



Esperienze di insegnamento della probabilità

Il problema delle parti per un'introduzione al pensiero probabilistico

Giuseppina Fenaroli*, EldaGuala*, Manuel Goizueta#, Domingo Paola°, Giulia Sanna*

*Dipartimento di Matematica Università di Genova #Universitat Autònoma de Barcelona

° Liceo "G. Bruno" di Albenga

domingo.paola@tin.it

Fino alla metà del secolo XIX, sia i cultori di probabilità che gli storici della matematica si limitavano a indicare l'inizio del calcolo delle probabilità in quel 1654, sottolineando la parte del Cavaliere de Méré, accanito giocatore e uomo di mondo, che propose a Pascal i primi problemi di probabilità. Fu nella seconda metà del 1800 che gli storici della matematica pervennero a segnalare, talora di passaggio e comunque in modo ancor vago e frammentario, alcuni precursori, se non dei **concetti**, almeno di una certa **problematica** di tipo probabilistico.

Antonio Carlo Garibaldi. (1982). Sulla preistoria del calcolo delle probabilità, in *Atti del Convegno La Storia delle Matematiche in Italia*, Cagliari, p.377-384



Prima di Pascal e Fermat ...



Girolamo Cardano
(1501-1576)

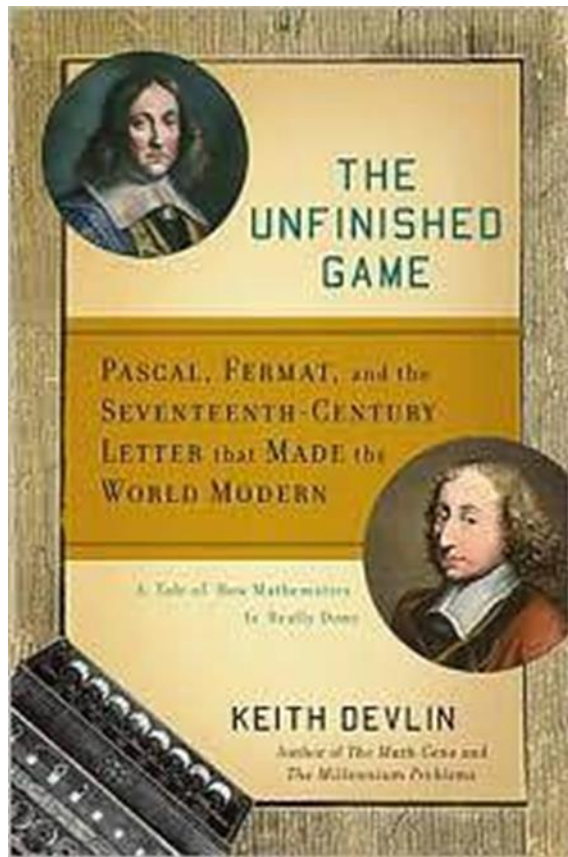


Nicolo Fontana
detto il Tartaglia
(1499 - 1557)



Alcune criticità legate al ragionamento probabilistico

- la difficoltà a legare le problematiche sul caso a ragionamenti e strumenti matematici conosciuti;
- la difficoltà a pensare in termini di ciò che può ancora accadere e a trovare adeguate rappresentazioni per lo spettro degli eventi possibili
- la difficoltà a contare, in situazioni complesse, i casi favorevoli all'accadere di un determinato evento e quelli possibili;
- la definizione di equità in un gioco come guadagno atteso nullo;
- L'opportunità di rinunciare a individuare, nella casualità con cui si succedono singoli eventi, leggi deterministiche di tipo causa – effetto e, soprattutto, manifestazioni di carattere soprannaturale;
- la ricerca di regolarità in media che consentano di approfondire le peculiarità della nozione di casualità.



A e B decidono di giocare a testa o croce con una moneta non truccata. Ogni mano, corrispondente a ogni lancio di moneta, è vinta da A se esce testa e da B se esce croce. Vince la partita il giocatore che per primo arrivi a vincere un numero convenuto n di mani. All'inizio del gioco, ognuno dei due giocatori metterà la sua parte della posta in gioco, p . Il vincitore si prenderà l'intera posta $2p$. Prima che la partita sia terminata, però, i giocatori interrompono il gioco; in quel momento A ha vinto a mani, mentre B ne ha vinte b . Come va divisa la posta in gioco?

$[n; a, b]$ oppure $[-a, -b]$

Pacioli affronta il problema (60; 20,50) e propone di dividere la posta proporzionalmente alle mani vinte prima dell'interruzione:

70 = 20 + 50 mani giocate prima dell'interruzione da A e da B.

$V(A)$ = vincita di A; $V(B)$ = vincita di B.

Impostando la proporzione $V(A) : V(B) = 20 : 50$ si ottiene:

$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{20}{70} \quad \frac{V(B)}{2p} = \frac{50}{70}$$

Generalizzando le proporzioni si ottiene

$V(A) : (2p) = a : (a+b)$ e $V(B) : (2p) = b : (a+b)$

Quindi, per il generico problema $(n; a, b)$ abbiamo:

$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{a}{a+b} \quad \frac{V(B)}{2p} = \frac{b}{a+b}$$



Cardano propone di dividere la posta considerando il numero di mani che i due giocatori devono ancora vincere per potersi aggiudicare l'intera partita. Nel caso dell'esempio precedente, (60; 20,50), abbiamo che ad A mancano 40 mani per vincere e a B ne mancano 10. Impostiamo quindi la proporzione $V(A) : V(B) = 10 : 40$. Applicando la proprietà del comporre si ha $V(A) : (2p) = 10 : 50$ e $V(B) : (2p) = 40 : 50$, da cui

$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{10}{50}; \quad \frac{V(B)}{2p} = \frac{40}{50}.$$

Generalizzando abbiamo:

$$V(A) : (2p) = (n - b) : (2n - a - b);$$

$$V(B) : (2p) = (n - a) : (2n - a - b);$$

$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{n - b}{2n - (a + b)} \quad \text{e} \quad \frac{V(B)}{2p} = \frac{n - a}{2n - (a + b)}$$



Girolamo Cardano
(1501-1576)

Cataneo affronta il problema $(n; a, b)$ ragionando sul numero massimo di mani che possono essere giocate affinché il gioco si concluda con la vittoria di uno solo dei due giocatori, che è $2n - 1$. Per esempio, nel caso considerato da Cataneo, cioè $(8; 5, 3)$, il numero massimo di mani che possono essere giocate in totale è 15. Cataneo suddivide una porzione della posta in base al punteggio che hanno i due giocatori al momento dell'interruzione e la porzione rimanente la suddivide in parti uguali. Così, nella situazione $(8; 5, 3)$, A prende i $5/15$ della posta e B ne prende i $3/15$. Gli altri $7/15$ della posta vanno divisi in parti uguali. Generalizzando si ha:

$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{a}{2n-1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a+b}{2n-1}\right) = \frac{2n-1+a-b}{2(2n-1)}$$

$$\frac{V(B)}{2p} = \frac{b}{2n-1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a+b}{2n-1}\right) = \frac{2n-1+b-a}{2(2n-1)}$$



Il problema proposto in classe, $[6; 1, 0]$, e le tipologie di risoluzione proposte dagli studenti

Considerazione di casi diversi dall'1 a 0 per

- generalizzare la soluzione trovata
- opportunità di una verifica di correttezza della soluzione trovata.

- difficoltà, da parte di molti studenti, ad attivare strategie risolutive completamente rivolte al futuro
- proposta di soluzioni miste, à la Cataneo,
- anche soluzioni nello spirito delle soluzioni proposte da Cardano, Pascal e Fermat.

Per esempio, Simone, ha proposto la seguente strategia risolutiva:

“si moltiplica per 2.4 [una sorta di premio per ogni partita vinta] per il numero di partite vinte da ciascun giocatore e poi si addiziona al risultato ottenuto la metà della posta rimasta”.

Simone: « se la partita non è terminata è *giusto* dividere la posta *ancora in gioco* in parti uguali fra i due giocatori»

Alessandro «secondo questa soluzione i due giocatori avrebbero diritto ad avere la stessa posta sia nel caso $(6; 1,0)$, sia nel caso $(6; 5,4)$. In entrambi i casi, infatti, al giocatore che sta vincendo spetterebbero 13.2 euro e 10.8 euro a chi sta perdendo. Eppure, *il 5 a 4 è un punteggio più favorevole dell'1 a 0, perché chi vince 5 a 4 è più vicino alla vittoria*».



Alessandro *“una soluzione è equa se è proporzionale a quanto manca alla vittoria”*.

Alessia prevede che la somma s che spetta al giocatore che sta vincendo sia una funzione che varia linearmente con la differenza d di punteggio. In particolare $s = 2d + 12$.

Per esempio, nel caso (6; 1,0) il giocatore che vince ha diritto a una posta $s = 14$ euro; nel caso (6; 5,2) il giocatore vincente ha diritto a una posta $s = 18$ euro.



Matteo suggerisce di confrontare il caso $(1000; 999, 969)$ con il caso $(1000; 30, 0)$.

Tali casi portano alla stessa suddivisione della posta in gioco con il metodo proposto da Alessia, ma *“per vincere, chi è a 969 deve fare 30 vittorie di seguito per pareggiare, mentre a chi è a 999 basta un solo tiro per vincere”*.



Maria Laura, dopo l'intervento di Matteo
*“è giusto lavorare sulla differenza, inutile pensare a
quello che potrebbe accadere, perché intanto non
accadrà”.*



→ Diversi cambiamenti di opinione

→ In particolare è emersa l'opportunità di avere strumenti di rappresentazione e valutazione dell'incerto.

Si tratta di una condizione assai importante per preparare il terreno al calcolo delle probabilità, argomento delicato e causa di diversi equivoci argomentativi, come la storia mostra.



Le modalità con cui il problema è stato affrontato ricalcano quello della “*logic of inquiry*”, modello dinamico e dialettico di confronto fra due agenti, il primo intenzionato a convalidare e il secondo a confutare un'affermazione.

Nella discussione in classe i due agenti sono stati impersonati dagli studenti che sostenevano la bontà di una strategia risolutiva e dagli studenti che cercavano di confutarla.



- Gli studenti non si confrontano con una teoria probabilistica già data
 - non sapevano che cosa fosse un gioco equo
 - la risoluzione del problema (suddividere la posta in parti direttamente proporzionali alla probabilità di vincere) non era conseguibile, per gli studenti, con le leggi del calcolo delle probabilità, perché da loro non conosciute.
- 

Gli studenti si trovavano quindi realmente in quel processo non finito di ricerca di ipotesi che caratterizza la risoluzione di problemi in un ambiente aperto. L'efficacia delle strategie che hanno messo in opera, difficilmente poteva avere un riscontro sperimentale o teorico; l'unico strumento di controllo erano il confronto e il dialogo con altri risolutori. La bontà di una soluzione era una proprietà che andava continuamente condivisa, concordata, discussa, in base a criteri che via via cambiavano.



Obiettivo didattico: introduzione motivata e significativa al calcolo delle probabilità e ai suoi concetti fondamentali.

Successiva attività: proposta agli studenti delle soluzioni di Pacioli, Cataneo, Cardano, Pascal e Fermat.

La maggior parte degli studenti, inizialmente, ha affermato di preferire le soluzioni di Pacioli e Cataneo, perché si basano sui punteggi raggiunti e quindi sono *più realistiche* rispetto a quelle che considerano le partite che potrebbero ancora accadere e che, pertanto, sono *incerte*.



Altri fattori ritenuti da molti studenti veri e propri punti di forza di una soluzione:

- la sua semplicità,
- la facilità di applicazione e di generalizzazione con una formula risolutiva chiusa.

Le soluzioni di Pascal e Fermat, sicuramente più complesse di quelle di Pacioli, Cataneo e Cardano, sono state considerate inizialmente meno convincenti dalla maggior parte degli studenti e solo alla fine apprezzate.



Aspetto più formativo dell'attività:

l'occasione che gli studenti hanno avuto di confrontarsi, in tempi e spazi adeguati, con alcuni prodotti culturali preesistenti nella storia della matematica, cioè le soluzioni al problema delle parti proposte da importanti matematici e, più in generale, la stessa teoria della probabilità.

