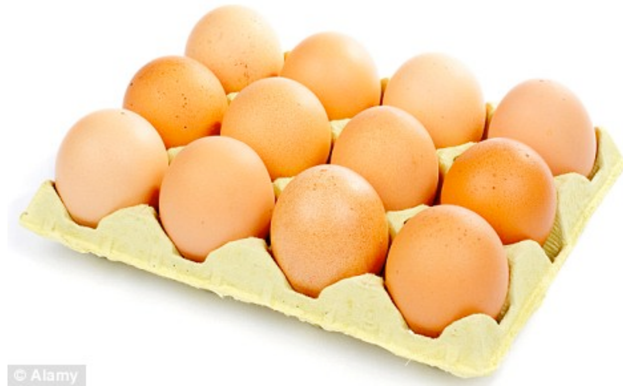
x 60	x 1	/60	/3600
			

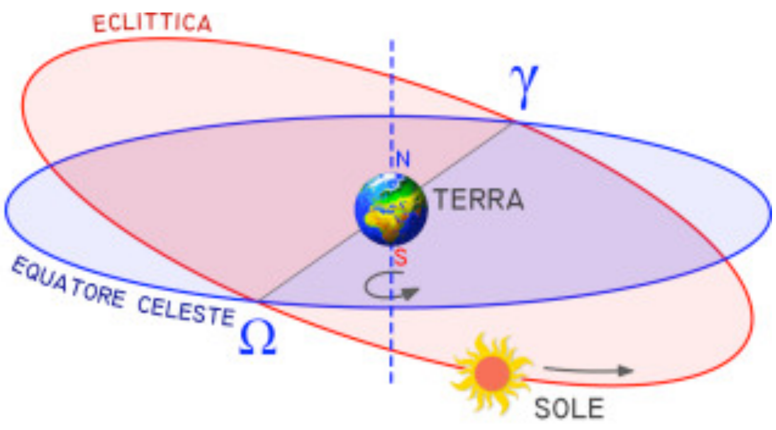
= 34

e non

x 60	x 1	/60	/3600
			

= 1804


© Alamy


ECLITTICA
γ
N
TERRA
S
EQUATORE CELESTE
Ω
SOLE

La divisione

La divisione viene effettuata moltiplicando il dividendo per l'inverso del divisore.

$$\frac{1}{2}=\frac{30}{60} \quad 0;30$$

$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60} \quad 0;20$$

$$\frac{1}{6}=\frac{10}{60} \quad 0;10$$

$$\frac{1}{60} \quad 0;1$$

$$\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3} \quad 0;40$$

$$\frac{5}{6}=5\times\frac{1}{6} \quad 0;50$$

Le frazioni sessagesimali sono poste sullo stesso piano degli interi
Questo è notevole se si pensa che i numeri decimali cominciarono a diffondersi in Europa solo alla fine del '500 [S. Stevin, 1585]
(fonte: Livia Giacardi)

Ad esempio l'inverso di 45

$$\frac{1}{45} = \frac{1}{3^2 5} = \frac{2^4 5}{2^4 3^2 5^2} = \frac{80}{60^2} = \frac{60+20}{60^2} = \frac{1}{60} + \frac{20}{60^2} \quad = 1{,}20$$

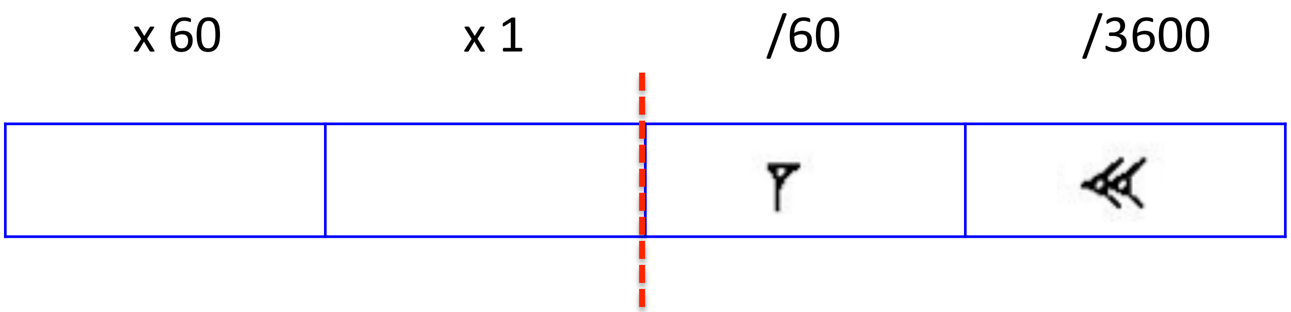


Tavola dei reciproci di tipo standard

2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

1/7 = 8,34,17, 8,34,17, 8,34,17, ...

8,34,17 = 8/60 + 34/3600 + 17/216000 = 30857/216000

$$\frac{30\,857}{216\,000}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{216\,000^{k}}}_{1+\frac{1}{60^3}+\frac{1}{(60^3)^2}+\frac{1}{(60^3)^3}+\cdots} = \frac{30\,857}{216\,000}\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{216\,000}}} = \frac{30\,857}{216\,000}\,\frac{216\,000}{215\,999} = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{2^{\alpha}\ 3^{\beta}\ 5^{\gamma}}$$

Versione breve

- Un numero razionale r scritto in base 10 ha sviluppo "limitato" se moltiplicato per una potenza (ad esponente intero) di 10 dà un intero: ad esempio per r < 1

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} \Rightarrow r\,10^n = \ldots \quad \text{un intero}$$

- Supponiamo che l'inverso r = 1/m di un intero m, scritto in base 10, abbia sviluppo "limitato". Sia ad esempio r = 1/40. Infatti molticando per 10^3 =1000 si ha r = (1/40) x 1000 = 25 (infatti 1/40 = 0.025) Siano $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$ i fattori primi di $10 = p_1 p_2$
- Allora abbiamo un intero s = 25 tale che

$$\frac{1}{m}10^3 = s \Rightarrow \frac{1}{40} = \frac{25}{10^3} = \frac{25}{2^3 5^3} = \frac{1}{2^3 5^1}$$

- Ne viene che m = 40 = $2^3\,5^1$. Ipotizzo che se un inverso 1/m di un intero ha sviluppo "limitato" in base B, allora i fattori primi di m sono fra quelli di B.

Versione formale

- Un numero razionale r scritto in base B ha sviluppo "limitato" se moltiplicato per una potenza (ad esponente intero) di B dà un intero: ad esempio per r < 1

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i B^{-i} \Rightarrow rB^n = \dots \qquad \text{un intero}$$

- Supponiamo che l'inverso r = 1/m di un intero m, scritto in base B, abbia sviluppo "limitato". Siano p_j i fattori primi di $B = \prod p_j^{\alpha_j}$
- Allora abbiamo un intero s tale che

$$\frac{1}{m} B^n = s \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{s}{B^n} \Rightarrow sm = B^n$$

- Se s è divisibile per qualche p_j, semplifico per tutti i p_j possibili:

$$\frac{1}{m} B^n = s \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{s'}{\prod p_j^{\beta_j}} \Rightarrow s'm = \prod p_j^{\beta_j}$$

- Ed ho che i fattori primi di m si trovano solo fra i p_j. Concludo che se un inverso 1/m di un intero ha sviluppo "limitato" in base B, allora i fattori primi di m sono fra quelli di B.

- Viceversa: sia m un intero i cui fattori primi di sono fra quelli di $B = \prod p_j^{\alpha_j}$
- Consideriamo l'inverso

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\prod p_j^{\gamma_j}}$$

- Ad esempio per B = 10 sia $\frac{1}{m} = \frac{1}{2^3 5^7} = \frac{2^4}{2^7 5^7} = \frac{16}{10000000} \Rightarrow 16m = 10^7$

- In conclusione: **Una frazione 1/*m* ha sviluppo in base B "limitato" se e solo se *m* ha come fattori primi solo quelli di B.**

- Esempio: Una frazione 1/m ha sviluppo in base 10 "limitato" se e solo se i fattori primi di m sono fra i numeri 2 e 5.

- Esempio: Una frazione 1/m ha sviluppo in base 60 "limitato" se e solo se i fattori primi di m sono fra i numeri 2, 3 e 5.

- Esercizi buffi e meno:

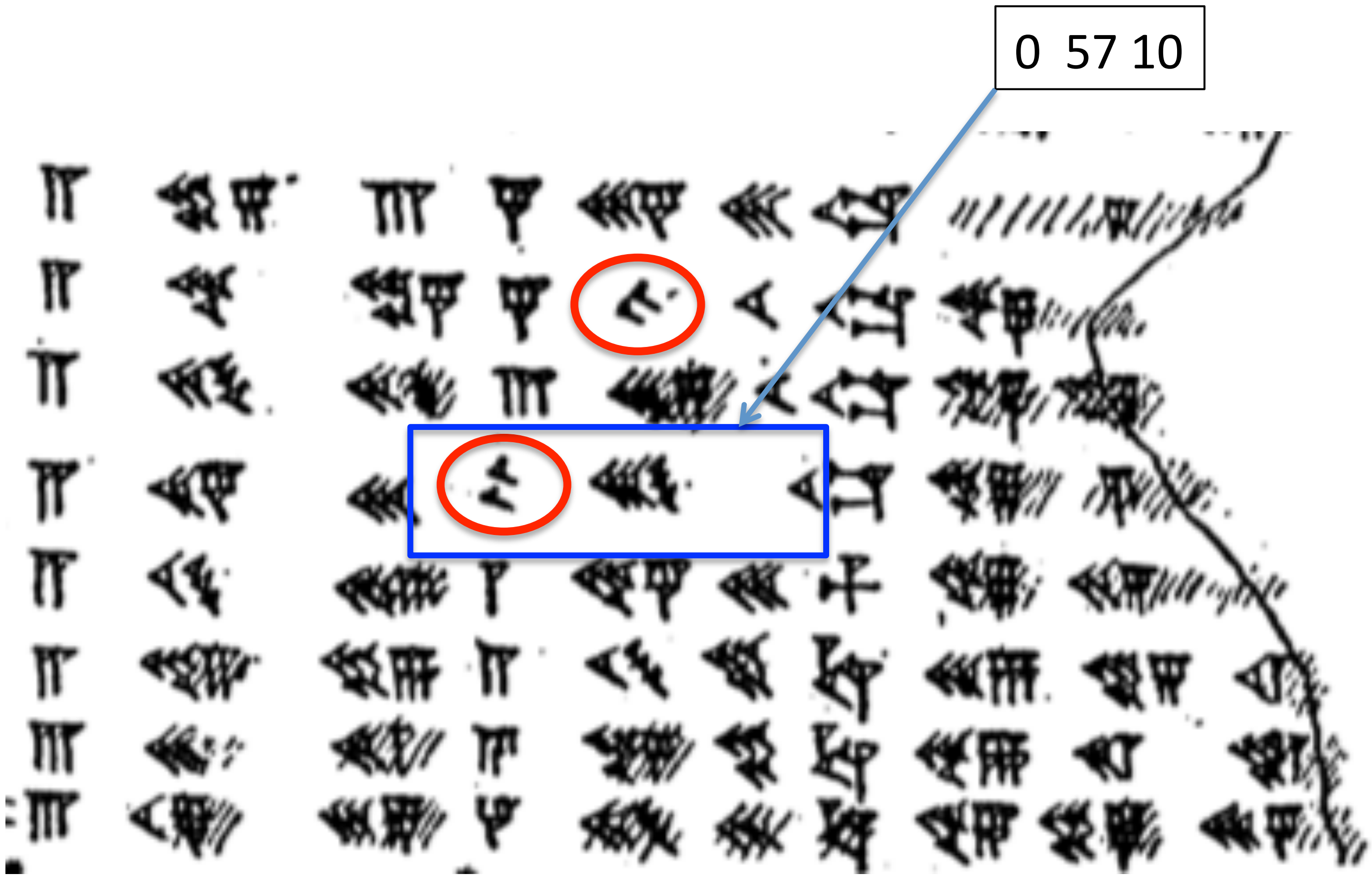
- 1/13 in base 10 = 0. 076923 076923 076923 076923 076923 …
- 1/13 in base 9 = 0. 062 062 062 062 062 062 062 062 062 062 062 ...
- 1/7 in base 36 = 0. 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 ...
- 1/8 in base 36 = 0.4i (“limitato”) = in decimale a $4/36+18/36^2 = 1/8$
- 1/13 in base 36 = 0. 2rox8b 2rox8b 2rox8b 2rox8b 2rox8b …

- Le cifre delle basi maggiori di 10 si scrivono di norma aggiungendo in ordine le 26 lettere dell’alfabeto inglese, per cui si arriva con questo metodo da base 2 a base 36:

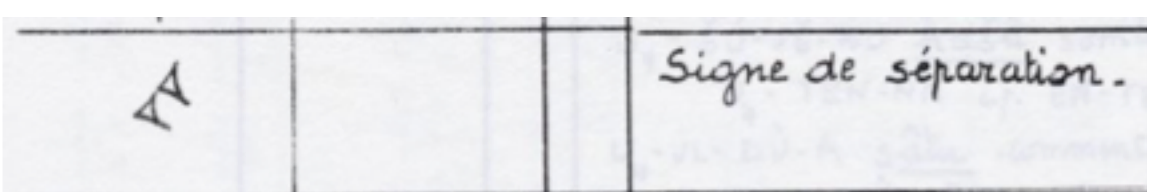
- In base 36 i numeri da 0 a 36 (decimali!) si scrivono

$$\{\mathtt{0}_{36}, \mathtt{1}_{36}, \mathtt{2}_{36}, \mathtt{3}_{36}, \mathtt{4}_{36}, \mathtt{5}_{36}, \mathtt{6}_{36}, \mathtt{7}_{36}, \mathtt{8}_{36}, \mathtt{9}_{36}, \mathtt{a}_{36}, \mathtt{b}_{36},$$
$$\mathtt{c}_{36}, \mathtt{d}_{36}, \mathtt{e}_{36}, \mathtt{f}_{36}, \mathtt{g}_{36}, \mathtt{h}_{36}, \mathtt{i}_{36}, \mathtt{j}_{36}, \mathtt{k}_{36}, \mathtt{l}_{36}, \mathtt{m}_{36}, \mathtt{n}_{36}, \mathtt{o}_{36},$$
$$\mathtt{p}_{36}, \mathtt{q}_{36}, \mathtt{r}_{36}, \mathtt{s}_{36}, \mathtt{t}_{36}, \mathtt{u}_{36}, \mathtt{v}_{36}, \mathtt{w}_{36}, \mathtt{x}_{36}, \mathtt{y}_{36}, \mathtt{z}_{36}, \mathtt{10}_{36}\}$$

Lo “zero”  nelle tavole astronomiche babilonesi (II sec a.C.)



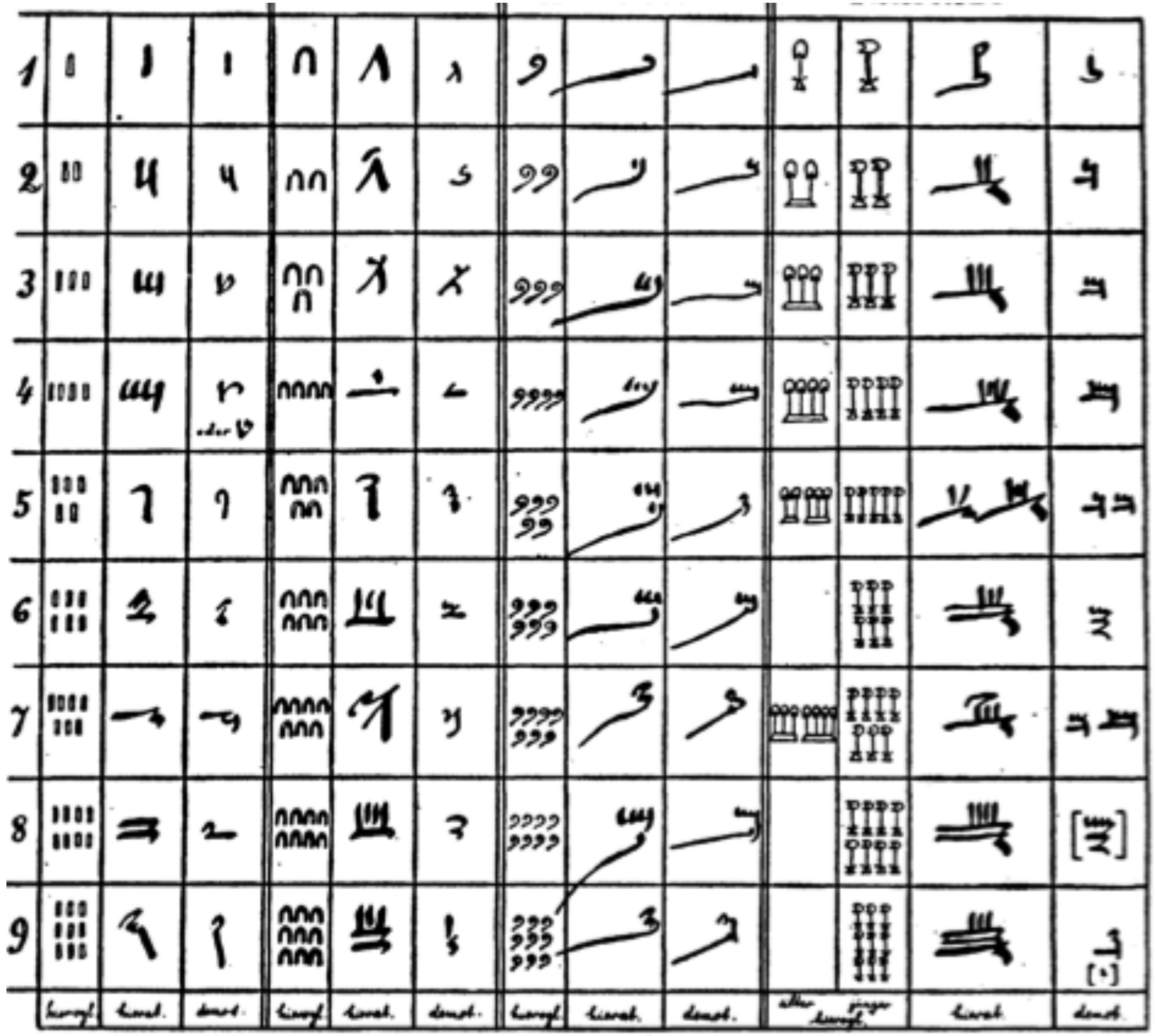
Però più che un numero è visto come un “segno di separazione”:
(R. Labat, *Manuel d’Épigraphie Akkadienne*, Paris, 1948)



Gli egizi

Compaiono simboli per le potenze di dieci (due mani)

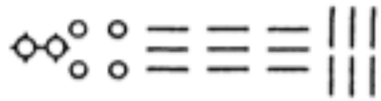
unità decine centinaia migliaia



Geroglifico / Ieratico (sacerdotale) / demotico (popolare)

I greci

Caratteri antichi
pre-erodiani



= 2496

Elio Erodiano il Grammatico
(Bizantino, ca. 150-250)

- Compare il 5 (una mano)
- Bastano *meno* simboli per
  i numeri da 1 a 9:
  I, II, III, IIII, Δ, ΔI, ΔII, ΔIII, ΔIIII
- Compaiono multipli di 5 come
  "riassunti grafici":

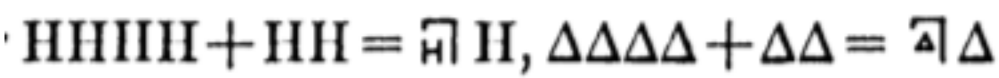
 = πέντε δέκα = 50

 = πέντε hεκατόν = 500

1	I	ἴος	(ios)
5	Π	πέντε	(pente)
10	Δ	δέκα	(deka)
100	H	hεκατόν	(hekaton)
1000	X	χίλιοι	(khilioi)
1001	M	μύριοι	(myrioi)

Sono le lettere iniziali dei *nomi* dei numeri

 = 1739



$400 + 200 = 5 \times 100 + 100, \quad 40 + 20 = 5 \times 10 + 10$

Passaggio al sistema puramente alfabetico

α	β	γ	δ	ϵ	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90

ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	͵α	͵β	͵γ,
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000	2,000	3,000

etc.

M	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$,	etc.
10,000	20,000	30,000	

Passaggio al sistema puramente alfabetico

χ𐅅HHΔΔΔΠ|||| = 1739 = ͵αψλθ

HHHHH + HH = 𐅅H, ΔΔΔΔ + ΔΔ = 𐅄Δ

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$\upsilon + \sigma = \chi$ $\qquad\qquad$ $\mu + \kappa = \xi$

- Richiede uno sforzo mnemonico enorme negli “studenti”
- *Consuma molto meno spazio*
- pietra > argilla > tavolette cerate > papiro > pergamena > carta > ?

Valore dell’anno solare in giorni in Tolomeo (~ 150)

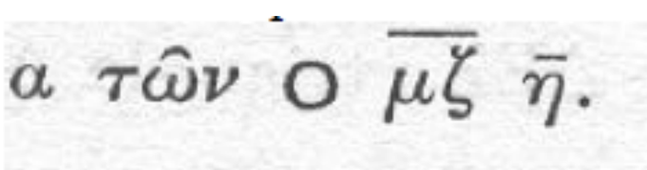
ἀπὸ τῶν τῆς κατὰ τὸ δ'' ἐπουσίας τξε ιε', ἕξομεν τὸν ἐπιζητούμενον ἐνιαύσιον χρόνον ἡμερῶν $\boxed{\text{τξε ιδ' μη''.}}$ Τοσοῦτον μὲν δὴ πλῆθος τῶν ἡμερῶν εἴη ἂν ἔγγιστα ἡμῖν ὡς ἔνι μάλιστα ἐκ τῶν παρόντων εἰλημμένον.

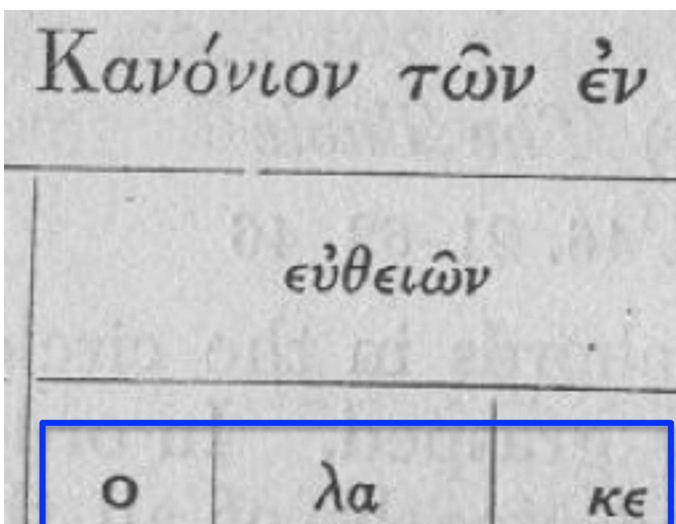
$$365\ \underbrace{14'\ 48''}_{\text{sessagesimale}} = 365 + 1/4 - 1/300$$

Lo zero o nelle tavole astronomiche greche (*Almegesto*)

(o = οὐδείς, οὐδεμία, οὐδέν [nessuno, nulla]
“Οὖτις ἐμοί γ᾿ ὄνομα” Od., IX:360-412)

0; 47, 8


α τῶν ο $\overline{\mu\zeta}$ $\bar{\eta}$.


Κανόνιον τῶν ἐν

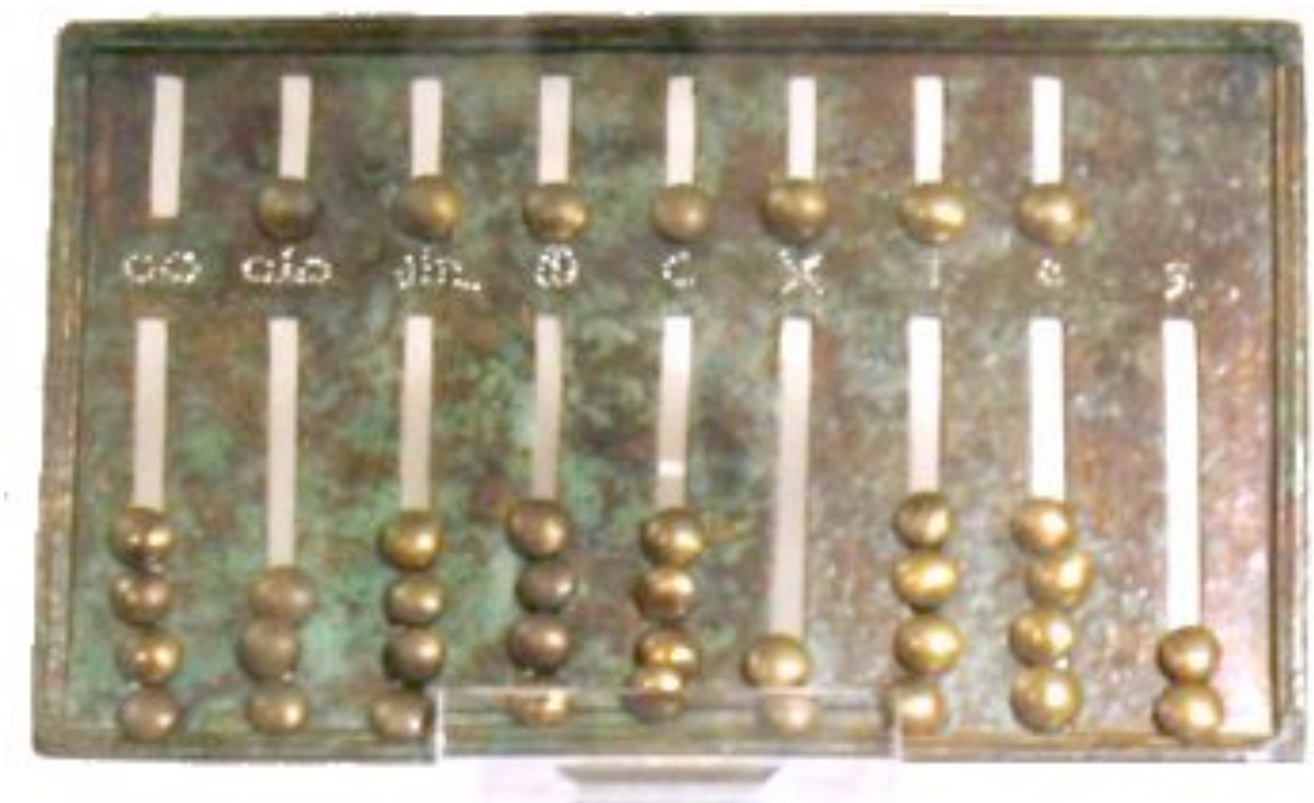
εὐθειῶν		
ο	λα	κε

0; 31, 25

Domande a questo punto?

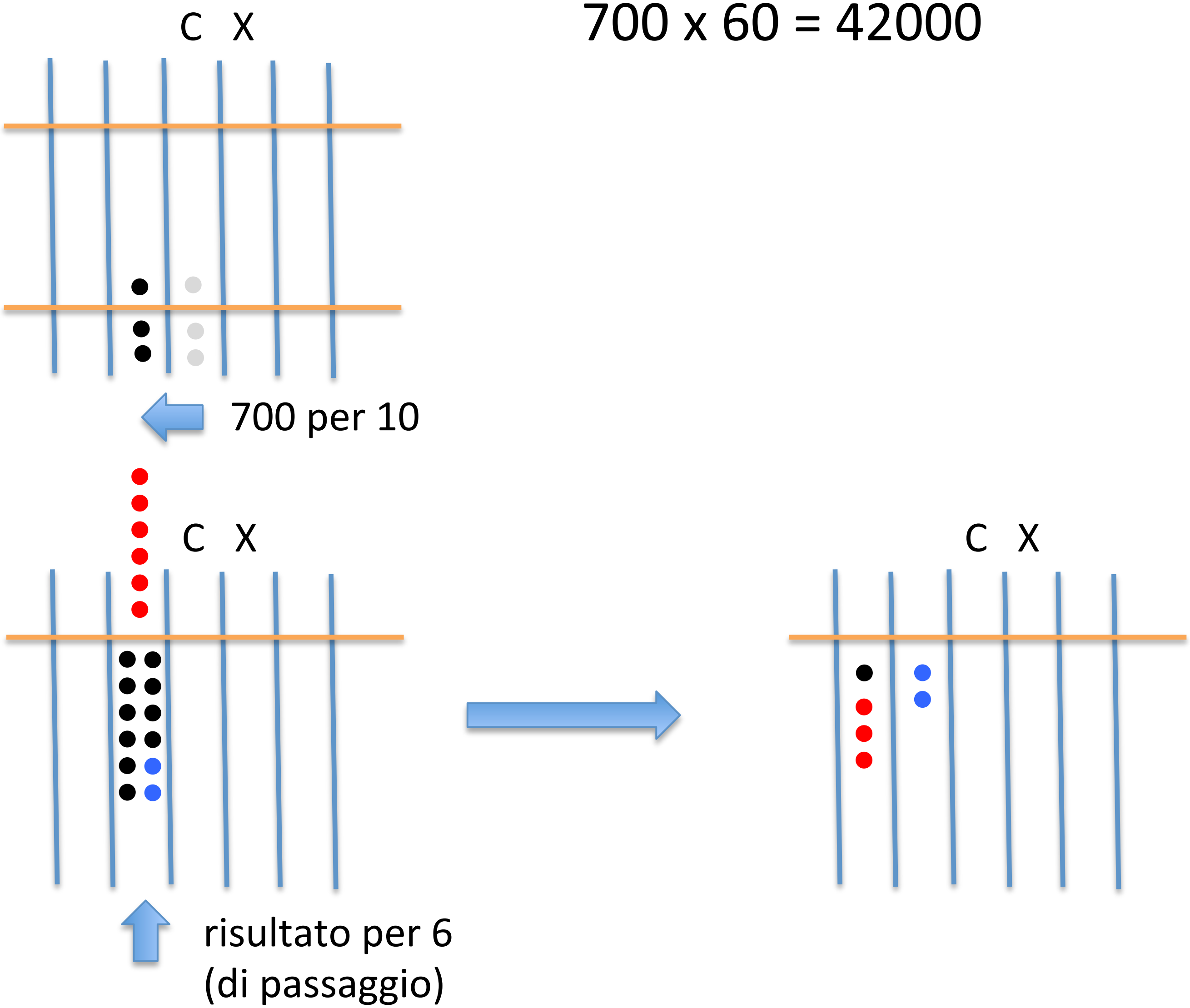
(continua . . .)

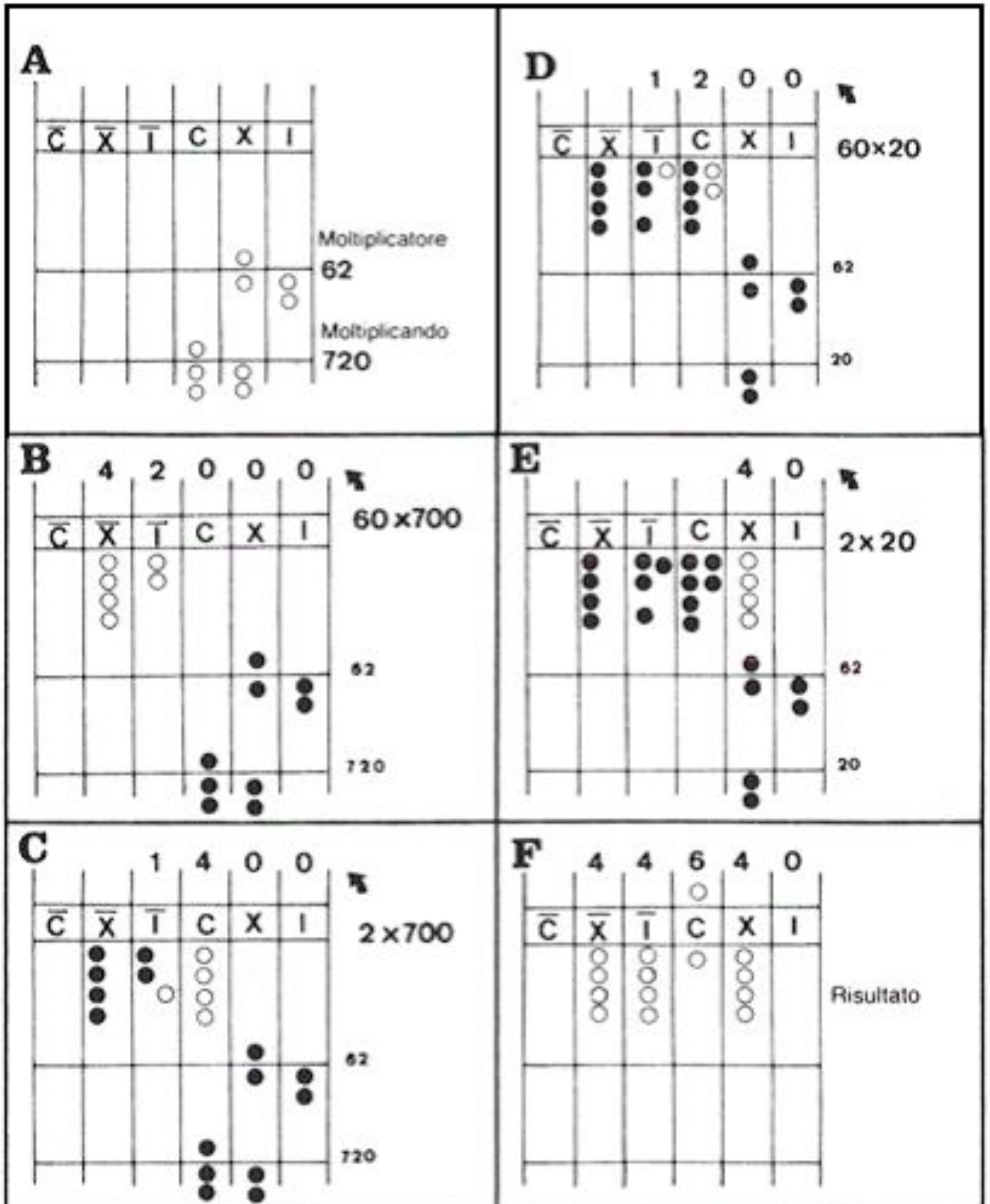
Gli abaci: un’eredità della notazione erodiana?



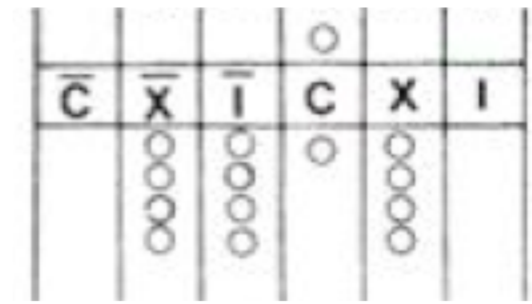
Abaco romano
(Roma - Museo Nazionale Romano di Palazzo Massimo)

700 x 60 = 42000




A
C̄ X̄ Ī C X I
Moltiplicatore
62
Moltiplicando
720
B
4 2 0 0 0
60×700
C̄ X̄ Ī C X I
62
720
C
1 4 0 0
2×700
C̄ X̄ Ī C X I
62
720
D
1 2 0 0
60×20
C̄ X̄ Ī C X I
62
20
E
4 0
2×20
C̄ X̄ Ī C X I
62
20
F
4 4 6 4 0
C̄ X̄ Ī C X I
Risultato

Come “memorizzare” il risultato?



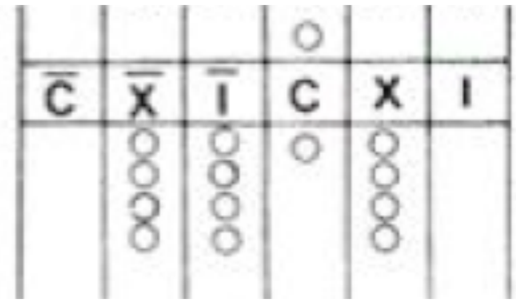
- Possiamo per un abaco a 6 colonne come in figura indicare gli “spostamenti a sinistra” delle palline.
- Uno spostamento a sinistra equivale ad una moltiplicazione per 10

⑤ ④ ③ ② ① ❍

0 4 4 6 4 0 $= 4 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

Quasi ci siamo: basta accordarsi sui simboli per i numeri interi da uno a nove.
E per lo spazio vuoto: lo prendiamo in prestito dai greci: un “tondino” vuoto.

Come “memorizzare” il risultato?



Assumiamo una banale codifica alfabetica:

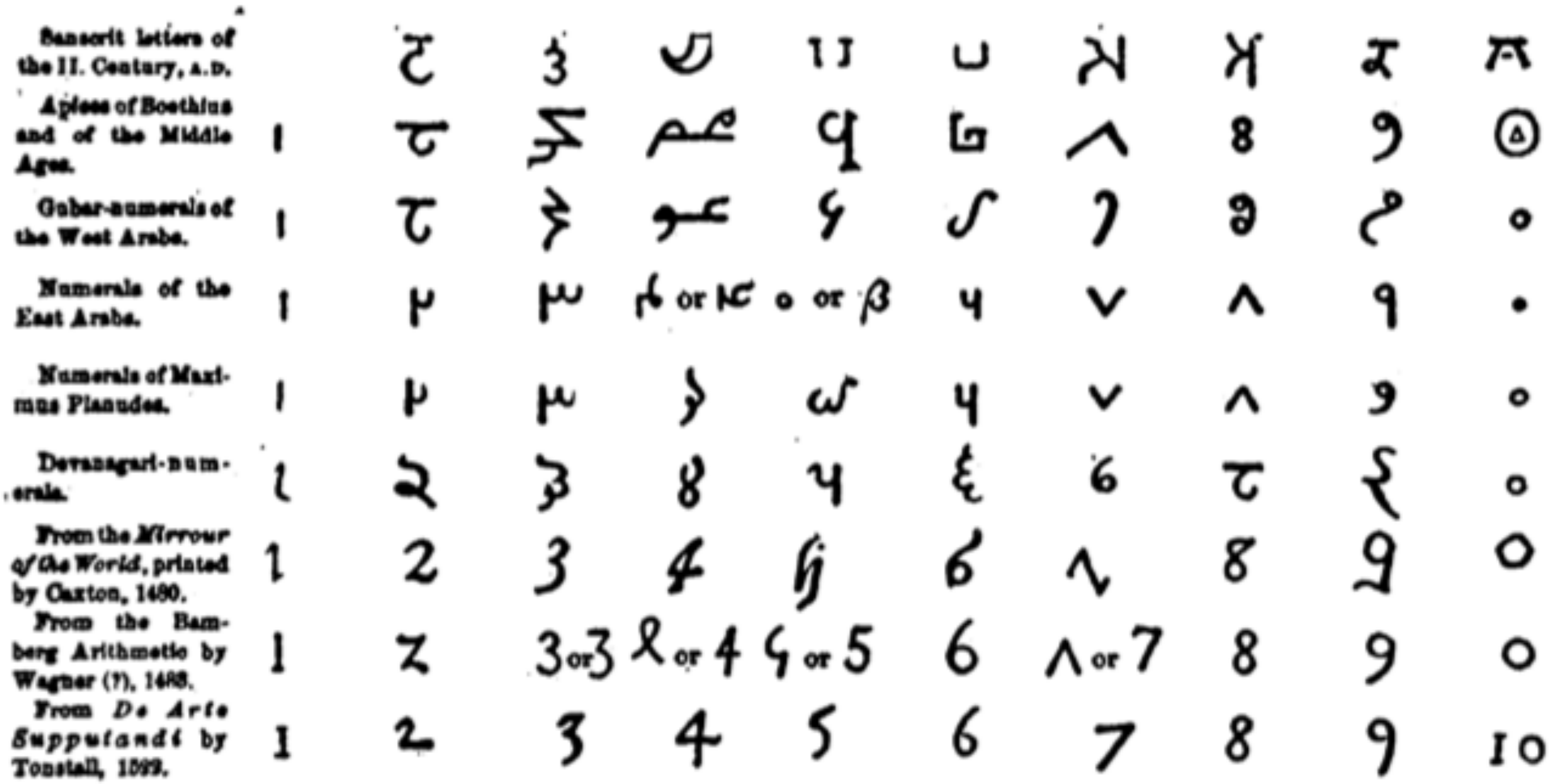
1 = a 2 = b 3 = c 4 = d 5 = e
6 = f 7 = g 8 = h 9 = i

Serve un “promemoria” per il fatto che la prima e la sesta colonna sono vuote:
Metteremo ad esempio una Z, e scriveremo

ZddfdZ

Oppure:
convenendo che il promemoria “si allinea a destra”, solo ddfdZ, ossia 44640

Indo-arabici



Brahmagupta

598 - 670

Fu Leonardo Fibonacci a far conoscere la numerazione posizionale indo-arabica in Europa: attraverso gli arabi infatti lo zero passa in Europa e Fibonacci, nel suo *Liber abbaci* pubblicato nel 1202, tradusse il termine arabo per lo zero

sifr (cifra) in *zephirum* (inserendo le vocali).

Si arriva a quindi al veneziano *zevero* e poi, finalmente a

zero

EXPOSITION

DU

SYSTÈME DU MONDE;

PAR M. LE MARQUIS DE LAPLACE,

Pair de France; Grand Officier de la Légion-d'Honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc.

CINQUIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE (SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER),

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

JANVIER 1824.

Le marquis de Laplace

Exposition du système du monde

Paris, 1796

1825: 5e éd. / rev. et augm. par l'auteur.

p. 323

C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois, une valeur absolue et une valeur de position; idée fine et importante, qui nous paraît maintenant si simple, que nous en sentons à peine, le mérite. Mais cette simplicité même, et l'extrême facilité qui en résulte pour tous les calculs, placent notre système d'arithmétique au premier rang des inventions utiles; et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore.

La prova del 9

$$\left.\begin{array}{l} a = b + h\,m \\ c = d + k\,m \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + c = b + d + (h + k)\,m \\ a - c = b - d + (h - k)\,m \\ a\,c = b\,d + d\,h\,m + b\,k\,m + h\,k\,m^2 \end{array}\right.$$

Cioè: se *a, b, c, d* sono interi ed *m* è un intero positivo, allora

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ a - c \equiv b - d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{array}\right.$$

Se n è un intero positivo $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

$$10 = 9 + 1 \Longrightarrow 10 \equiv 1 \pmod{9} \Longrightarrow 10^n \equiv 1 \pmod{9}$$

$$N = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{a_j 10^j}$$

$$a_j 10^j \equiv a_j \times 1 = a_j$$

$$N \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \pmod{9}$$

1356354 × 6869329 = 9317241866466

27 43 63

27 × 43 - 63 = 122 × 9

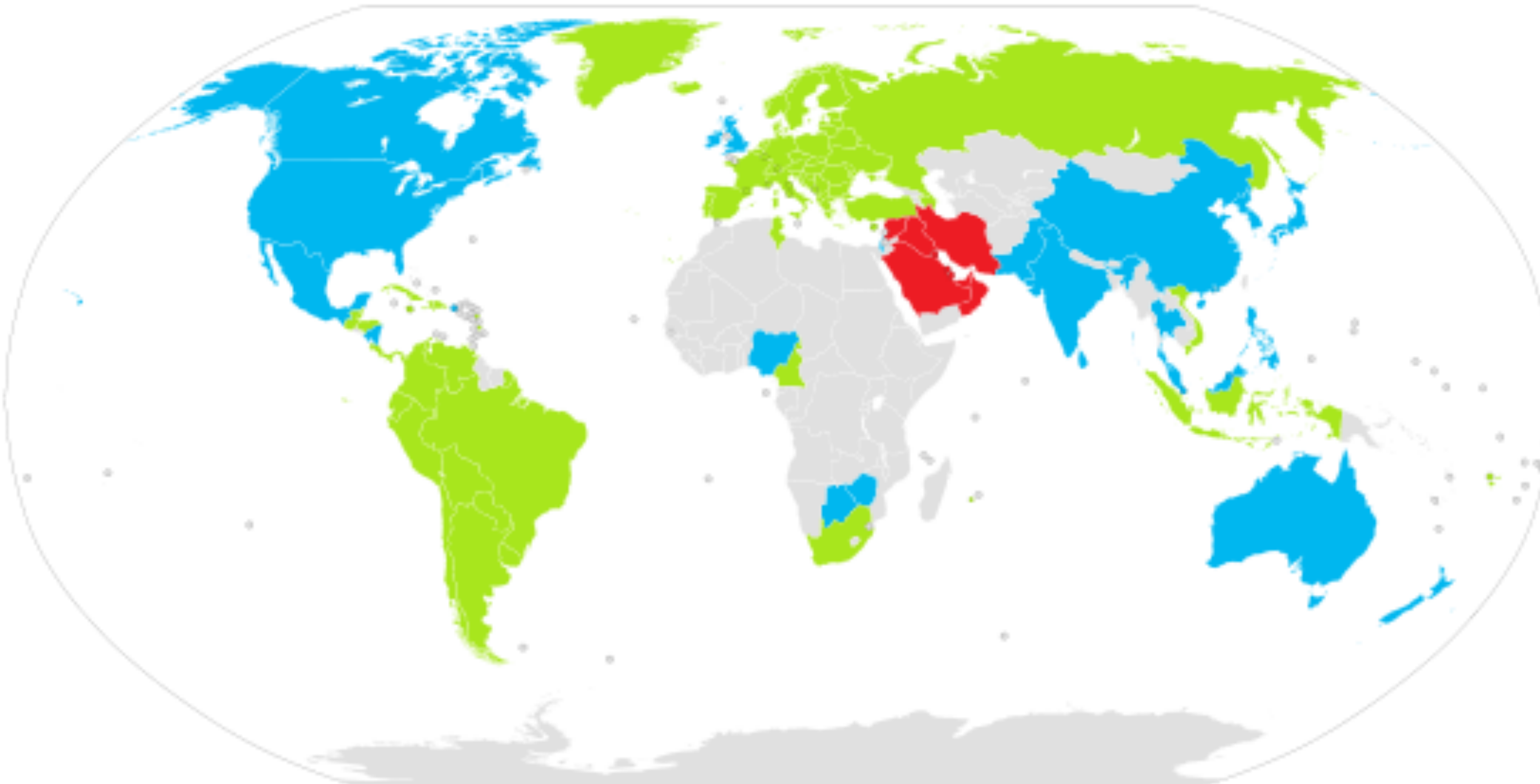
Simon Stevin
1585 (La *Thiende*, in fiammingo)

32.57 × 89.46 = 2913.71

T GHEGHEVEN. Het sy Thiendetal te Menichvuldighen 32 ⓪ 5 ① 7 ②, ende het Thiendetal Menichvulder 89 ⓪ 4 ① 6 ②. TBEGHEERDE. Wy moeten haer Vytbreng vinden.

Il numero 32.57 viene rappresentato a stampa “allineando” la parte intera e segnando solo “i posti a destra della virgola” con una numerazione in cerchietti.

Colonne intere dell’abaco



Verde: Paesi dove si usa la virgola come separatore decimale.
Azzurro: Paesi dove si usa il punto come separatore decimale.
Rosso: Paesi dove non è in vigore il sistema di numerazione arabo.
Grigio: Paesi di cui non si hanno informazioni al riguardo.

http://solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch/spot_num.txt

YEAR	MON	SSN	DEV
1749	1	58.0	24.1
1749	2	62.6	25.1
1749	3	70.0	26.6
1749	4	55.7	23.6
1749	5	85.0	29.4
1749	6	83.5	29.2
1749	7	94.8	31.1
1749	8	66.3	25.9
1749	9	75.9	27.7
1749	10	75.5	27.7
1749	11	158.6	40.6
1749	12	85.2	29.5
...	...	...	...
2011	1	18.8	7.7
2011	2	29.6	14.4
2011	3	55.8	25.0
2011	4	54.4	13.1
2011	5	41.5	17.1
2011	6	37.0	21.3
2011	7	43.8	15.9
2011	8	50.6	22.2
2011	9	78.0	21.2
2011	10	88.0	23.4
2011	11	96.7	14.6
2011	12	73.0	17.7
2012	1	58.3	18.6
2012	2	32.9	10.6
2012	3	64.3	16.2
2012	4	55.2	28.6
2012	5	69.0	11.0
2012	6	64.5	33.2
2012	7	66.5	22.9

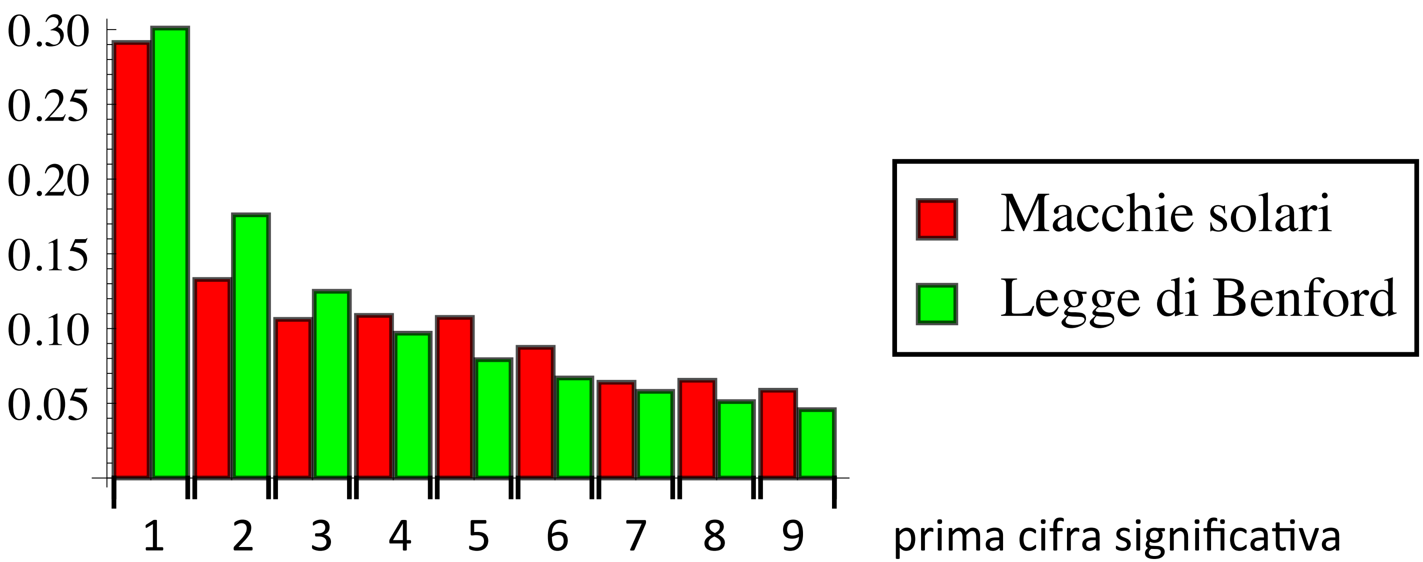
Legge di Benford o Legge della Prima Cifra

In un "grande" dataset di dati del mondo reale, scritti in forma decimale, la probabilità (frequanza relativa) che la prima cifra decimale significativa sia uguale a *k* è approssimativamente:

$$\log_{10}(1 + 1/k)$$

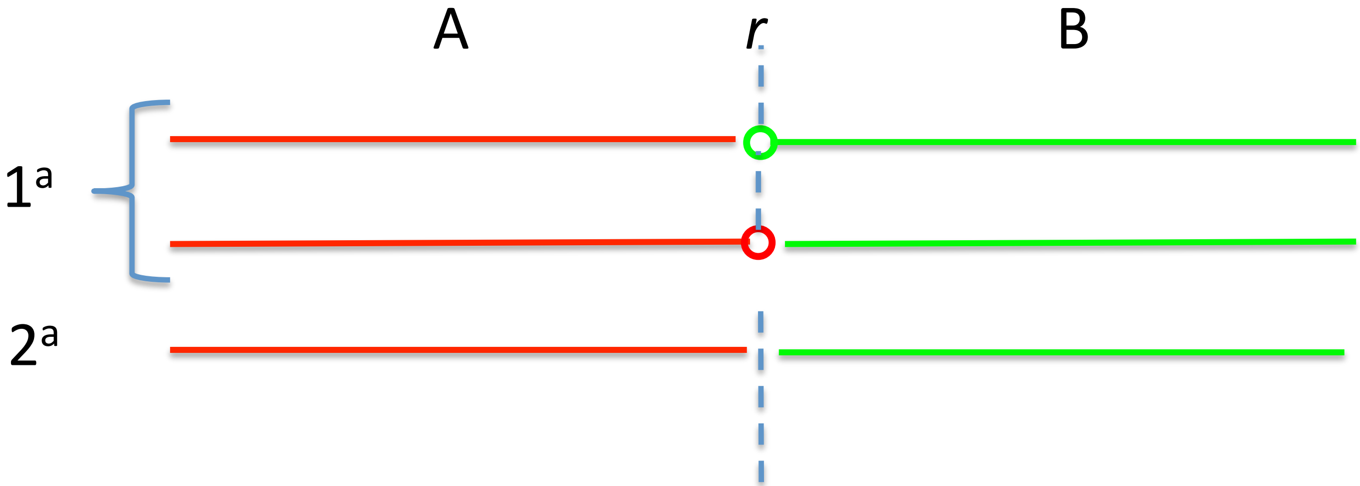
Esempio: numero di macchie solari osservate mensilmente dal gen. 1749 al lug. 2012 (fonte: NASA)

Freq. rel. oss. & prob. teorica

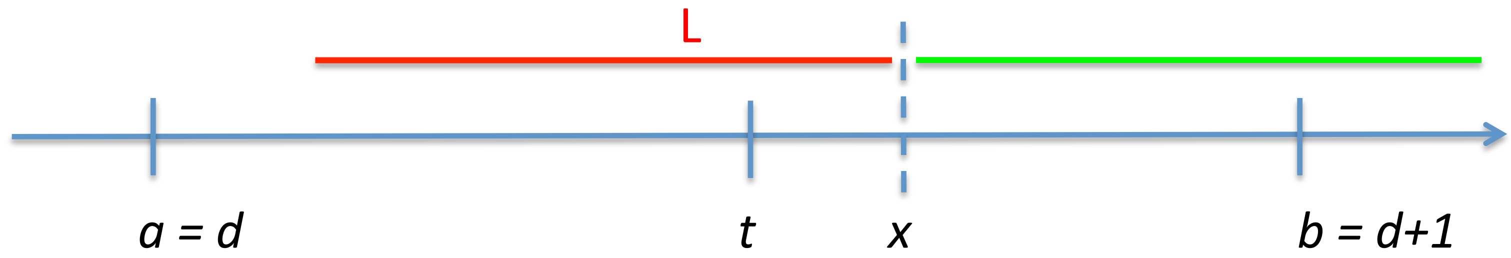


Mi sembra importante che gli insegnanti siano consapevoli dell'esistenza di una pluralità di approcci diversi [alla costruzione dei numeri reali] *e dei loro mutui legami.*

Vinicio Villani,
Cominciamo da Zero



Mostriamo che allineamento di cifre può venir interpretato non tanto come lista dei coefficienti di una serie di potenze, ma piuttosto come *codice* per la descrizione di una sezione di Dedekind, e quindi di un numero reale. Pertanto, la conclusione principale del capitolo è che la costruzione di $\mathbb{R}$ con gli allineamenti decimali è nient'altro che un caso particolare della costruzione di Dedekind, della quale conseguentemente conserva i difetti: le ambiguità del tipo $0.99999\ldots = 1.00000\ldots$ nella rappresentazione decimale dei reali hanno la loro ineliminabile radice nell'ambiguità della rappresentazione di una sezione di $\mathbb{Q}$ di prima specie, nella quale il numero r "dove si taglia" può indifferentemente essere messo nella classe inferiore o nella classe superiore. Questa "spiegazione" dell'uguaglianza $0.99999\ldots = 1.00000\ldots$ ci appare molto più convincente della mera constatazione che $\sum_{k=1}^{\infty} 9/10^k = 1$.



INPUT: $N \geq 1$

calcolo: $d = \max(\mathbb{N} \cap A)$

inizializzo: $a = d$, $b = d + 1$

inizializzo la lista delle cifre: $s = \emptyset$

FOR $n = 1, 2, \ldots, N$

calcolo il punto di mezzo: $t = (a + b)/2$

IF $t \in A$

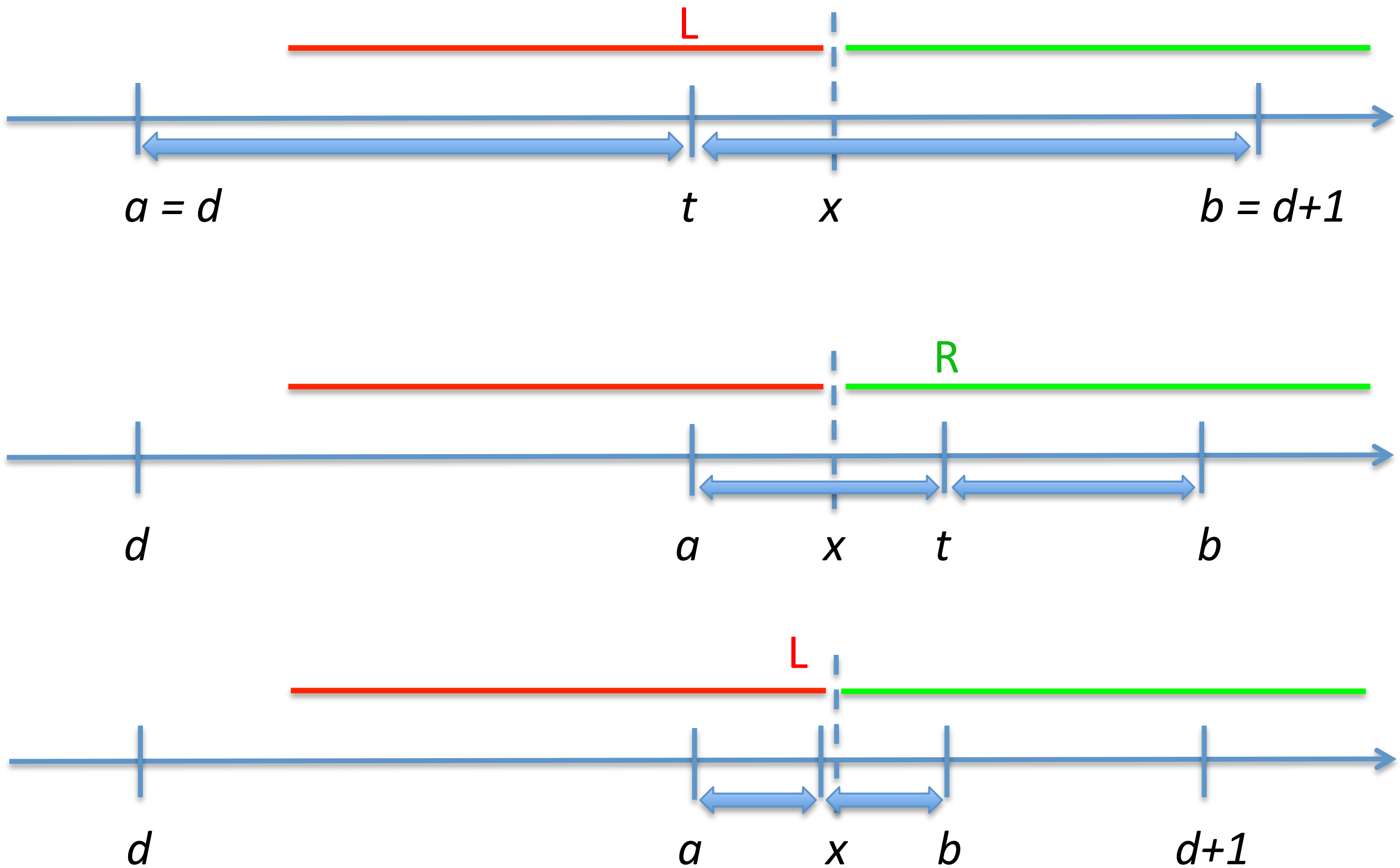
THEN $a = t$, aggiungo ~~la cifra 1~~ "L" ad s

ELSE $b = t$, aggiungo ~~la cifra 0~~ "R" ad s

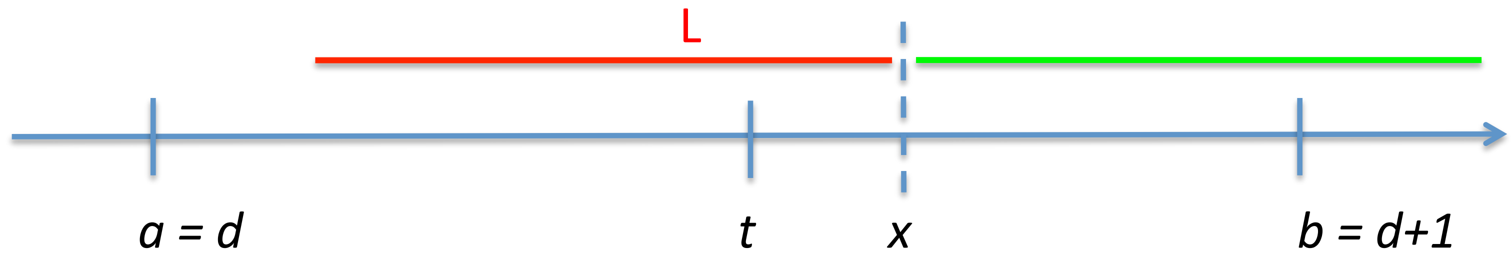
END IF

END FOR

OUTPUT: s

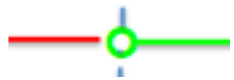


$$x = d\,.\,\mathrm{L\;R\;L}\ldots = d + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \ldots = d + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = d.101\ldots$$

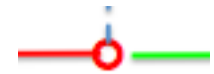


INPUT: $N \geq 1$
calcolo: $d = \max(\mathbb{N} \cap A)$
inizializzo: $a = d$, $b = d + 1$
inizializzo la lista delle cifre: $s = \emptyset$
FOR $n = 1, 2, \ldots, N$
calcolo il punto di mezzo: $t = (a + b)/2$
IF $t \in A$
THEN $a = t$, aggiungo “L” ~~la cifra 1~~ ad s
ELSE $b = t$, aggiungo “R” ~~la cifra 0~~ ad s
END IF
END FOR
OUTPUT: s

$X = 1/2$



```
> test <- function(q){q < 1/2}
> # A non ha massimo
> N <- 30
> d <- 0
> a <- d
> b <- d+1
> s <- c()
> for (j in (1:N)){
+      t <- (a+b)/2;
+      if (test(t)) {a <- t; s <- c(s,"L")}
+      else {b <- t; s <- c(s,"R")}
+      }
x = 0 . RLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL ...
```



```
> test <- function(q){q ≤ 1/2}
> # B non ha minimo
> N <- 30
> d <- 0
> a <- d
> b <- d+1
> s <- c()
> for (j in (1:N)){
+      t <- (a+b)/2;
+      if (test(t)) {a <- t; s <- c(s,"L")}
+      else {b <- t; s <- c(s,"R")}
+      }
x = 0 .LRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR ...
```

$X = 3/5$

```
> test <- function(q){q < 3/5} # A non ha massimo
> N <- 30
> d <- 0
> a <- d
> b <- d+1
> s <- c()
> for (j in (1:N)){
+     t <- (a+b)/2;
+     if (test(t)) {a <- t; s <- c(s,"L")}
+     else {b <- t; s <- c(s,"R")}
+     }
x = 0 . LRRLLRRLLRRLLRRLLRRLLRRLLRRLLR ...
```

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

```
> test <- function(q){(2*q - 1)^2 < 5} # A non ha massimo
> N <- 30
> d <- 1
> a <- d
> b <- d+1
> s <- c()
> for (j in (1:N)){
+     t <- (a+b)/2;
+     if (test(t)) {a <- t; s <- c(s,"L")}
+     else {b <- t; s <- c(s,"R")}
+     }
x = 1 . LRRLLLLRRRLLRLLLRLLLLRRLLRLLLR ...
```

```
> test <- function(q){q < 1/16}
> N <- 30
> d <- 0
> a <- d
> b <- d+1
> s <- c()
> for (j in (1:N)){
+       t <- (a+b)/2;
+       if (test(t)) {a <- t; s <- c(s,1)}
+       else {b <- t; s <- c(s,0)}
+       }
> print(paste("x =",d,".",paste
  (s,collapse=""),"..."),quote=FALSE)
```

x = 0 . 000011111111111111111111111111 ...

$X = 1/16$

```
> test <- function(q){q ≤ 1/16}
> N <- 30
> d <- 0
> a <- d
> b <- d+1
> s <- c()
> for (j in (1:N)){
+       t <- (a+b)/2;
+       if (test(t)) {a <- t; s <- c(s,1)}
+       else {b <- t; s <- c(s,0)}
+       }
> print(paste("x =",d,".",paste
  (s,collapse=""),"..."),quote=FALSE)
```

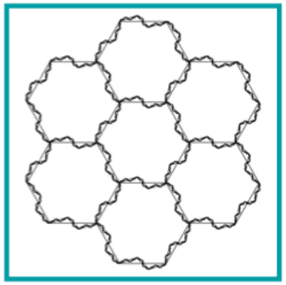
x = 0 . 000100000000000000000000000000 ...

COMPLEMENTI DI MATEMATICA PER L'INDIRIZZO DIDATTICO • Volume 18

Carla Fiori · Sergio Invernizzi

Numeri Reali

Presentazione di
Vinicio Villani



Pitagora Editrice Bologna

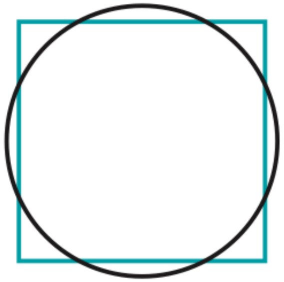
COMPLEMENTI DI MATEMATICA PER L'INDIRIZZO DIDATTICO • Volume 20

Gabriella Caristi · Carla Fiori · Sergio Invernizzi

Dalle Frazioni Continue alla Trascendenza di π

Centocinquant'anni di matematica "dimenticata"

Presentazione di
Ferdinando Arzarello



Pitagora Editrice Bologna