Riflessioni e proposte didattiche sull'uso di strumenti tecnologici

La bellezza dei numeri complessi resa evidente dall'uso del software

Cristiano Dané
Liceo Sc. A. Volta di Torino

Indice

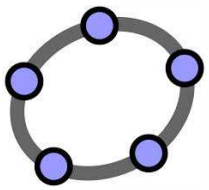
- La **gestione degli strumenti** in GeoGebra: il caso della Geometria

- Gli strumenti per le **operazioni con i numeri complessi** e le proprietà delle operazioni
- I numeri complessi e la **Geometria** (1)
- Le **potenze complesse** e la **spirale equiangola**

  Salto le radici e non solo …
- Verso il **teorema fondamentale dell'algebra**

- L'**esponenziale complesso**
- La **funzione reciproco** e l'**inversione**
- I numeri complessi e la **Geometria** (2)
- La **trasformazione di Moebius**

Riflessioni su didattica con le tecnologie

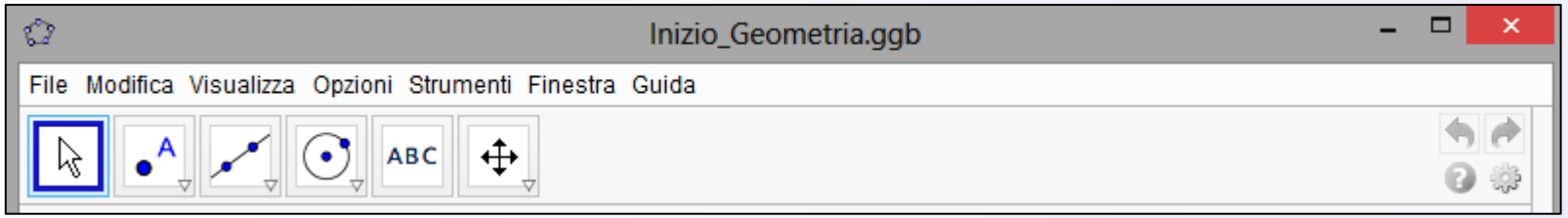


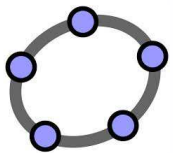
Gestione degli strumenti - Geometria

Un percorso didattico evolve, è dinamico, il software è uno strumento statico. Spesso il software è sistematicamente troppo potente rispetto alle possibilità di utilizzo da parte dello studente della media superiore.

Boieri & altri, una decina di anni fa (e oltre…)

- Così come Cabri, anche GeoGebra (nella vers. 4) consente di rendere "isomorfi" il percorso didattico e lo strumento tecnologico in Geometria.





Le operazioni con i numeri complessi

- Percorso storico
- Definizione e operazioni

Un *numero complesso* è un'espressione della forma $a+ib$ in cui $a,b\in\mathbb{R}$ e i è quel numero (detto *unità immaginaria*) tale che $i^2=-1$

$\mathbb{C}=\{z=a+ib\ :\ a,b\in\mathbb{R}\}.$

Dati i numeri complessi $z_1=a_1+ib_1$ e $z_2=a_2+ib_2$, definiamo

$$z_1+z_2=(a_1+a_1)+i(b_1+b_2)$$

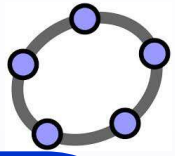
$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

Possiamo creare una corrispondenza biunivoca da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$

$$z=a+ib\rightarrow(a,b)$$

Le operazioni con i numeri complessi

- Togliamo un po' di comandi a GeoGebra e ne facciamo creare due nuovi agli studenti per la somma e per il prodotto.



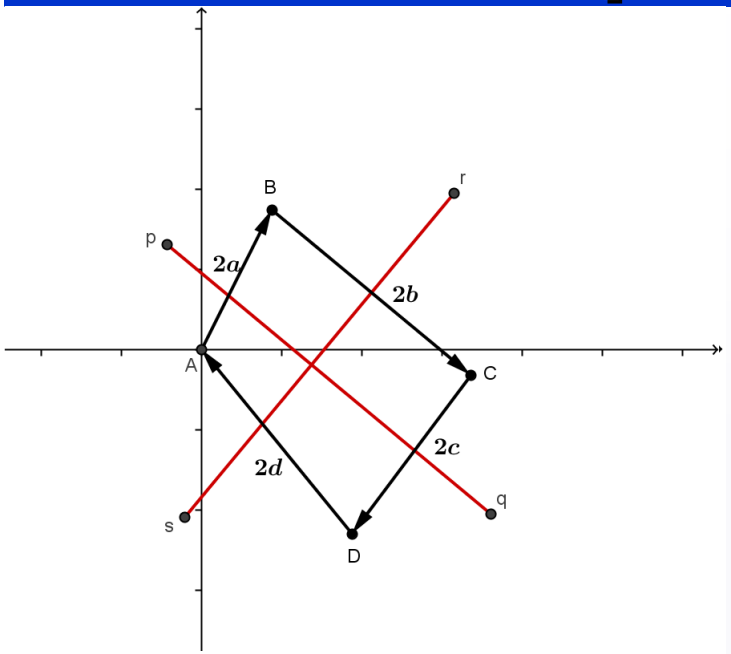
- La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ estendono quelli in $\mathbb{R}$ (quando i punti stanno sull'asse reale).
- Quali proprietà hanno le operazioni ($\mathbb{C}$ è un campo).
- La somma equivale a una traslazione $z'=z+z_1$.
- Il prodotto per un numero reale equivale a un'omotetia $z'=az$.
- Il prodotto per un numero complesso w con $|w|=1$ equivale a una rotazione.
- In particolare il prodotto per i è una rotazione di 90°.

- Si arriva alla forma trigonometrica

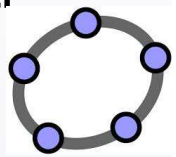
$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z \cdot w = (\rho \cdot r)(\cos(\vartheta+\varphi) + \sin(\vartheta+\varphi))$$

Ma quanto andare avanti nascondendo le potenzialità di GG?

I numeri complessi e la Geometria (1)



E' dato un quadrilatero *ABCD*. Sui suoi lati costruisci quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Che relazioni legano i segmenti *PQ* e *RS* che hanno per estremi i centri dei quadrati opposti?



Sappiamo che $a+b+c+d=0$

$p = a + ai$

$q = 2a + 2b + c + ci$

$r = 2a + b + bi$

$s = 2a + 2b + 2c + d + di$

$q - p = a + 2b + c + (c - a)i$

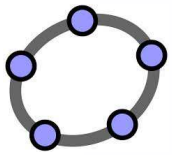
$q - p = b - d + (c - a)i$

$s - r = b + 2c + d + (d - b)i$

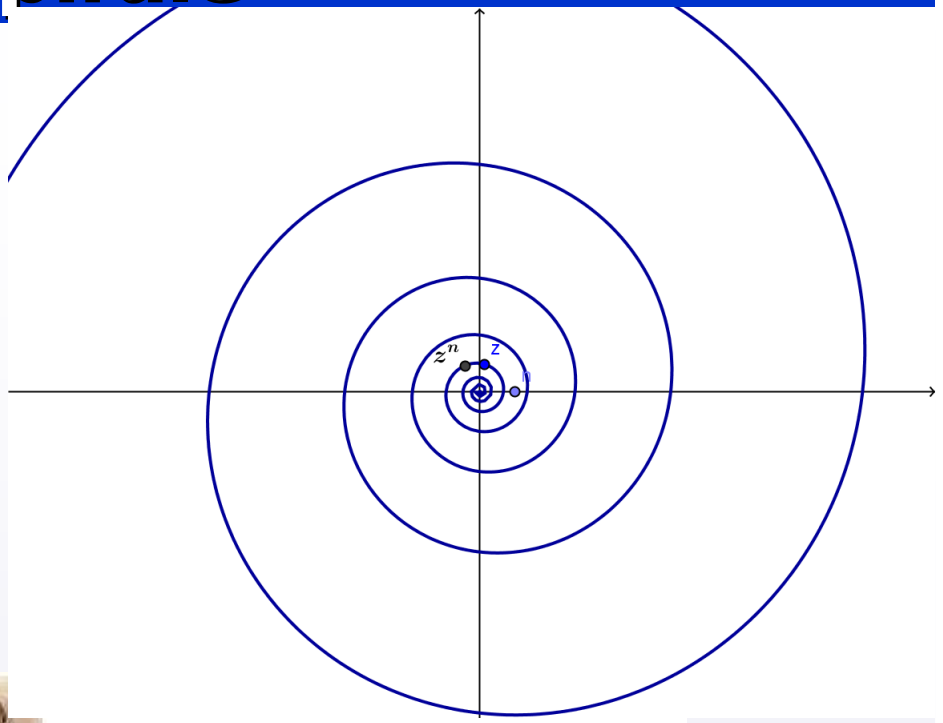
$s - r = c - a + (d - b)i$

$q - p = (s - r)i$

Potenze complesse e spirale



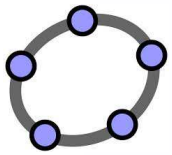
$$z^n = \rho^n \left(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta\right)$$



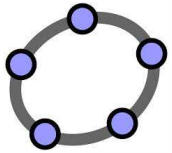
Jakob Bernoulli (1654-1705)

Eadem mutata resurgo
"risorgo uguale eppur diversa"

Verso il TFA



Grado 2



Grado 3

Costruire attività che permettano di discutere di Matematica

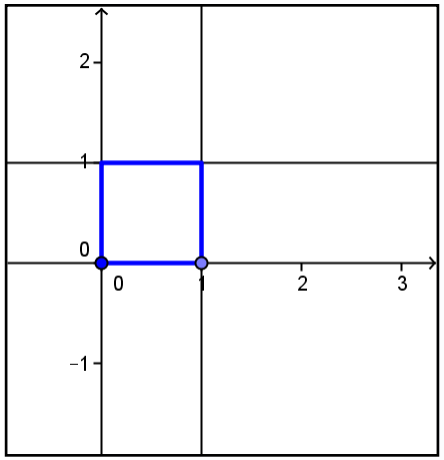
Teorema Fondamentale dell'Algebra: *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ha esattamente n zeri complessi, contati con la loro molteplicità.*

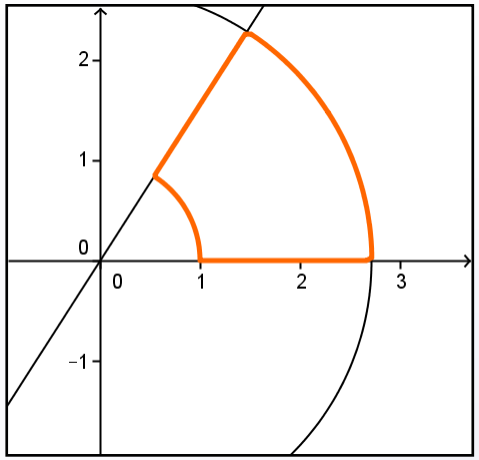
- *Se un numero complesso è uno zero di un polinomio a coefficienti reali, allora anche il suo coniugato è uno zero di quel polinomio.*
- *Un polinomio a coefficienti reali di grado tre ha almeno una radice reale.*

La funzione esponenziale

Def. $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

Se $z = x + iy$ si ha $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ quindi $\begin{cases} X = e^x \cos y \\ Y = e^x \sin y \end{cases}$





Visualizzare (dinamicamente), scoprire, invoglia a capire il perché…

$x = 1$ $\quad w = e \cdot (\cos y + i\sin y)$ cioè $\begin{cases} X = e \cdot \cos y \\ Y = e \cdot \sin y \end{cases}$

circonferenza di centro *O* e raggio *e*

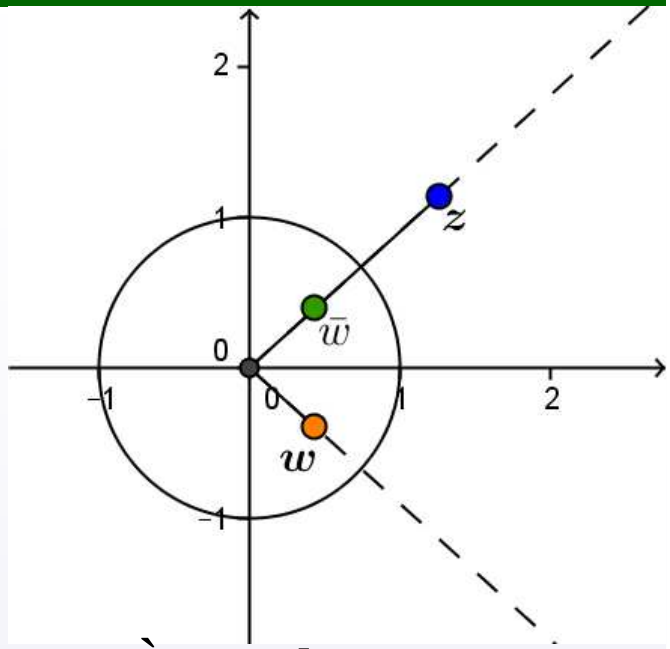
$y = 1$ $\quad w = e^x \cdot (\cos 1 + i\sin 1)$ cioè $\begin{cases} X = e^x \cdot \cos 1 \\ Y = e^x \cdot \sin 1 \end{cases}$

retta passante per *O* e con pendenza tan1

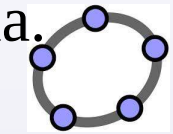
La funzione reciproco

$$w = \frac{1}{z} \qquad z = \rho e^{i\theta} \mapsto w = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Viene detta **inversione (complessa)** perché è legata all'**inversione circolare** rispetto alla circonferenza unitaria che ha espressione $\overline{w} = 1/\overline{z}$



- La circonferenza unitaria è fissa, i punti interni si trasformano in punti esterni e viceversa. È involutoria.



- Manda l'insieme di tutte le rette e circonferenze in se stesso

  a) *Le rette per l'origine si trasformano in rette per l'origine (e vv)*

  b) *Circonferenze passanti per l'origine si trasformano in rette (e vv)*

Se la circonferenza ha il centro sull'asse reale anche la sua immagine ha il centro reale.
Rette verticali si trasformano in rette verticali o circonferenze con centro sull'asse reale.

Equazione di circonferenze e rette

Circonferenza di centro z_0 e raggio r :

$$|z - z_0|^2 = r^2$$

Svolgendo: $(z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2$

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + z_0 \bar{z}_0 - r^2 = 0$$

Quindi $z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ con $b \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$

Il prodotto $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ fornisce i termini di secondo grado quindi possiamo concludere che:

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \text{ con } \beta \in \mathbb{C} \text{ e } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$$

è l'equazione di una circonferenza che degenera in una retta nel caso in cui $\alpha = 0$. ☺

Trasformati di circonferenze e rette

L'inversione $w=1/z$ manda l'insieme di tutte le rette e le circonferenze in se stesso.

$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ con $\beta\in\mathbb{C}$ e $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ diventa

$\alpha\frac{1}{z\bar{z}}+\beta\frac{1}{z}+\bar{\beta}\frac{1}{\bar{z}}+\gamma=0$ e moltiplicando per $z\bar{z}$ abbiamo

$\gamma z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\alpha=0$.

a) Le rette per l'origine si trasformano in rette per l'origine (e viceversa)

$\beta z+\bar{\beta}\bar{z}=0$ diventa $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}=0$. ☺

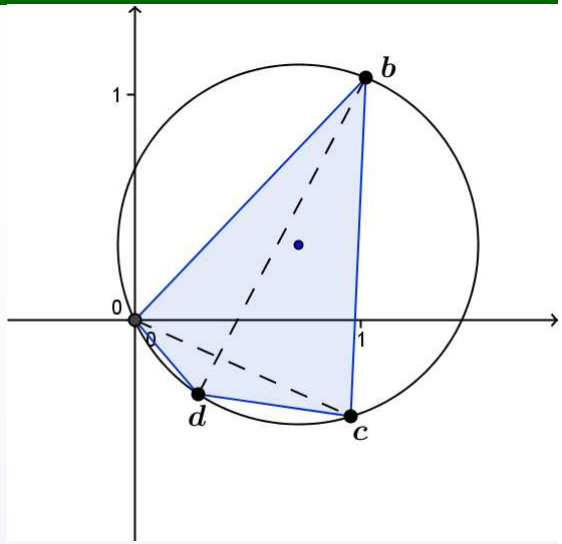
b) Circonferenze passanti per l'origine si trasformano in rette (e viceversa):

La circonferenza per O ha $\gamma=0$: $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}=0$ e quindi si trasforma nella retta $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\alpha=0$. ☺

Il teorema di Tolomeo

In un quadrilatero inscritto in una circonferenza, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti delle coppie di lati opposti.

$$|c||d-b| = |b||d-c| + |d||c-b|$$

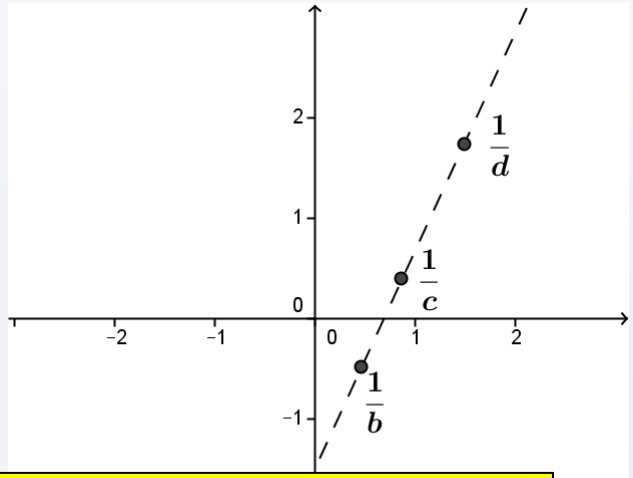


Si ha

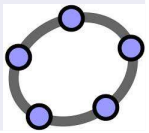
$$\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right| = \left|\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right|$$

$$\left|\frac{c-b}{bc}\right| + \left|\frac{d-c}{cd}\right| = \left|\frac{d-b}{bd}\right|$$

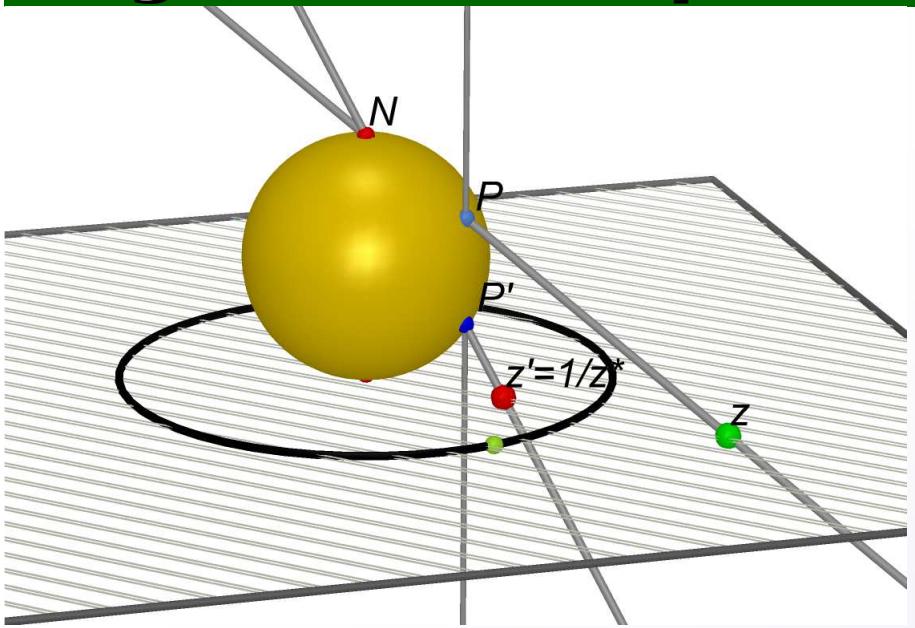
$$|d||c-b| + |b||d-c| = |c||d-b|$$

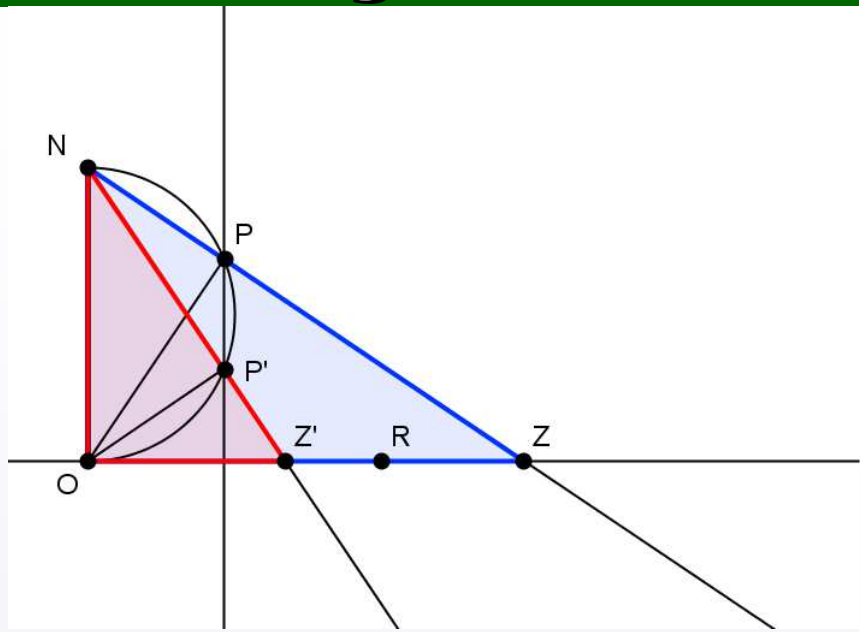


Lavorare su più registri contemporaneamente



Legame con la proiezione stereografica





$$ZNO \sim ONP \cong NP'O \sim NOZ'$$

$$\Downarrow$$

$$ZNO \sim NOZ'$$

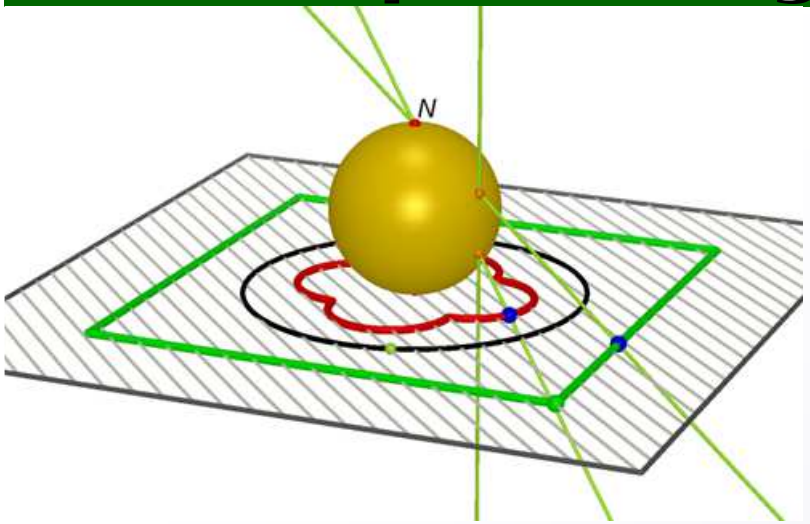
$$\Downarrow$$

$$\frac{\overline{OZ}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{OZ'}}$$

$$\Downarrow$$

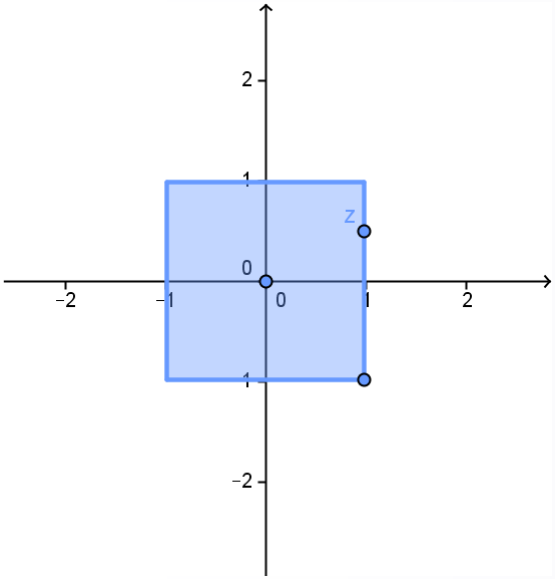
$$\overline{OZ'} = \frac{\overline{NO}^2}{\overline{OZ}}$$

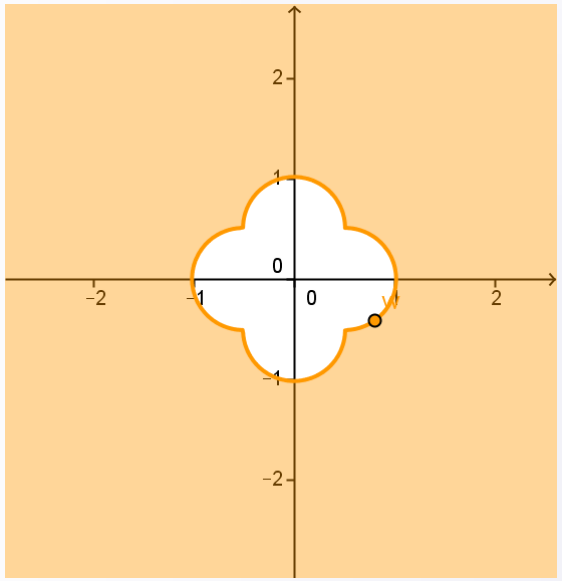
Ancora qualche figura

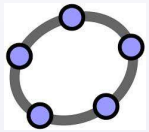


Inversione di circonferenze e rette

Ancora sull'inversione attraverso la sfera







Qualcosa di analogo sul piano

Uhhh… che bello!

La trasformazione di Moebius

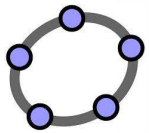
$$M(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad ad-bc \neq 0$$

Ogni trasformazione di Moebius

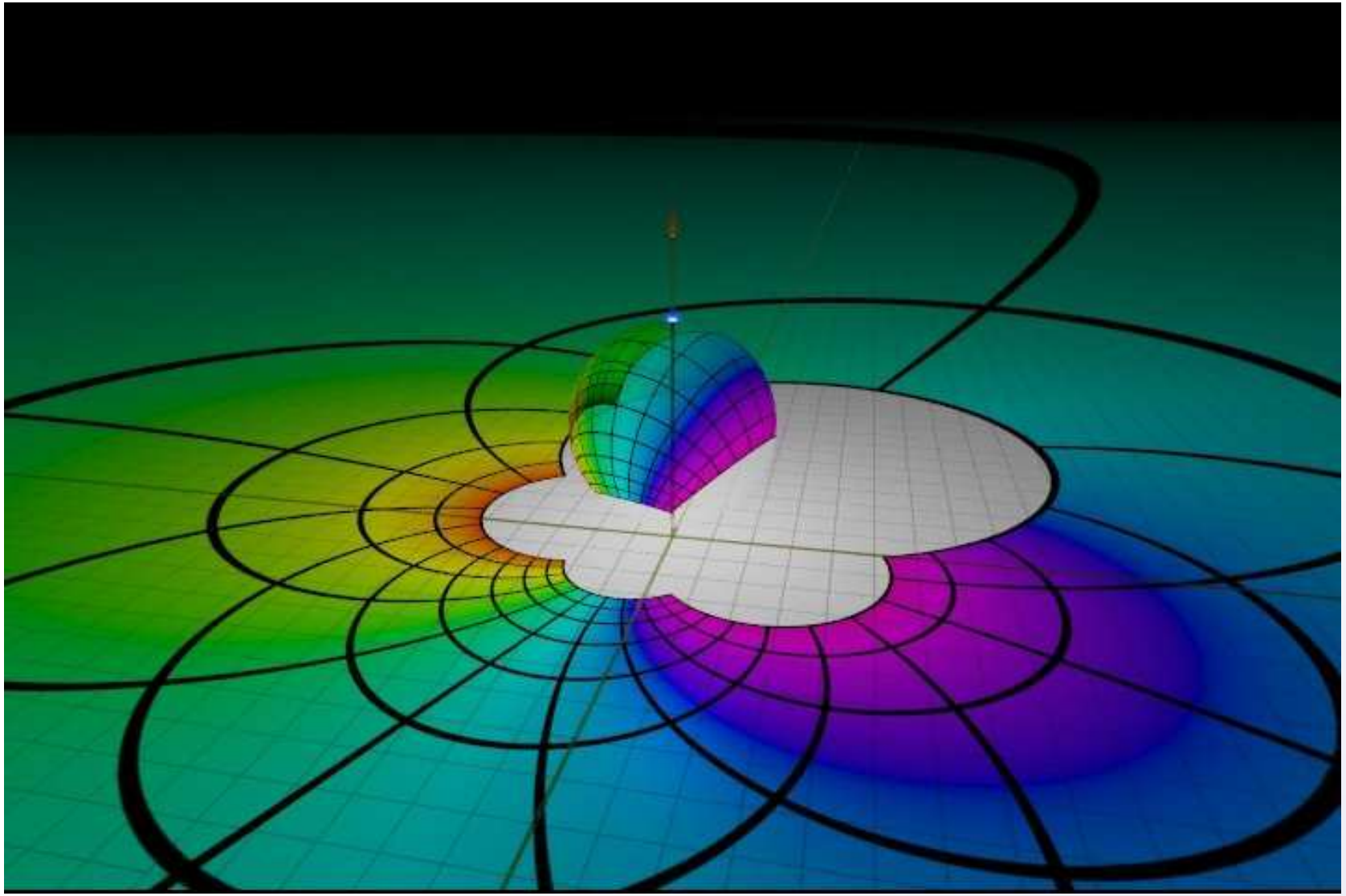
- è una corrispondenza biunivoca dalla sfera di Riemann in sé;
- si ottiene componendo traslazioni, roto-omotetie e inversioni;
- trasforma l'insieme delle circonferenze (e delle rette) in se stesso,

ma non solo: se una trasformazione lascia fisso l'insieme delle circonferenze è una trasformazione di Moebius;

- è conforme e ogni trasformazione conforme è di Moebius.



Moebius transformation revealed



FINE.