Il problema del compleanno

Bonaventura Paolillo
Liceo Scientifico “Franceso Severi”- Salerno

Paderno del Grappa 24 Agosto;

Il problema del Compleanno

Didattica

Analisi combinatoria

Applicazioni

Sviluppo di tale problematica
IV Liceo Scientifico
Unità didattica – Calcolo delle Probabilità.

Problema o Paradosso del compleanno

Richard von Mises
(1883, Lemberg, Austria-Hungary -1953, Boston, Massachusetts, U.S.),
Matematico, ingegnere e filosofo positivista.

In un gruppo di *N* persone qual è la probabilità che ci sia almeno una coincidenza di compleanni ?

Per quale *N* sarei disposto a scommettere alla pari su tale evento?

Con 366 persone si ha certamente almeno una coincidenza.

(Per semplicità si ignora l'anno bisestile)

Conseguenza elementare del

Principio dei cassetti o di Dirichelet

- Se ci sono ***d*** cassetti e devo riempirli con ***N*** oggetti allora per avere qualche cassetto con almeno due oggetti c'è bisogno di disporre inizialmente di almeno di ***N=d+1*** oggetti.

Nel nostro problema

Giorni dell'anno ***d*** *=365 → i cassetti*

Date di nascita ***N=****366 → gli oggetti*

100% Coincidenza Sicura

Si mostrerà:
Analisi probabilistica della valutazione del problema si discosterà come risultati dall'elaborazione numerica ottenuta col **principio dei cassetti.**

Qual è allora il minimo numero N *per cui risulterà favorevole scommettere su qualche coincidenza di compelanni?*

Potrebbe avvicinarsi N ai seguenti numeri?

40, 80,100,180,200

Risposta

Se N=**23** la probabilità di avere almeno una coincidenza è 50,7%

Bastano N=23 per vincere la scommessa della coincidenza

Dimostrazioni rigorose

- 1. Metodi del calcolo combinatorio
- 2. Teoremi della probabilità

Brasile 2014

Hulk e Paulinho - 25 July

Ogni team è composto da 23 calciatori

Gago e Fernandez Argentina nati nel 1986 nello stesso giorno

Kwak Tae-hwi e Son Heung-min del South Korea

Evento del non compleanno

(ovvero non coincidenza di compleanni)

Prova mediante il calcolo combinatorio

- Si considerino le disposizioni di 365 oggetti su 23 posti diversi. (Casi favorevoli al non compleanno)

$$D_{365,23}$$

Si considerino le disposizioni con ripetizione, in numero

$$365^{23}$$

$$P(Non\_compleanno) = \frac{D_{365,23}}{365^{23}}$$

P(Coincidnza Compleanno)=1- P(Non_compleanno)


Metafora delle persone in una stanza

23 persone entrano una alla volta in una stanza

Metafora delle persone in una stanza

23 persone entrano una alla volta in una stanza.

Per la prima persona non ci sono problemi di coincidenza(si possono scegliere tra 365 date possibili).

La seconda realizza la non coincidenza con la prima con probabilità $\frac{364}{365}$

(si deve escludere la data della prima persona)

La terza realizza la non coincidenza con le prime due con probabilità $\frac{363}{365}$

(si devono escludere le date delle prime due persone)

La quarta realizza la non coincidenza con le prime tre con probabilità

$$\frac{362}{365}$$

La ventitreesima (ultima) realizza la non coincidenza con le prime 22 con probabilità:

$$\frac{365-22}{365}$$

Essendo i precedenti eventi indipendenti

P(Non_compleanno)= $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{365-22}{365}$

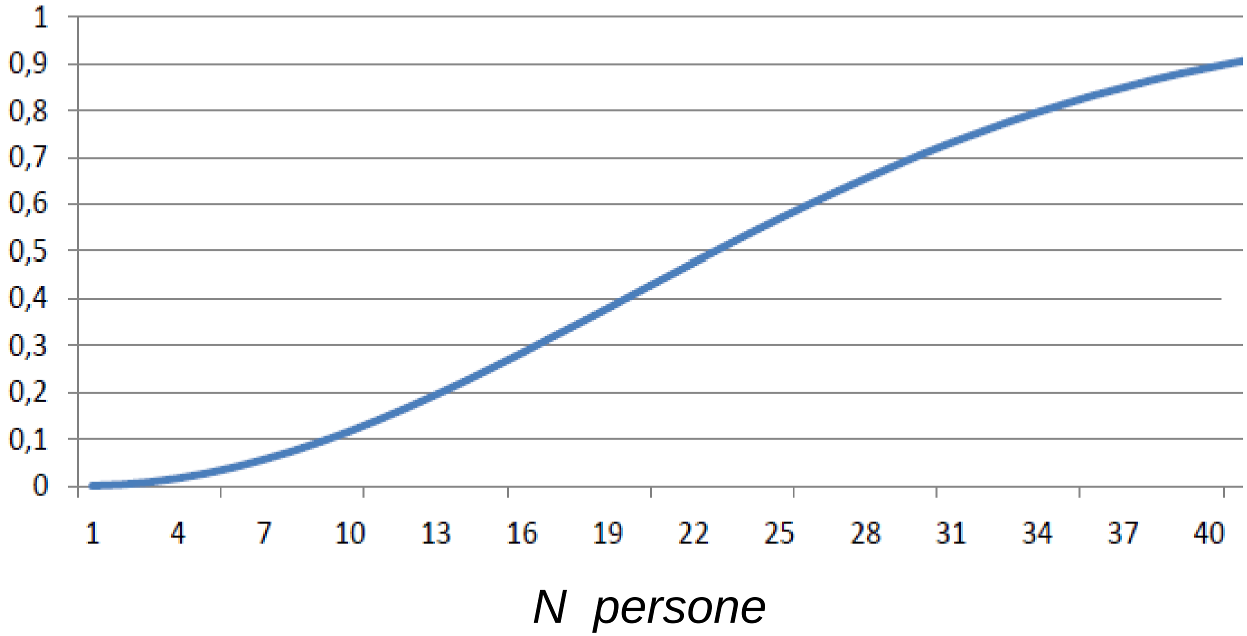
che è leggermente minore del 50%.

P(Coincidenza Compleanno) =1- P(Non_compleanno) maggiore del 50%.

In generale al variare del numero *N di persone*

N persone;	Probabilità di coincidenza
10	0,1169482
20	0,4114384
23	**0,5072972**
30	0,7063162
40	0,8912318
50	0,9703736
60	0,9941227

Grafico delle probabilità



Probabilità di ottenere una coincidenza al variare del numero N.

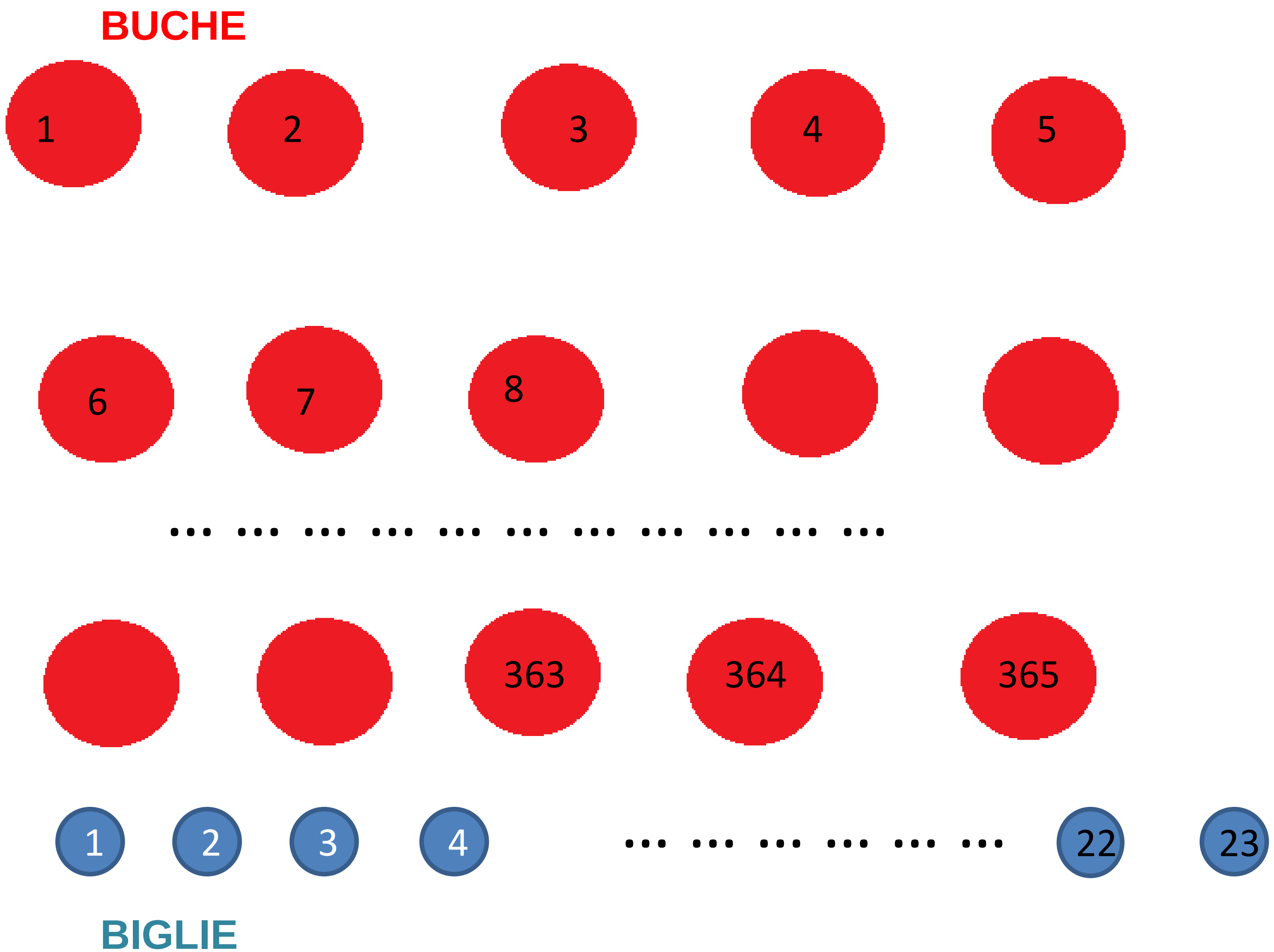
Presentazione del problema del compleanno

Proposte didattiche da adottare in classe

Gioco di Buche e Biglie
Funzioni
Lancio degli arcieri
Gioco degli orologi
Gioco di carte, tombola,
Lancio di dadi,….

Simulazioni didattiche:
Utilizzo in classe di Applet, linguaggi e funzioni random.

BUCHE e BIGLIE



Il problema del compleanno come Gioco

Riempimento di Buche con Biglie

365 buche

- 23 persone con 23 biglie

Chi scommetterebbe alla pari sul riempimento di due Biglie nella stessa buca?

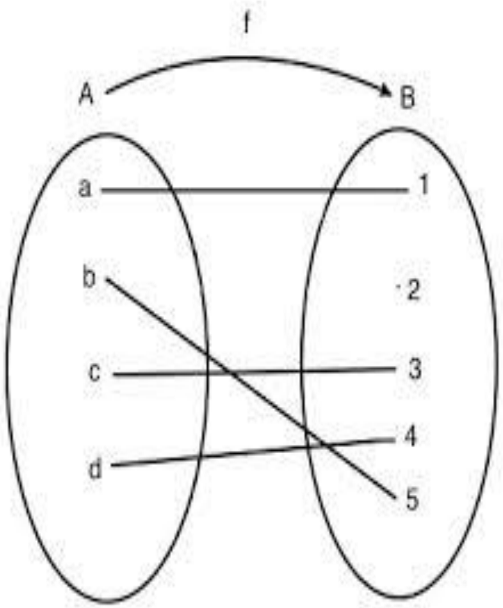
Chi scommetterebbe alla stessa stregua del lancio di una moneta?

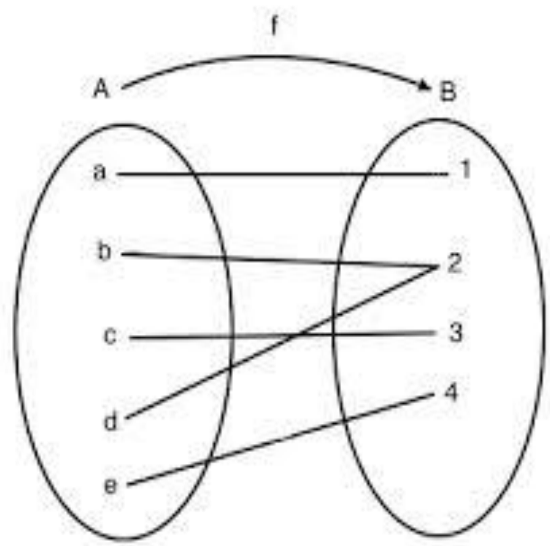
Ci sarà coincidenza del riempimento di biglie nella stessa buca con una probabilità del 50,7%.

Il problema del compleanno come scelta di una funzione iniettiva

- Date due insiemi ***A*** e ***B*** di cardinalità 23 e 365 qual è la probabilità di ottenere una funzione iniettiva che agisce tra ***A*** e ***B*** ?

Funzioni iniettive e non iniettive





Una qualsiasi funzione che agisce tra gli insiemi dati ***A*** e ***B*** avrà una probabilità del 50% (50,7%) di essere iniettiva.

Nota. La suriettività è evidentemente impossibile da ottenere.

Versione Robin Hood

23 Arcieri scoccano i loro dardi su 365 bersagli possibili

23 Arcieri

365 Bersagli

Domanda inversa

- Quante persone occorrono affinché si possa scommettere alla pari su una coincidenza di compleanno specificata? (per esempio il nostro compleanno)

Risposta: occorrono 253 persone

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^n \geq 0.5$$

$$n = 253$$

- Generalizzazioni del problema classico

Dato un calendario con ***d*** giorni e ***N*** persone studiare il comportamento della probabilità del verificarsi della coincidenza in funzione di ***N***

In quale caso scommettiamo alla pari, ovvero l'evento produrrà una probabilità del 50%?

$$\text{P(Non\_Coincidenza)} = \frac{D_{d,N}}{d^N}$$

(o non compleanno)

Ancora Coincidenze…

Coincidenza: Giorno di Nascita nella **stessa settimana**

1°, 2°, 3°,…, 52°

9 Persone bastano per **ottenere** un'eventuale coincidenza con probabilità **> 51%**

Coincidenza Nascita nello **stesso mese**
Gen, Feb,Mar, Apr, … Nov, Dic

5 persone realizzano una probabilità di coincidenza del **62%**
4 persone realizzano una probabilità di coincidenza del **43%**

Il problema del compleanno

Estrazione con 40 carte

Dopo 8 volte c’è coincidenza al 50%

- Estrazione con la tombola: 90 numeri

  Dopo 12 volte c’è coincidenza al 50%

- Lancio con diversi dadi …

Le coincidenze con le 40 carte

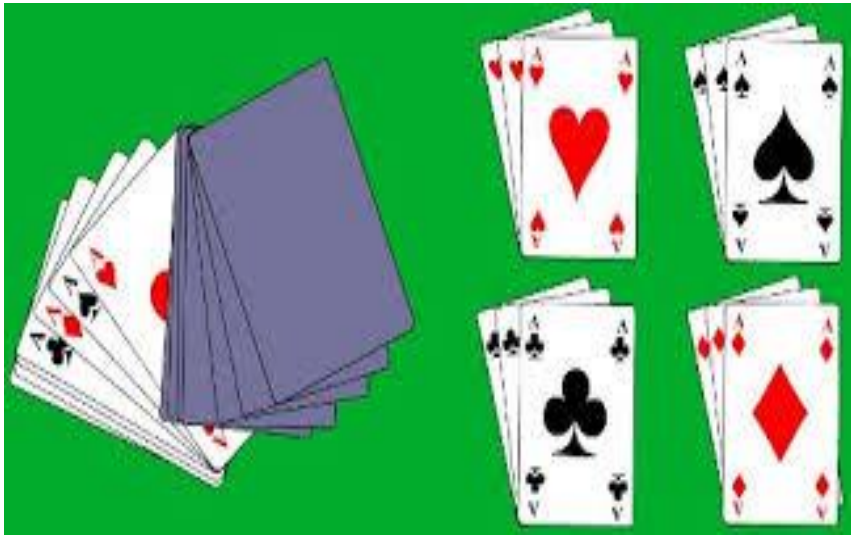
Estrazione con **40** carte

Dopo **8** volte c'è coincidenza

con probabilità > **52%**

$$\frac{39}{40}\cdot\frac{38}{40}\cdot\frac{37}{40}\cdot\frac{36}{40}\,\frac{35}{40}\cdot\frac{34}{40}\cdot\frac{33}{40}<0.5$$

Con le carte Francesi



Estrazione con **52** carte
Dopo 9 volte c'è coincidenza
con probabilità > 51%

Estrazione con la tombola:**90** numeri
Dopo **12** volte c’è coincidenza
al 50%

Proprietà dei calendari:

Dato un calendario con ***d*** giorni il numero ***n*** *che fornisce la più piccola* probabilità di ottenere almeno una coincidenza > *50%* è funzione della radice quadrata di ***d***.

Si sceglie *n* come

$$n \approx 1.2\sqrt{d}$$

$$n \approx 1.177\sqrt{d} + 0.5$$

La dimostrazione segue lo sviluppo di Taylor

Per la seconda formula *U. Cerruti*
http://www.dm.unito.it/~cerruti/aprile-07-luglio-08.html#compleanno

Se si vuole scommetere 50-50…

d	3-5	6-9	10-16	17-23	24-32	33-42	43-54	
n	3	4	5	6	7	8	9	

d	55-68	69-82	83-99
n	10	11	12

Qualche situazione didattica con gli orologi

Si abbiano ***N* orologi** in formato digitale alimentati a batteria. Qual è la probabilità che essi mostrino sul display la **stessa ora e lo stesso minuto**, una volta esaurita la carica della batteria?

Soluzione

- Soluzione: Ci sono 24 X 60 = 1440 configurazioni del display; quindi d=1440.
- Si calcola che occorrono **N= 45** orologi per scommettere quasi alla pari sulla coincidenza mostrata da due displays.

(Ancora Sorpresa)

$$\prod_{1}^{44} \frac{1440-i}{1440^{44}} = 0.49922750 < 0.5$$

Riflessioni di fondo

Fallacia del giocatore: difficoltà a riconoscere e a simulare la casualità.

Esperimento:

Simulazione reale vs. Simulazione mentale

Lancio di una moneta per diverse volte

La casualità:

Lancio di una moneta per dieci volte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
T	T	T	C	C	T	T	T	C	T	Lancio Reale
T	C	T	C	C	T	C	T	C	C	Lancio Mentale

Il lancio mentale cerca di ottenere una distribuzione uniforme:
non sono inserite molte Croci o Teste consecutive.
Il lancio Reale non segue nessuno schema preordinato:
si osservano più croci o teste consecutive.

La casualità:
Qualche altro esempio controintuitivo
Evento: Coincidenza di *tre teste o tre croci consecutive*

Successo 82% di casi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	T	C	C	C	T	T	C	T

Soluzione elegante del problema con i numeri di Fibonacci
(Si veda per esso M. Du Satoy: Equazione da un milione di dollari)

Seconda parte:

Analisi teorica sul problema del compleanno:

Stato dell’arte: articoli di riferimento.

Problemi affrontati recentemente

Applicazioni:

Crittografia, statistica,…

Risultati teorici sul problema del compleanno:

Mises, R. von. "Über Aufteilungs--und Besetzungs-Wahrscheinlichkeiten.“ *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, N. S.* **4**, 145-163, 1939. Reprinted in *Selected Papers of Richard von Mises, Vol. 2* (Ed. P. Frank, S. Goldstein, M. Kac, W. Prager, G. Szegö, and G. Birkhoff). Providence, RI: Amer. Math. Soc., pp. 313-334, 1964.

For a given n, let

n_1 = number of nonrepeated X_i's

n_2 = number of pairs of equal X_i's

n_3 = number of triples of equal X_i's

. . . .

n_{r-1} = number of $(r-1)$-tuples of equal X_i's, where obviously

$$n = \sum_{i=1}^{r-1} i n_i. \tag{2}$$

The general term of the summation representing Prob(E) is the probability that there are exactly n_1 nonrepeated items, n_2 pairs, n_3 triples, $\cdots$, $n_{(r-1)}$ $(r-1)$-tuples of equal X_i's which takes the form

$$\text{Prob}(n; n_1, n_2, \cdots, n_{r-1}) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{r-1} (n_j!)(j!)^{n_j}} \cdot \frac{\text{Perm}\left(M, \sum_{i=1}^{r-1} n_i\right)}{M^n}, \tag{3}$$

Generalized Birthday Problem

Author: **E. H. Mckinney** Source: The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4 (Apr., 1966), pp. 385-387

p \ k	1	2	3	4
5	.02713	.07971	.13013	.17844
8	.07433	.20873	.32604	.42812
9	.09462	.26042	.39901	.51433
10	.11694	.31472	.47209	.59648
11	.14114	.37056	.54328	.67210
12	.16702	.42693	.61090	.73952
13	.19440	.48287	.67363	.79778
14	.22310	.53749	.73053	.84663
21	.44368	.83603	.95537	.98890
22	.47569	.86378	.96774	.99313
23	.50729	.88791	.97709	.99586
24	.53834	.90864	.98401	.99757

k	$s(k)$
1	23
2	14
3	11
4	9
5	8
6	8
7	7
8	7
9	6
10	6

“ More Birthday Surprises”

Author: Morton Abramson and W. O. J. Moser

The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 8 (Oct., 1970), pp. 856-858Published

Ne segue dall'articolo di Abramson and Moser

14 persone bastano per avere una probabilità >50%
di una **quasi** coincidenza di compleanni
Quasi coincidenza → Distanza di al piu' un giorno.

7 persone bastano per festeggiare un **quasi compleanno**
con distanza di al più 6 giorni qualsiasi.

1, 23, 88, 187, 313, 460, 623, 798, 985, 1181, 1385, 1596, 1813,

...

Coincidenze 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11 12 13

(Diaconis and Mosteller 1989, si veda bibliografia).

In general, let $Q_i(n, d)$ denote the probability that a birthday is shared by exactly i (and no more) people out of a group of n people. Then the probability that a birthday is shared by k *or more* people is given by

$$P_k(n, d) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i(n, d). \tag{6}$$

In general, $Q_k(n, d)$ can be computed using the recurrence relation

$$Q_k(n, d) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/k \rfloor} \left[\frac{n!\, d!}{d^{ik}\, i!\, (k!)^i\, (n - i k)!\, (d - i)!} \sum_{j=1}^{k-1} Q_j(n - i k, d - i) \frac{(d - i)^{n - i k}}{d^{n - i k}} \right] \tag{7}$$

(Finch 1997). However, the time to compute this recursive function grows exponentially with k and so rapidly becomes unwieldy.

Dal Sito Wolfram

Risultati asintotici d'interesse

An Asymptotic Approximation for the Birthday Problem

di S. Ejaz Ahmed and Richard J. McIntosh

Crux Mathematicorum 26(3) 151-155 Canadian Mathematical Society 2000

n	k	$\sqrt{2n\ln\frac{1}{1-p}}$
1	2	1.177
2	2	1.665
3	3	2.039
4	3	2.355
5	3	2.633
6	4	2.884
7	4	3.115
8	4	3.330
9	4	3.532
10	5	3.723
20	6	5.266
30	7	6.449
40	8	7.447
50	9	8.326
60	10	9.120
70	11	9.851
80	11	10.531
90	12	11.170
100	13	11.774
200	17	16.651
300	21	20.393
365	23	22.494

n	k	$\sqrt{2n\ln\frac{1}{1-p}}$
365	23	22.494
400	24	23.548
500	27	26.328
600	30	28.841
700	32	31.151
800	34	33.302
900	36	35.322
1000	38	37.233
2000	53	52.655
5000	84	83.255
10000	119	117.741
20000	167	166.511
50000	264	263.277
00000	373	372.330
200000	527	526.554
500000	833	832.555
1000000	1178	1177.410

$$\left| \left\lceil \sqrt{2n\ln\frac{1}{1-p}} \right\rceil - k \right| \leq 1 ,$$

$\lceil\ \rceil$ denota la parte superiore di x

Il problema del compleanno In informatica(Cenni introduttivi)

Nel linguaggio informatico, la funzione hash è una funzione non iniettiva che mappa una stringa di lunghezza arbitraria in una stringa di lunghezza fissata. Numerosi algoritmi che realizzano funzioni hash con particolari proprietà che dipendono dall'applicazione.Nelle applicazioni crittografiche si chiede, per esempio, che la funzione hash abbia le seguenti proprietà:

resistenza alla preimmagine: sia computazionalmente intrattabile la ricerca di una stringa in input che dia un hash uguale a un dato hash;

resistenza alla seconda preimmagine: sia computazionalmente intrattabile la ricerca di una stringa in input che dia un hash uguale a quello di una data stringa;

resistenza alle collisioni: sia computazionalmente intrattabile la ricerca di una coppia di stringhe in input che diano lo stesso hash.

Algoritmo di hash

L'algoritmo di hash elabora qualunque mole di bit o di dati "grezzi". Si tratta di una famiglia di algoritmi che soddisfa questi requisiti:

L'algoritmo restituisce una stringa di numeri e lettere a partire da un qualsiasi flusso di bit di qualsiasi dimensione (può essere un file ma anche una stringa). L'output è detto *digest*.

La stringa di output è univoca per ogni documento e ne è un identificatore. Perciò, l'algoritmo è utilizzabile per la firma digitale.

L'algoritmo non è invertibile, ossia non è possibile ricostruire il documento originale a partire dalla stringa che viene restituita in output ovvero è una funzione unidirezionale.

Hash e collisioni

Non esiste una corrispondenza biunivoca tra l'hash e il testo. Dato che i testi possibili, con dimensione finita maggiore dell'hash, sono più degli hash possibili, per il **principio dei cassetti** ad almeno un hash corrisponderanno più testi possibili. Quando due testi producono lo stesso hash, si parla di ***collisione***, e la qualità di una funzione di hash è misurata direttamente in base alla difficoltà nell'individuare due testi che generino una collisione. Per sconsigliare l'utilizzo di algoritmi di hashing in passato considerati sicuri è stato infatti sufficiente riuscire a generare una collisione. Questo è quello che è avvenuto ad esempio per gli algoritmi *SNEFRU, MD2, MD4 ed MD5.*

Bit	Possibili risultati (H)	Probabilità desiderata della collisione casuale (p)									
		10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	0.1%	1%	25%	50%	75%
32	$4{,}3 \times 10^{9}$	2	2	2	2,9	93	$2{,}9 \times 10^{3}$	$9{,}3 \times 10^{3}$	$5{,}0 \times 10^{4}$	$7{,}7 \times 10^{4}$	$1{,}1 \times 10^{5}$
64	$1{,}8 \times 10^{19}$	6,1	$1{,}9 \times 10^{2}$	$6{,}1 \times 10^{3}$	$1{,}9 \times 10^{5}$	$6{,}1 \times 10^{6}$	$1{,}9 \times 10^{8}$	$6{,}1 \times 10^{8}$	$3{,}3 \times 10^{9}$	$5{,}1 \times 10^{9}$	$7{,}2 \times 10^{9}$
128	$3{,}4 \times 10^{38}$	$2{,}6 \times 10^{10}$	$8{,}2 \times 10^{11}$	$2{,}6 \times 10^{13}$	$8{,}2 \times 10^{14}$	$2{,}6 \times 10^{16}$	$8{,}3 \times 10^{17}$	$2{,}6 \times 10^{18}$	$1{,}4 \times 10^{19}$	$2{,}2 \times 10^{19}$	$3{,}1 \times 10^{19}$
256	$1{,}2 \times 10^{77}$	$4{,}8 \times 10^{29}$	$1{,}5 \times 10^{31}$	$4{,}8 \times 10^{32}$	$1{,}5 \times 10^{34}$	$4{,}8 \times 10^{35}$	$1{,}5 \times 10^{37}$	$4{,}8 \times 10^{37}$	$2{,}6 \times 10^{38}$	$4{,}0 \times 10^{38}$	$5{,}7 \times 10^{38}$
384	$3{,}9 \times 10^{115}$	$8{,}9 \times 10^{48}$	$2{,}8 \times 10^{50}$	$8{,}9 \times 10^{51}$	$2{,}8 \times 10^{53}$	$8{,}9 \times 10^{54}$	$2{,}8 \times 10^{56}$	$8{,}9 \times 10^{56}$	$4{,}8 \times 10^{57}$	$7{,}4 \times 10^{57}$	$1{,}0 \times 10^{58}$
512	$1{,}3 \times 10^{154}$	$1{,}6 \times 10^{68}$	$5{,}2 \times 10^{69}$	$1{,}6 \times 10^{71}$	$5{,}2 \times 10^{72}$	$1{,}6 \times 10^{74}$	$5{,}2 \times 10^{75}$	$1{,}6 \times 10^{76}$	$8{,}8 \times 10^{76}$	$1{,}4 \times 10^{77}$	$1{,}9 \times 10^{77}$

Come esempio, se viene usato un hash di 64 bit, ci sono approssimativamente $1{,}8 \times 10^{19}$ differenti risultati.
Se sono tutti equamente probabili (nel migliore dei casi), allora occorreranno $2^{n/2}$ approssimativamente "solo" $5{,}1 \times 10^{9}$ tentativi per generare una collisione utilizzando la forza bruta. Questo valore è chiamato **vincolo del compleanno** e per codici di *n* bit può essere calcolato secondo la tabella.

Il problema del compleanno è possibile presentarlo e valutarlo a diversi livelli e strati di competenze:

Didattico, Teorico, Applicativo.

Questo favorisce un interesse a largo spettro di tale problematica.
Si noti che la risoluzione offerta con un eventuale **modello lineare** si rivela inefficace**,**così come un approccio con altri strumenti
(per esempio il principio dei cassetti)

Inoltre un cenno anche da un punto di vista didattico all’evoluzione storica di tale problema, nato quasi come curiosità, rende consapevole lo studioso di come un argomento possa crescere sempre di più, stimolando la curiosità scientifica e contestualmente gli strumenti e i mezzi stessi offerti dal **calcolo delle probabilità**.

✓Abramson, M. and Moser, W. O. J. "More Birthday Surprises." *Amer. Math. Monthly* **77**, 856-858, 1970.
✓Bloom, D. M. "A Birthday Problem." *Amer. Math. Monthly* **80**, 1141-1142, 1973.
✓Bogomolny, A. "Coincidence." http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/coincidence.shtml.
✓Clevenson, M. L. and Watkins, W. "Majorization and the Birthday Inequality." *Math. Mag.* **64**, 183-188, 1991.
✓Diaconis, P. and Mosteller, F. "Methods for Studying Coincidences." *J. Amer. Statist. Assoc.* **84**, 853-861, 1989.
✓Finch, S. "Puzzle #28 [June 1997]: Coincident Birthdays." http://www.mathcad.com/library/LibraryContent/puzzles/puzzle.asp?num=28.
✓Gehan, E. A. "Note on the 'Birthday Problem.' " *Amer. Stat.* **22**, 28, Apr. 1968.
✓Heuer, G. A. "Estimation in a Certain Probability Problem." *Amer. Math. Monthly* **66**, 704-706, 1959.
✓Hocking, R. L. and Schwertman, N. C. "An Extension of the Birthday Problem to Exactly Matches." *College Math. J.* **17**, 315-321, 1986.
✓Hunter, J. A. H. and Madachy, J. S. *Mathematical Diversions.* New York: Dover, pp. 102-103, 1975.
✓Klamkin, M. S. and Newman, D. J. "Extensions of the Birthday Surprise." *J. Combin. Th.* **3**, 279-282, 1967.
✓Levin, B. "A Representation for Multinomial Cumulative Distribution Functions." *Ann. Statistics* **9**, 1123-1126, 1981.
✓McKinney, E. H. "Generalized Birthday Problem." *Amer. Math. Monthly* **73**, 385-387, 1966.
✓Mises, R. von. "Über Aufteilungs--und Besetzungs-Wahrscheinlichkeiten." *Revue de la Faculté des Sciences de*
✓*l'Université d'Istanbul, N. S.* **4**, 145-163, 1939. Reprinted in *Selected Papers of Richard von Mises, Vol. 2*
✓(Ed. P. Frank, S. Goldstein, M. Kac, W. Prager, G. Szegö, and G. Birkhoff).
✓Providence, RI: Amer. Math. Soc., pp. 313-334, 1964.
✓Peterson, I. "MathTrek: Birthday Surprises." Nov. 21, 1998. http://www.sciencenews.org/sn_arc98/11_21_98/mathland.htm.
✓Riesel, H. *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, 2nd ed.* Boston, MA: Birkhäuser, pp. 179-180, 1994.
✓Sayrafiezadeh, M. "The Birthday Problem Revisited." *Math. Mag.* **67**, 220-223, 1994.
✓Sevast'yanov, B. A. "Poisson Limit Law for a Scheme of Sums of Dependent Random Variables." *Th. Prob. Appl.* **17**, 695-699, 1972.
✓Sloane, N. J. A. Sequences A014088, A033810, A050255, and A050256 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."
✓Stewart, I. "What a Coincidence!" *Sci. Amer.* **278**, 95-96, June 1998.
✓Tesler, L. "Not a Coincidence!" http://www.nomodes.com/coincidence.html.

Grazie per l’attenzione

Bonaventura Paolillo
Liceo Scientifico F.Severi; Salerno
bonaventura.paolillo@gmail.com
bpaolillo.@unisa.it