ASPETTI CRITICI DELLA PROBABILITÀ ED IMPLICAZIONI DIDATTICHE

Roberto Porcaro

Liceo Scientifico Statale "A. Pacinotti"
La Spezia

profrporcaro@gmail.com

22 agosto 2014

Alcuni anni or sono il Prof. Giovanni Prodi, quasi per giustificare la scarsa diffusione della probabilità nell'insegnamento, commentava giustamente quanto fosse difficile raggiungere la piena padronanza dell'insegnare ciò che non si è appreso sui banchi di scuola!

Sommario

Sommario

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620):
Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9:
  $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10:
  $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9:
$6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10:
$6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9: $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10: $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9: $6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10: $6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ . . . con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9: $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10: $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9: $6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10: $6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9: $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10: $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9: $6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10: $6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620):
Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9:
  $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10:
  $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9:
$6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10:
$6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9: $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10: $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9: $6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10: $6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9: $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10: $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9: $6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10: $6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9: $(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$
- Combinazioni per ottenere il 10: $(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9: $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$, quelle per ottenere 10: $6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Cardano e Galilei

Problema (Cardano in "De Ludo Aleae" 1526? - Galilei 1620): Supponiamo che siano lanciati tre dadi e che venga eseguita la somma delle facce ottenute. Per ottenere somma pari a 9 o somma pari a 10 bastano in entrambi i casi 6 combinazioni di facce. Perché allora la somma 10 è più probabile della somma 9? Risposta:

- Combinazioni per ottenere 9:
  $(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$
- Combinazioni per ottenere il 10:
  $(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$

Ma se contiamo le combinazioni per ottenere 9:
$6+6+3+3+6+1=25$, quelle per ottenere 10:
$6+6+3+6+3+3=27$ dunque le probabilità sono rispettivamente di $25/216$ e $27/216$ ... con una differenza di circa solo 0.01.

Il problema del Cavalier De Mérè

Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Mérè (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di $1/2$, aveva scommesso su tale combinazione ma ... invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662):

«È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»

Risposta del Cavalier De Mérè: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Il problema del Cavalier De Mérè

Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Mérè (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di $1/2$, aveva scommesso su tale combinazione ma ... invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662):
«È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»
Risposta del Cavalier De Mérè: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Il problema del Cavalier De Méré

Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Méré (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di $1/2$, aveva scommesso su tale combinazione ma ... invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662):
«È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»
Risposta del Cavalier De Méré: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Il problema del Cavalier De Mérè

Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Mérè (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di $1/2$, aveva scommesso su tale combinazione ma . . . invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662):
«È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»
Risposta del Cavalier De Mérè: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Un problema di monete

Il matematico e filosofo Jean-Baptiste D'Alembert (autorevole coautore della "Encyclopédie" francese) sosteneva:
«lanciando due monete (non truccate) i tre esiti TT (testa/testa), TC (testa/croce), CC (croce/croce) sono equiprobabili»
I casi che si possono presentare non sono tre, come pensava D'Alembert, bensì quattro: T_1T_2, T_1C_2, C_1T_2, C_1C_2.
Dobbiamo dedurne che . . . D'Alembert non aveva provato a giocare.

Un problema di monete

Il matematico e filosofo Jean-Baptiste D'Alembert (autorevole coautore della "Encyclopédie" francese) sosteneva:
«lanciando due monete (non truccate) i tre esiti TT (testa/testa), TC (testa/croce), CC (croce/croce) sono equiprobabili»
I casi che si possono presentare non sono tre, come pensava D'Alembert, bensì quattro: T_1T_2, T_1C_2, C_1T_2, C_1C_2.
Dobbiamo dedurne che ... D'Alembert non aveva provato a giocare.

Un problema di monete

Il matematico e filosofo Jean-Baptiste D'Alembert (autorevole coautore della "Encyclopédie" francese) sosteneva:
«lanciando due monete (non truccate) i tre esiti TT (testa/testa), TC (testa/croce), CC (croce/croce) sono equiprobabili»
I casi che si possono presentare non sono tre, come pensava D'Alembert, bensì quattro: T_1T_2, T_1C_2, C_1T_2, C_1C_2.
Dobbiamo dedurne che ... D'Alembert non aveva provato a giocare.

Un problema di monete

Il matematico e filosofo Jean-Baptiste D'Alembert (autorevole coautore della "Encyclopédie" francese) sosteneva:
«lanciando due monete (non truccate) i tre esiti TT (testa/testa), TC (testa/croce), CC (croce/croce) sono equiprobabili»
I casi che si possono presentare non sono tre, come pensava D'Alembert, bensì quattro: T_1T_2, T_1C_2, C_1T_2, C_1C_2.
Dobbiamo dedurne che ... D'Alembert non aveva provato a giocare.

Un gioco di porte

Si tratta di un gioco televisivo noto come “problema di Monty Hall” in quanto legato al gioco a premi americano “Let's Make a Deal” (Realizziamo un affare) il cui conduttore era noto appunto con tale pseudonimo.

Un gioco di porte

«A un giocatore vengono mostrate tre porte chiuse; dietro una c'è un'automobile e dietro ciascuna delle rimanenti ci sono solo premi privi di valore (nella versione originaria si trattava di due capre). Il giocatore può scegliere una porta e tenersi ciò che si trova dietro ad essa. Quando il giocatore ha effettuato la scelta della porta, ma non l'ha ancora aperta, il conduttore (che sa dietro a quale porta sta il premio) apre una delle porte rimanenti (dietro alla quale c'è un premio di nessun valore) e ne mostra il contenuto. Il conduttore offre a questo punto la possibilità al giocatore di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante.»

Historia magistra vitae

Cosa possiamo dedurre dal fatto che gli "esempi storici" citati riguardano esclusivamente i giochi?

- I nostri avi . . . erano "perditempo". Ma grazie alle loro osservazioni si è data la stura alla nascita del "calcolo delle probabilità".
  Da qui l'opportunità di coinvolgere attivamente gli allievi facendo effettuare materialmente ad essi un adeguato numero di lanci dei dadi o delle monete. In una classe di 20-24 studenti divise a coppie, 10 lanci a coppia sono circa 300 lanci. L'argomento può essere ulteriormente accresciuto se per esempio l'insegnante mette a disposizione degli sperimentatori due monete, una delle quali truccata, con la consegna di scoprire quale delle due lo sia.

Historia magistra vitae

Cosa possiamo dedurre dal fatto che gli "esempi storici" citati riguardano esclusivamente i giochi?

- I nostri avi . . . erano "perditempo". Ma grazie alle loro osservazioni si è data la stura alla nascita del "calcolo delle probabilità".
  Da qui l'opportunità di coinvolgere attivamente gli allievi facendo effettuare materialmente ad essi un adeguato numero di lanci dei dadi o delle monete. In una classe di 20-24 studenti divise a coppie, 10 lanci a coppia sono circa 300 lanci. L'argomento può essere ulteriormente accresciuto se per esempio l'insegnante mette a disposizione degli sperimentatori due monete, una delle quali truccata, con la consegna di scoprire quale delle due lo sia.

Historia magistra vitae

Cosa possiamo dedurre dal fatto che gli "esempi storici" citati riguardano esclusivamente i giochi?

- I nostri avi . . . erano "perditempo". Ma grazie alle loro osservazioni si è data la stura alla nascita del "calcolo delle probabilità".
  Da qui l'opportunità di coinvolgere attivamente gli allievi facendo effettuare materialmente ad essi un adeguato numero di lanci dei dadi o delle monete. In una classe di 20-24 studenti divise a coppie, 10 lanci a coppia sono circa 300 lanci. L'argomento può essere ulteriormente accresciuto se per esempio l'insegnante mette a disposizione degli sperimentatori due monete, una delle quali truccata, con la consegna di scoprire quale delle due lo sia.

Historia magistra vitae

Cosa possiamo dedurre dal fatto che gli "esempi storici" citati riguardano esclusivamente i giochi?

- I nostri avi ... erano "perditempo". Ma grazie alle loro osservazioni si è data la stura alla nascita del "calcolo delle probabilità".
  Da qui l'opportunità di coinvolgere attivamente gli allievi facendo effettuare materialmente ad essi un adeguato numero di lanci dei dadi o delle monete. In una classe di 20-24 studenti divise a coppie, 10 lanci a coppia sono circa 300 lanci. L'argomento può essere ulteriormente accresciuto se per esempio l'insegnante mette a disposizione degli sperimentatori due monete, una delle quali truccata, con la consegna di scoprire quale delle due lo sia.

Historia magistra vitae

- La "genesi delle idee matematiche" ripercorre strade note . . . pensiamo alla bimillenaria storia della geometria: è pacifico (credo) che la geometria ha un fondamento empirico nell'esperienza fisica; questo fatto è sempre stato ben presente ai matematici e nella didattica:

Historia magistra vitae

- Per esempio: a livello di scuola elementare e media nello studio della geometria intuitiva il "piano" viene concretizzato ricorrendo ad un foglio da disegno, i punti vengono assimilati ai minuscoli segni lasciati sul piano dalla punta di una matita, i segmenti (e le rette) sono identificati con le linee tracciate con l'uso di un righello, le circonferenze sono identificate con le linee tracciate con un compasso, la lunghezza di un segmento viene misurata ricorrendo ad un righello o ad un metro da sarto, da falegname, ecc.

Historia magistra vitae

- La formulazione delle regole dei giochi risulta generalmente semplice perché non vi intervengono elementi estranei che potrebbero fuorviare l'attenzione dei partecipanti. Costituisce dunque una buona "palestra" prima di affrontare una modellizzazione di situazioni più complesse:

Historia magistra vitae

- overbooking Le compagnie aeree sanno per esperienza che non tutti quelli che hanno prenotato un volo si presentano poi all'imbarco a causa di mancate coincidenze, malattie improvvise o altri contrattempi. Per massimizzare i propri profitti la compagnia accetta quindi un numero di prenotazioni superiore al numero dei posti disponibili. La compagnia però è tenuta a pagare una penale pari al costo del doppio del biglietto ai passeggeri che eventualmente "rimangono a terra". Come può la compagnia valutare tale probabilità che questo inconveniente non si verifichi?

Sommario

Impostazioni diverse della probabilità

Il calcolo delle probabilità trova la sua collocazione in tutte quelle situazioni in cui, a causa di una carenza di informazioni, non si è in grado di predire in modo univoco l'esito di un esperimento o il verificarsi di un evento futuro, o anche di un evento che si è già verificato ma sul cui esito non si hanno informazioni precise.

Impostazioni diverse della probabilità

Trattandosi di una teoria matematica, ci si aspetterebbe di trovare nei manuali scolastici un'esposizione sequenziale e sostanzialmente standardizzata analoga a quella tradizionale della geometria euclidea o dell'aritmetica.

Impostazioni diverse della probabilità

Basta invece sfogliare qualche libro di testo per constatare che uno stesso autore introduce e utilizza in vari punti della sua esposizione ben tre (o addirittura quattro) diverse nozioni di probabilità.

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.

Esempio: lancio di un dado.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche).Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).

La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.

Esempio: lancio di un dado.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche).Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).

La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.
Esempio: lancio di un dado.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche). Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).
La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.

Esempio: lancio di un dado.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche).Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).

La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.
Esempio: lancio di un dado.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche). Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).
La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.
Esempio: lancio di un dado.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche). Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).
La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

La nozione di **evento** viene assunta come termine primitivo, ossia gioca lo stesso ruolo che in ambito geometrico viene attribuito alle nozioni di punto, retta e piano. L'insieme degli eventi si dice spazio campionario (o spazio degli eventi) e si denota abitualmente con Ω.
Esempio: lancio di un dado.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i singoletti sono gli eventi elementari. Gli eventi composti sono sottoinsiemi di Ω diversi dai singoletti. Gli eventi si possono "combinare" tramite operazioni insiemistiche (o talvolta proposizioni logiche).Tecnicamente si dice che si considera un'algebra (o una tribù).
La fase di matematizzazione è didatticamente "delicata".

Impostazioni diverse della probabilità

Presentiamo ora tre diverse impostazioni, racchiuse in altrettante definizioni, che consentono di associare ad ogni evento E di uno spazio degli eventi Ω una misura del suo grado di aleatorietà, detta appunto probabilità di E, e indicata nel seguito con $P(E)$.

Il ruolo di una teoria matematica della probabilità è quello di fornire un apparato concettuale (e metodi di calcolo pratici) comuni a situazioni le più diverse possibili.

Inoltre per la probabilità la situazione è del tutto differente da quella della geometria, perché non c'è un unico fondamento empirico, ma tanti quante sono le situazioni concrete, fra le quali ci sono differenze essenziali: lanci di dadi, tabelle di mortalità, errori di misura, sistemi caotici, ecc. sono casi sostanzialmente diversi, e queste differenze andrebbero chiaramente evidenziate. [E. Fabri, Il lato fisico della probabilità]

Impostazioni diverse della probabilità

Presentiamo ora tre diverse impostazioni, racchiuse in altrettante definizioni, che consentono di associare ad ogni evento E di uno spazio degli eventi Ω una misura del suo grado di aleatorietà, detta appunto probabilità di E, e indicata nel seguito con $P(E)$.

Il ruolo di una teoria matematica della probabilità è quello di fornire un apparato concettuale (e metodi di calcolo pratici) comuni a situazioni le più diverse possibili.

Inoltre per la probabilità la situazione è del tutto differente da quella della geometria, perché non c'è un unico fondamento empirico, ma tanti quante sono le situazioni concrete, fra le quali ci sono differenze essenziali: lanci di dadi, tabelle di mortalità, errori di misura, sistemi caotici, ecc. sono casi sostanzialmente diversi, e queste differenze andrebbero chiaramente evidenziate. [E. Fabri, Il lato fisico della probabilità]

Impostazioni diverse della probabilità

Presentiamo ora tre diverse impostazioni, racchiuse in altrettante definizioni, che consentono di associare ad ogni evento E di uno spazio degli eventi Ω una misura del suo grado di aleatorietà, detta appunto probabilità di E, e indicata nel seguito con $P(E)$.
Il ruolo di una teoria matematica della probabilità è quello di fornire un apparato concettuale (e metodi di calcolo pratici) comuni a situazioni le più diverse possibili.
Inoltre per la probabilità la situazione è del tutto differente da quella della geometria, perché non c'è un unico fondamento empirico, ma tanti quante sono le situazioni concrete, fra le quali ci sono differenze essenziali: lanci di dadi, tabelle di mortalità, errori di misura, sistemi caotici, ecc. sono casi sostanzialmente diversi, e queste differenze andrebbero chiaramente evidenziate. [E. Fabri, Il lato fisico della probabilità]

Concezioni diverse della probabilità

Definizione classica:

(DC) Definizione classica. Se Ω è uno spazio costituito da n eventi elementari (brevemente: *casi possibili*), considerati tutti equipossibili tra loro, e se un sottoinsieme E di Ω è costituito da k eventi elementari (brevemente: *casi favorevoli*), si definisce probabilità di E il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, ovvero $P(E) = k/n$.

Concezioni diverse della probabilità

Definizione classica:

(DC) Definizione classica. Se Ω è uno spazio costituito da n eventi elementari (brevemente: *casi possibili*), considerati tutti equipossibili tra loro, e se un sottoinsieme E di Ω è costituito da k eventi elementari (brevemente: *casi favorevoli*), si definisce probabilità di E il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, ovvero $P(E) = k/n$.

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
   1. Basta ...saper contare
   2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
   1. Si può usare solo se Ω è finito
   2. Tutti gli eventi elementari devono essere "equiprobabili"
   3. È tautologica

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
   1. Basta . . . saper contare
   2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
   1. Si può usare solo se Ω è finito
   2. Tutti gli eventi elementari devono essere "equiprobabili"
   3. È tautologica

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
    1. Basta . . . saper contare
    2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
    1. Si può usare solo se Ω è finito
    2. Tutti gli eventi elementari devono essere equiprobabili
    3. È tautologica

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
   1. Basta . . . saper contare
   2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
   1. Si può usare solo se Ω è finito
   2. Tutti gli eventi elementari devono essere "equiprobabili"
   3. È tautologica

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
   1. Basta . . . saper contare
   2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
   1. Si può usare solo se Ω è finito
   2. Tutti gli eventi elementari devono essere "equiprobabili"
   3. È tautologica

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
   1. Basta . . . saper contare
   2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
   1. Si può usare solo se Ω è finito
   2. Tutti gli eventi elementari devono essere "equiprobabili"
   3. È tautologica

Definizione classica: pro e contro

1. Pro:
    1. Basta . . . saper contare
    2. È facilmente applicabile alle situazioni di gioco
2. Contro:
    1. Si può usare solo se Ω è finito
    2. Tutti gli eventi elementari devono essere "equiprobabili"
    3. È tautologica

Definizione classica: limitazioni . . . fisiche

La concezione classica ha il suo fondamento in situazioni "simmetriche", in cui sembra ragionevole postulare un'equiprobabilità.

Ma c'è un problema . . .

Per es. non è banale affermare che le sei facce di un dado sono equiprobabili per simmetria, e tanto meno la si può considerare un'affermazione valida a priori. Il comportamento di un sistema fisico sotto simmetrie va studiato come una legge di natura: l'esempio della non conservazione della parità è abbastanza recente per insegnare.

Definizione classica: limitazioni . . . fisiche

La concezione classica ha il suo fondamento in situazioni "simmetriche", in cui sembra ragionevole postulare un'equiprobabilità.
Ma c'è un problema . . .
Per es. non è banale affermare che le sei facce di un dado sono equiprobabili per simmetria, e tanto meno la si può considerare un'affermazione valida a priori. Il comportamento di un sistema fisico sotto simmetrie va studiato come una legge di natura: l'esempio della non conservazione della parità è abbastanza recente per insegnare.

Definizione classica: limitazioni . . . fisiche

La concezione classica ha il suo fondamento in situazioni "simmetriche", in cui sembra ragionevole postulare un'equiprobabilità.

Ma c'è un problema . . .

Per es. non è banale affermare che le sei facce di un dado sono equiprobabili per simmetria, e tanto meno la si può considerare un'affermazione valida a priori. Il comportamento di un sistema fisico sotto simmetrie va studiato come una legge di natura: l'esempio della non conservazione della parità è abbastanza recente per insegnare.

Definizione classica: limitazioni . . . fisiche

Detto in estrema sintesi: fino a poco più di 30 anni fa si dava per scontato che le leggi fisiche fossero indifferenti rispetto all'orientamento spaziale (destra- sinistra): se costruisco due orologi che siano l'uno l'esatta immagine speculare dell'altro i due orologi funzioneranno nello stesso modo. E se un sistema fisico ha la proprietà di coincidere a un certo istante con la sua immagine speculare, questo deve restare vero anche nel suo comportamento futuro.

Definizione classica: limitazioni . . . fisiche

Un esempio può essere un sasso che cade da fermo: il fatto che lo stato iniziale è simmetrico rispetto a ogni piano verticale porta a prevedere che la traiettoria dovrà essere verticale (se si trascura la forza di Coriolis, che infatti "rompe" la simmetria). L'esperimento fondamentale sulla "non conservazione della parità" mostrò invece che un sistema di questo tipo (un certo nucleo atomico) emetteva elettroni (decadimento β) di preferenza in una certa direzione, violando la simmetria. [E. Fabri, Il lato fisico della probabilità]

Concezioni diverse della probabilità

Definizione frequentista:

(DF) Definizione frequentista. Se le prove relative ad un dato esperimento sono ripetibili nelle medesime condizioni quante volte si vuole, si effettua un certo numero N di prove, e si calcola per ogni possibile esito E la frequenza relativa $F_{rel}(E)$ come il rapporto tra il numero $S(N)$ delle prove nella quali l'evento E si è verificato e il numero complessivo N delle prove effettuate: $F_{rel}(E) = S(N)/N$.

Concezioni diverse della probabilità

Definizione frequentista:

(DF) Definizione frequentista. Si ripete poi la medesima procedura per valori crescenti di N e si definisce probabilità di E il limite delle frequenze relative al tendere all'infinito del numero delle prove. In formule è abitudine usare la seguente notazione: $P(E) = \lim_{N \to +\infty} F_{rel}(E)$.

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
    1. La simmetria non è necessaria
    2. Si può . . . usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
    1. L'ipotesi di ripetibilità è debole
    2. In che senso va inteso il limite?
    3. Impossibilità di effettuare infinite prove

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
    1. La simmetria non è necessaria
    2. Si può . . . usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
    1. L'ipotesi di ripetibilità è debole
    2. In che senso va inteso il limite?
    3. Impossibilità di effettuare infinite prove

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
   1. La simmetria non è necessaria
   2. Si può . . . usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
   1. L'ipotesi di ripetibilità è debole

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
   1. La simmetria non è necessaria
   2. Si può ... usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
   1. L'ipotesi di ripetibilità è debole
   2. In che senso va inteso il limite?
   3. Impossibilità di effettuare infinite prove

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
   1. La simmetria non è necessaria
   2. Si può . . . usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
   1. L'ipotesi di ripetibilità è debole
   2. In che senso va inteso il limite?
   3. Impossibilità di effettuare infinite prove

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
    1. La simmetria non è necessaria
    2. Si può . . . usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
    1. L'ipotesi di ripetibilità è debole
    2. In che senso va inteso il limite?
    3. Impossibilità di effettuare infinite prove

Definizione frequentista: pro e contro

1. Pro:
   1. La simmetria non è necessaria
   2. Si può . . . usare su base sperimentale (didatticamente efficace?)
2. Contro:
   1. L'ipotesi di ripetibilità è debole
   2. In che senso va inteso il limite?
   3. Impossibilità di effettuare infinite prove

Definizione frequentista: una moneta ..."troppo perfetta"

[V. Villani, Archimede, Aprile-Giugno 1994] Citazione da un testo di scuola secondaria superiore:

Dalla tabella sotto riportata e che si riferisce al lancio di una moneta (gioco di testa e croce) si hanno i risultati elencati dopo 100, 1 000, 10 000, 100 000 lanci. Derivare da essi se la moneta è bene o male bilanciata. Calcolare la probabilità matematica e la probabilità statistica al termine del gioco.

Ecco la tabella:

n. lanci	testa	croce
100	52	48
1 000	519	481
10 000	5 066	4 934
100 000	50 009	49 991

Definizione frequentista: una moneta ..."troppo perfetta"

[V. Villani, Archimede, Aprile-Giugno 1994] Citazione da un testo di scuola secondaria superiore:
Dalla tabella sotto riportata e che si riferisce al lancio di una moneta (gioco di testa e croce) si hanno i risultati elencati dopo 100, 1 000, 10 000, 100 000 lanci. Derivare da essi se la moneta è bene o male bilanciata. Calcolare la probabilità matematica e la probabilità statistica al termine del gioco.
Ecco la tabella:

n. lanci	testa	croce
100	52	48
1 000	519	481
10 000	5 066	4 934
100 000	50 009	49 991

Definizione frequentista: una moneta ..."troppo perfetta"

[V. Villani, Archimede, Aprile-Giugno 1994] Citazione da un testo di scuola secondaria superiore:

Dalla tabella sotto riportata e che si riferisce al lancio di una moneta (gioco di testa e croce) si hanno i risultati elencati dopo 100, 1 000, 10 000, 100 000 lanci. Derivare da essi se la moneta è bene o male bilanciata. Calcolare la probabilità matematica e la probabilità statistica al termine del gioco.

Ecco la tabella:

n. lanci	testa	croce
100	52	48
1 000	519	481
10 000	5 066	4 934
100 000	50 009	49 991

Definizione frequentista: una moneta . . . "troppo perfetta"

Nota esplicativa: Con le locuzioni «probabilità matematica» e «probabilità statistica» l'autore si riferisce rispettivamente alla probabilità secondo l'impostazione classica (quindi probabilità di testa 1/2) e alla probabilità secondo il punto di vista frequentista (quindi al termine del gioco 0.50009).

Commenti:

- Se davvero si fosse usata la definizione frequentista si troverebbe un risultato che quasi certamente si discosta dalla situazione di parità perfetta ben più di quanto risulta dalla tabella.
- Si può calcolare la probabilità di giungere dopo 100 000 lanci ad un risultato che differisca per meno di 10 unità dalla situazione di parità perfetta: questa è estremamente esigua: circa 5%.

Definizione frequentista: una moneta . . . "troppo perfetta"

Nota esplicativa: Con le locuzioni «probabilità matematica» e «probabilità statistica» l'autore si riferisce rispettivamente alla probabilità secondo l'impostazione classica (quindi probabilità di testa 1/2) e alla probabilità secondo il punto di vista frequentista (quindi al termine del gioco 0.50009).

Commenti:

- Se davvero si fosse usata la definizione frequentista si troverebbe un risultato che quasi certamente si discosta dalla situazione di parità perfetta ben più di quanto risulta dalla tabella.
- Si può calcolare la probabilità di giungere dopo 100.000 lanci ad un risultato che differisca per meno di 10 unità dalla situazione di parità perfetta: questa è estremamente esigua: circa 5%.

Definizione frequentista: una moneta ..."troppo perfetta"

Nota esplicativa: Con le locuzioni «probabilità matematica» e «probabilità statistica» l'autore si riferisce rispettivamente alla probabilità secondo l'impostazione classica (quindi probabilità di testa 1/2) e alla probabilità secondo il punto di vista frequentista (quindi al termine del gioco 0.50009).

Commenti:

- Se davvero si fosse usata la definizione frequentista si troverebbe un risultato che quasi certamente si discosta dalla situazione di parità perfetta ben più di quanto risulta dalla tabella.
- Si può calcolare la probabilità di giungere dopo 100 000 lanci ad un risultato che differisca per meno di 10 unità dalla situazione di parità perfetta: questa è estremamente esigua: circa 5%.

Definizione frequentista: una moneta . . . "troppo perfetta"

Nota esplicativa: Con le locuzioni «probabilità matematica» e «probabilità statistica» l'autore si riferisce rispettivamente alla probabilità secondo l'impostazione classica (quindi probabilità di testa 1/2) e alla probabilità secondo il punto di vista frequentista (quindi al termine del gioco 0.50009).

Commenti:

- Se davvero si fosse usata la definizione frequentista si troverebbe un risultato che quasi certamente si discosta dalla situazione di parità perfetta ben più di quanto risulta dalla tabella.
- Si può calcolare la probabilità di giungere dopo 100 000 lanci ad un risultato che differisca per meno di 10 unità dalla situazione di parità perfetta: questa è estremamente esigua: circa 5%.

Definizione frequentista: una moneta ..."troppo perfetta"

Messaggio fuorviante: erronea credenza nella compensazione dei ritardi degli eventi aleatori rispetto alle aspettative teoriche.

Definizione frequentista: una moneta ... "troppo perfetta"

Poiché al crescere di n lo scarto tra la situazione ideale di parità teorica e il risultato sperimentale di una serie di n lanci cresce mediamente come $\sqrt{n}$ sarebbe stato assai più ragionevole ipotizzare al termine dei 100 000 lanci un risultato del tipo 50 268 teste e 49 732 croci, o viceversa 49 732 teste e 50 268 croci.

Definizione frequentista: una moneta . . . "troppo perfetta"

Non è detto infatti che se il numero delle teste eccede quello delle croci in corrispondenza al centesimo, millesimo, decimillesimo lancio, la medesima situazione debba ripresentarsi in corrispondenza del centomillesimo lancio.

Concezioni diverse della probabilità

Definizione soggettiva:

(DS) Definizione soggettiva. La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 € se l'evento si verifica e 0 € se l'evento non si verifica. Le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

Concezioni diverse della probabilità

Definizione soggettiva:

(DS) Definizione soggettiva. La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 € se l'evento si verifica e 0 € se l'evento non si verifica. Le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

La condizione di coerenza: ancora una moneta . . . imperfetta

Quello che stupisce di più nella definizione soggettiva è la "clausola di coerenza". Per capire meglio consideriamo una "moneta sbilanciata" e affermiamo che le probabilità di T e C sono rispettivamente $1/2$ e $1/4$. Obiezione: Ma la somma delle probabilità deve essere 1. Perché? Senza la clausola di coerenza si potrebbe ritenere che la cosa funzioni! Ma posta la clausola di coerenza, potremmo scommettere sia su T che su C e riceveremmo certamente il premio pagando complessivamente i $3/4$ del premio stesso, annullando quindi l'aletorietà della situazione.

La condizione di coerenza: ancora una moneta . . . imperfetta

Quello che stupisce di più nella definizione soggettiva è la "clausola di coerenza". Per capire meglio consideriamo una "moneta sbilanciata" e affermiamo che le probabilità di T e C sono rispettivamente $1/2$ e $1/4$. Obiezione: Ma la somma delle probabilità deve essere 1. Perché? Senza la clausola di coerenza si potrebbe ritenere che la cosa funzioni! Ma posta la clausola di coerenza, potremmo scommettere sia su T che su C e riceveremmo certamente il premio pagando complessivamente i $3/4$ del premio stesso, annullando quindi l'aletorietà della situazione.

La condizione di coerenza: ancora una moneta . . . imperfetta

Quello che stupisce di più nella definizione soggettiva è la "clausola di coerenza". Per capire meglio consideriamo una "moneta sbilanciata" e affermiamo che le probabilità di T e C sono rispettivamente $1/2$ e $1/4$. Obiezione: Ma la somma delle probabilità deve essere 1. Perché? Senza la clausola di coerenza si potrebbe ritenere che la cosa funzioni! Ma posta la clausola di coerenza, potremmo scommettere sia su T che su C e riceveremmo certamente il premio pagando complessivamente i $3/4$ del premio stesso, annullando quindi l'aletorietà della situazione.

La condizione di coerenza: ancora una moneta . . . imperfetta

Quello che stupisce di più nella definizione soggettiva è la "clausola di coerenza". Per capire meglio consideriamo una "moneta sbilanciata" e affermiamo che le probabilità di T e C sono rispettivamente $1/2$ e $1/4$. Obiezione: Ma la somma delle probabilità deve essere 1. Perché? Senza la clausola di coerenza si potrebbe ritenere che la cosa funzioni! Ma posta la clausola di coerenza, potremmo scommettere sia su T che su C e riceveremmo certamente il premio pagando complessivamente i $3/4$ del premio stesso, annullando quindi l'aletorietà della situazione.

La condizione di coerenza: ancora una moneta . . . imperfetta

Quello che stupisce di più nella definizione soggettiva è la "clausola di coerenza". Per capire meglio consideriamo una "moneta sbilanciata" e affermiamo che le probabilità di T e C sono rispettivamente $1/2$ e $1/4$. Obiezione: Ma la somma delle probabilità deve essere 1. Perché? Senza la clausola di coerenza si potrebbe ritenere che la cosa funzioni! Ma posta la clausola di coerenza, potremmo scommettere sia su T che su C e riceveremmo certamente il premio pagando complessivamente i $3/4$ del premio stesso, annullando quindi l'aletorietà della situazione.

La condizione di coerenza: ancora una moneta ... imperfetta

Quello che stupisce di più nella definizione soggettiva è la "clausola di coerenza". Per capire meglio consideriamo una "moneta sbilanciata" e affermiamo che le probabilità di T e C sono rispettivamente $1/2$ e $1/4$. Obiezione: Ma la somma delle probabilità deve essere 1. Perché? Senza la clausola di coerenza si potrebbe ritenere che la cosa funzioni! Ma posta la clausola di coerenza, potremmo scommettere sia su T che su C e riceveremmo certamente il premio pagando complessivamente i $3/4$ del premio stesso, annullando quindi l'aletorietà della situazione.

Critiche alla definizione soggettiva

Non necessariamente un individuo è indifferente al rischio: qualche volta lo cerca pagando un prezzo che non è equo (lotterie e giochi d'azzardo), qualche volta paga di più proprio per evitare il rischio (assicurazioni). In effetti bisogna ammettere che un individuo che vuole ricevere K € paghi K per la probabilità di ricevere 1 €. Ovviamente la critica più diffusa è quella di essere soggettiva, ovvero di fondare la probabilità sull'opinione dei singoli, variabile da persona a persona a seconda delle circostanze in cui ci si trova. Ciò renderebbe impossibile la comunicazione tra persone con diverse valutazioni di probabilità e dunque lo sviluppo della probabilità stessa.

Critiche alla definizione soggettiva

Non necessariamente un individuo è indifferente al rischio: qualche volta lo cerca pagando un prezzo che non è equo (lotterie e giochi d'azzardo), qualche volta paga di più proprio per evitare il rischio (assicurazioni). In effetti bisogna ammettere che un individuo che vuole ricevere K € paghi K per la probabilità di ricevere 1 €.
Ovviamente la critica più diffusa è quella di essere soggettiva, ovvero di fondare la probabilità sull'opinione dei singoli, variabile da persona a persona a seconda delle circostanze in cui ci si trova. Ciò renderebbe impossibile la comunicazione tra persone con diverse valutazioni di probabilità e dunque lo sviluppo della probabilità stessa.

Critiche alla definizione soggettiva

Non necessariamente un individuo è indifferente al rischio: qualche volta lo cerca pagando un prezzo che non è equo (lotterie e giochi d'azzardo), qualche volta paga di più proprio per evitare il rischio (assicurazioni). In effetti bisogna ammettere che un individuo che vuole ricevere K € paghi K per la probabilità di ricevere 1 €. Ovviamente la critica più diffusa è quella di essere soggettiva, ovvero di fondare la probabilità sull'opinione dei singoli, variabile da persona a persona a seconda delle circostanze in cui ci si trova. Ciò renderebbe impossibile la comunicazione tra persone con diverse valutazioni di probabilità e dunque lo sviluppo della probabilità stessa.

Qualche provocazione

Consideriamo i seguenti esempi:

qual è la probabilità che un motore di un aereo si blocchi?

Può darsi ad es. che le statistiche dicano che su 1000 voli 5 volte si è bloccato un motore. Abbiamo allora due problemi: uno d'inferenza statistica, l'altro di applicazione ai casi singoli. Possiamo dire che la probabilità è 0.005? (la teoria ci dice che un campione così esiguo dà informazioni incerte: un fisico direbbe $n = 5 \pm \sqrt{5}$, da cui $p = 0.0050 \pm 0.0022$). Inoltre, l'applicabilità al caso singolo dipende dalla misura in cui esso corrisponde al campione. Ad es. se l'aereo appartiene a una compagnia in difficoltà finanziarie, che sta risparmiando sulla manutenzione, c'è da stare molto meno tranquilli . . .

Qualche provocazione

Consideriamo i seguenti esempi:

qual è la probabilità che un motore di un aereo si blocchi?

Può darsi ad es. che le statistiche dicano che su 1000 voli 5 volte si è bloccato un motore. Abbiamo allora due problemi: uno d'inferenza statistica, l'altro di applicazione ai casi singoli. Possiamo dire che la probabilità è 0.005? (la teoria ci dice che un campione così esiguo dà informazioni incerte: un fisico direbbe $n = 5 \pm \sqrt{5}$, da cui $p = 0.0050 \pm 0.0022$). Inoltre, l'applicabilità al caso singolo dipende dalla misura in cui esso corrisponde al campione. Ad es. se l'aereo appartiene a una compagnia in difficoltà finanziarie, che sta risparmiando sulla manutenzione, c'è da stare molto meno tranquilli ...

Qualche provocazione

Consideriamo i seguenti esempi:
qual è la probabilità che un motore di un aereo si blocchi?
Può darsi ad es. che le statistiche dicano che su 1000 voli 5 volte si è bloccato un motore. Abbiamo allora due problemi: uno d'inferenza statistica, l'altro di applicazione ai casi singoli. Possiamo dire che la probabilità è 0.005? (la teoria ci dice che un campione così esiguo dà informazioni incerte: un fisico direbbe $n = 5 \pm \sqrt{5}$, da cui $p = 0.0050 \pm 0.0022$). Inoltre, l'applicabilità al caso singolo dipende dalla misura in cui esso corrisponde al campione. Ad es. se l'aereo appartiene a una compagnia in difficoltà finanziarie, che sta risparmiando sulla manutenzione, c'è da stare molto meno tranquilli ...

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

- la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
- quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
- come sopra, ma ristretta a Paderno del Grappa
- come sopra, ma conoscendo il tempo del giorno precedente

Dovrebbe essere chiaro che presa in sé l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

- la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
- quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
- come sopra, ma ristretta a Paderno del Grappa
- come sopra, ma conoscendo il tempo del giorno precedente.

Dovrebbe essere chiaro che presa in sè l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

- la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
- quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
- come sopra, ma ristretta a Paderno del Grappa
- come sopra, ma conoscendo il tempo del giorno precedente.

Dovrebbe essere chiaro che presa in sè l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

- la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
- quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
- come sopra, ma ristretta a Paderno del Grappa
- come sopra, ma conoscendo il tempo del giorno precedente.

Dovrebbe essere chiaro che presa in sè l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

- la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
- quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
- come sopra, ma ristretta a Paderno del Grappa
- come sopra, ma conoscendo il tempo del giorno precedente.

Dovrebbe essere chiaro che presa in sè l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

Qualche provocazione

qual è la probabilità che domani piova?

Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremmo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

- la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
- quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
- come sopra, ma ristretta a Paderno del Grappa
- come sopra, ma conoscendo il tempo del giorno precedente.

Dovrebbe essere chiaro che presa in sè l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

Qualche provocazione

qual è la probabilità che Evaristo (10 anni) arrivi a 40 anni?

Qualche provocazione

qual è la probabilità che Evaristo (10 anni) arrivi a 40 anni?

Se 95 nati su 100 arrivano a 10 anni, e 80 arrivano a 40 anni, la probabilità richiesta è 80/95: ma discutiamo. Anzitutto quanto è significativo il campione? (per es. le cause di morte cambiano nel tempo). Poi bisogna precisare che il calcolo fatto sotto intende un modello: ci sono 100 palline, di cui 5 nere (quelli che muoiono prima dei 10 anni), 15 rosse (i morti fra 10 e 40 anni) e 80 bianche. Si estrae una pallina e si ripete l'estrazione se è nera: qual è la probabilità che esca bianca?

Qualche provocazione

qual è la probabilità che Evaristo (10 anni) arrivi a 40 anni?
Stiamo dunque supponendo di scegliere un ragazzo a caso nell'universo su cui si è fatta la statistica. Ma se il ragazzo è mio figlio, non è scelto a caso: è un caso determinato, con certi caratteri genetici, certe condizioni socio-ambientali, ecc. che lo possono differenziare dalla scelta casuale. Perciò non ha senso chiedersi "qual è la probabilità che mio figlio arrivi a 40 anni"!

Definizione Assiomatica

L'elaborazione di un sistema assiomatico è stata una conquista solo recente (A. Kolmogorov, 1933) a fronte dell'uso informale dell'impostazione classica (P.S. Laplace 1749-1827) e frequentista che risalgono al XVII e XVIII secolo (mentre l'impostazione soggettivista risale a circa cinque o sei anni prima di quella assiomatica).

Riportiamo subito la definizione assiomatica dovuta al matematico russo Kolmogorov, limitatamente al caso degli **spazi di probabilità finiti**, in una versione che ormai si trova, salvo piccole variazioni linguistiche, nella maggior parte dei testi di livello universitario.

Definizione Assiomatica

L'elaborazione di un sistema assiomatico è stata una conquista solo recente (A. Kolmogorov, 1933) a fronte dell'uso informale dell'impostazione classica (P.S. Laplace 1749-1827) e frequentista che risalgono al XVII e XVIII secolo (mentre l'impostazione soggettivista risale a circa cinque o sei anni prima di quella assiomatica).
Riportiamo subito la definizione assiomatica dovuta al matematico russo Kolmogorov, limitatamente al caso degli **spazi di probabilità finiti**, in una versione che ormai si trova, salvo piccole variazioni linguistiche, nella maggior parte dei testi di livello universitario.

Definizione Assiomatica

Sia Ω un insieme finito. Sia poi $\mathcal{A} = \{ A_i \}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che:

A1: $\emptyset$ e Ω siano elementi di $\mathcal{A}$;

A2: Se A è un elemento di $\mathcal{A}$ anche A^c lo è;

A3: Se $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono elementi di $\mathcal{A}$, allora anche $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ e $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ lo sono

Definizione Assiomatica

Sia infine $P\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ una funzione a valori nell'intervallo reale chiuso e limitato di estremi 0 e 1 tale che:

P1: $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega)$=1;

P2: se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti sussista l'uguaglianza:
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

Definizione Assiomatica

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ viene detta uno **spazio di probabilità** e il numero $P(A)$ viene assunto, per definizione, come misura della probabilità di A.

Alcuni Risultati

Teorema (probabilità contraria)

Dato un evento A, si ha: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Teorema (Probabilità totali)

Dati due eventi A e B, si ha: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Alcuni Risultati

Teorema (probabilità contraria)

Dato un evento A, si ha: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Teorema (Probabilità totali)

Dati due eventi A e B, si ha: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Difficoltà nei modelli

Esercizio

Ci sono due urne U_1 e U_2 contenenti palline bianche e nere. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si mette nella seconda; poi si prende una pallina dalla seconda e la si mette nella prima (ovviamente senza mai vedere il colore delle palline estratte). Ci interessa sapere se, dopo questi spostamenti, nella prima urna il numero di palline bianche è diminuito, aumentato o rimasto invariato rispetto alla situazione iniziale.

Difficoltà nei modelli

Negli esercizi di calcolo delle probabilità bisogna in primo luogo costruire un modello matematico della situazione. Questo è per i nostri ragazzi (e non solo!) un passo generalmente non così semplice. Si tratta di individuare gli eventi che interessano e le relazioni tra essi. Spesso è questa la parte più difficile nella soluzione del problema, perché a volte la successiva applicazione delle regole di calcolo segue "procedimenti standard".
Torniamo all'esercizio proposto.

Difficoltà nei modelli

Negli esercizi di calcolo delle probabilità bisogna in primo luogo costruire un modello matematico della situazione. Questo è per i nostri ragazzi (e non solo!) un passo generalmente non così semplice. Si tratta di individuare gli eventi che interessano e le relazioni tra essi. Spesso è questa la parte più difficile nella soluzione del problema, perché a volte la successiva applicazione delle regole di calcolo segue "procedimenti standard".
Torniamo all'esercizio proposto.

Difficoltà nei modelli

Negli esercizi di calcolo delle probabilità bisogna in primo luogo costruire un modello matematico della situazione. Questo è per i nostri ragazzi (e non solo!) un passo generalmente non così semplice. Si tratta di individuare gli eventi che interessano e le relazioni tra essi. Spesso è questa la parte più difficile nella soluzione del problema, perché a volte la successiva applicazione delle regole di calcolo segue "procedimenti standard". Torniamo all'esercizio proposto.

Difficoltà nei modelli

Negli esercizi di calcolo delle probabilità bisogna in primo luogo costruire un modello matematico della situazione. Questo è per i nostri ragazzi (e non solo!) un passo generalmente non così semplice. Si tratta di individuare gli eventi che interessano e le relazioni tra essi. Spesso è questa la parte più difficile nella soluzione del problema, perché a volte la successiva applicazione delle regole di calcolo segue "procedimenti standard".

Torniamo all'esercizio proposto.

Difficoltà nei modelli

Negli esercizi di calcolo delle probabilità bisogna in primo luogo costruire un modello matematico della situazione. Questo è per i nostri ragazzi (e non solo!) un passo generalmente non così semplice. Si tratta di individuare gli eventi che interessano e le relazioni tra essi. Spesso è questa la parte più difficile nella soluzione del problema, perché a volte la successiva applicazione delle regole di calcolo segue "procedimenti standard".
Torniamo all'esercizio proposto.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: B_1 = "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", B_2 = "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato". Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: $B_1 =$ "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", $B_2 =$ "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: B_1 = "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", B_2 = "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: B_1 = "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", B_2 = "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: $B_1 =$ "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", $B_2 =$ "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: $B_1 =$ "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", $B_2 =$ "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: $B_1 =$ "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", $B_2 =$ "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Indichiamo con E_{-1} l'evento "il numero di palline bianche è diminuito", con E_0 l'evento "il numero di palline bianche è rimasto invariato",con E_{+1} l'evento "il numero di palline bianche è aumentato. Consideriamo ora gli eventi per descrivere l'operazione effettuata: $B_1 =$ "nell'estrazione dalla prima urna si ottiene una pallina bianca", $B_2 =$ "nell'estrazione dalla seconda urna si ottiene una pallina bianca". Si ottiene allora "facilmente": $E_{-1} = B_1 \cap B_2^c$, $E_0 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$, $E_{+1} = B_1^c \cap B_2$.

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come ...ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma .... La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c; $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri? Vengono subito in mente due possibilità

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come . . . ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma . . . .
La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c;
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri?
Vengono subito in mente due possibilità
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come . . . ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma . . . .

La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c; $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri? Vengono subito in mente due possibilità

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come ... ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma .... La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c; $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri? Vengono subito in mente due possibilità
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come . . . ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma . . . . La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c; $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri?

Vengono subito in mente due possibilità

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come ...ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma .... La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c; $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri? Vengono subito in mente due possibilità

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come ... ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma .... La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c; $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri?
Vengono subito in mente due possibilità
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Inoltre non sempre le cose vanno come ... ci si aspetta. Posti di fronte a "generalizzazioni", spesso si procede per analogia, ma ....
La cosa non è tipica delle probabilità, pensiamo per es. alla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b, c;
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Si può estendere ai quadrilateri?
Vengono subito in mente due possibilità
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
(Per inciso la seconda formula è corretta solo per quadrilateri inscrittibili, in generale per quadrilateri convessi si ha:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

[V. Villani, Cominciamo dal punto])

Difficoltà nei modelli

Lo stesso capita in probabilità:

Esercizio

Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta la faccia 6 lanciando per tre volte un dado non truccato?

Non avendo ancora parlato di indipendenza facciamo un po' più di fatica: iniziamo con il "creare un modello".

Difficoltà nei modelli

Lo stesso capita in probabilità:

Esercizio

Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta la faccia 6 lanciando per tre volte un dado non truccato?

Non avendo ancora parlato di indipendenza facciamo un po' più di fatica: iniziamo con il "creare un modello".

Difficoltà nei modelli

Lo stesso capita in probabilità:

Esercizio

Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta la faccia 6 lanciando per tre volte un dado non truccato?

Non avendo ancora parlato di indipendenza facciamo un po' più di fatica: iniziamo con il "creare un modello".

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \dots, 6; i = 1, 2, 3 \}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{ \omega_i = 6 \}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{\, \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \ldots, 6; i = 1, 2, 3 \,\}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{\, \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \,\}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{\, \omega_i = 6 \,\}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{\, \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \ldots, 6; i = 1, 2, 3 \,\}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{\, \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \,\}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{\, \omega_i = 6 \,\}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{\,\omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \ldots, 6; i = 1, 2, 3\,\}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{\,\omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6\,\}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{\,\omega_i = 6\,\}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{\, \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \ldots, 6; i = 1, 2, 3 \,\}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{\, \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \,\}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{\, \omega_i = 6 \,\}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \dots, 6; i = 1, 2, 3 \}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{ \omega_i = 6 \}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \dots, 6; i = 1, 2, 3 \}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{ \omega_i = 6 \}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = 1, \ldots, 6; i = 1, 2, 3 \}$. È chiaro che $\#(\Omega) = 216$, mentre l'evento che ci interessa è $A = \{ \omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$ dove almeno uno degli ω_i è uguale a $6 \}$. Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove $A_i = \{ \omega_i = 6 \}$, cioè A_i è il sottoinsieme di A la cui cui coordinata i-esima è pari a 6. Ora gli eventi A_i non sono disgiunti (alla loro intersezione appartiene la terna $(6, 6, 6)$), e $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ è tale che le terne che vi appartengono contengono solo le facce da 1 a 5, dunque $\#(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 125$. Per il teorema della probabilità contraria si avrà:

$$P(A) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Difficoltà nei modelli

Verrebbe però tanto la tentazione di "abbreviare le cose" usando il teorema delle probabilità totali:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$
$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$\frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{1}{216} = \frac{107}{216}.$$

Il problema risiede nell'indebita estensione del teorema delle probabilita totali dal caso di due eventi al caso di 3 eventi!

Difficoltà nei modelli

Verrebbe però tanto la tentazione di "abbreviare le cose" usando il teorema delle probabilità totali:

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$

$\frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{1}{216} = \frac{107}{216}.$

Il problema risiede nell'indebita estensione del teorema delle probabilita totali dal caso di due eventi al caso di 3 eventi!

Difficoltà nei modelli

Verrebbe però tanto la tentazione di "abbreviare le cose" usando il teorema delle probabilità totali:
$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$
$\frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{1}{216} = \frac{107}{216}.$

Il problema risiede nell'indebita estensione del teorema delle probabilita totali dal caso di due eventi al caso di 3 eventi!

Difficoltà nei modelli

Verrebbe però tanto la tentazione di "abbreviare le cose" usando il teorema delle probabilità totali:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$
$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$\frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{1}{216} = \frac{107}{216}.$$

Il problema risiede nell'indebita estensione del teorema delle probabilita totali dal caso di due eventi al caso di 3 eventi!

Difficoltà nei modelli

Il teorema si può "generalizzare" (tenendo conto del Principio di Inclusione-Esclusione) al seguente:

Teorema (Inclusione-Esclusione)

Se $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$, si ha:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_r} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Difficoltà nei modelli

Il teorema si può "generalizzare" (tenendo conto del Principio di Inclusione-Esclusione) al seguente:

Teorema (Inclusione-Esclusione)

Se $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$, si ha:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_r} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Difficoltà nei modelli

Nel nostro caso:

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}.$

Difficoltà nei modelli

Nel nostro caso:
$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$
$\frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}.$

Difficoltà nei modelli

Nel nostro caso:
$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}.$

Sommario

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Nel linguaggio corrente si usano locuzioni che fanno riferimento all'indipendenza di due o più eventi. Riteniamo opportuno riflettere sulle sfumature di significato che, a seconda del contesto, possono essere attribuite a locuzioni di questo tipo.

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Nel linguaggio corrente si usano locuzioni che fanno riferimento all'indipendenza di due o più eventi. Riteniamo opportuno riflettere sulle sfumature di significato che, a seconda del contesto, possono essere attribuite a locuzioni di questo tipo.

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Presentiamo prima la definizione di indipendenza stocastica che si trova comunemente nei libri di testo:

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

e presentiamo la definizione di indipendenza logica

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né il verificarsi di B né il verificarsi di B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né il verificarsi di A né il verificarsi di A^c.

Le due definizioni sono equivalenti?

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Presentiamo prima la definizione di indipendenza stocastica che si trova comunemente nei libri di testo:

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

e presentiamo la definizione di indipendenza logica

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né il verificarsi di B né il verificarsi di B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né il verificarsi di A né il verificarsi di A^c.

Le due definizioni sono equivalenti?

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Presentiamo prima la definizione di indipendenza stocastica che si trova comunemente nei libri di testo:

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

e presentiamo la definizione di indipendenza logica

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né il verificarsi di B né il verificarsi di B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né il verificarsi di A né il verificarsi di A^c.

Le due definizioni sono equivalenti?

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_1: "esce un numero pari" B_1: "esce un numero $\geqslant 4$"

Risposta:

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_1: "esce un numero pari" B_1: "esce un numero $\geqslant 4$"

Risposta:

non indipendenti secondo l'indipendenza stocastica; indipendenti secondo l'indipendenza logica;

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_2: "esce un numero $\geqslant 1$ e $\leqslant 6$" B_2: "esce il numero 4"

Risposta:

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_2: "esce un numero $\geqslant 1$ e $\leqslant 6$" B_2: "esce il numero 4"

Risposta:

indipendenti secondo l'indipendenza stocastica; non indipendenti secondo l'indipendenza logica;

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_3: "esce o il numero 1 o il numero 2" B_3: "esce un numero pari"

Risposta:

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_3: "esce o il numero 1 o il numero 2" B_3: "esce un numero pari"

Risposta:

indipendenti secondo l'indipendenza stocastica; indipendenti secondo l'indipendenza logica;

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_4: "esce un numero pari" B_4: "esce un numero dispari"

Risposta:

Perché usare il termine indipendenza stocastica?

Si lancia un dado (regolare). Quali tra queste coppie di eventi sono "indipendenti" secondo l'una o l'altra delle definizioni proposte?

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definizione (Indipendenza logica)

Due eventi A, B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non implica né B né B^c, e simmetricamente se il verificarsi di B non implica né A né A^c.

Situazione:

A_4: "esce un numero pari" B_4: "esce un numero dispari"

Risposta:

non indipendenti secondo l'indipendenza stocastica; non indipendenti secondo l'indipendenza logica;

Un esempio . . . istruttivo

Da una indagine statistica effettuata su un campione di 1000 individui di una certa fascia di età risulta che 70 sono fumatori e che 300 sono mancini. Risulta inoltre che 21 sono contemporaneamente fumatori e mancini. Detto E_1 l'evento: "un individuo è fumatore" e E_2 l'evento: "un individuo è mancino", stabilire se E_1 e E_2 sono indipendenti rispetto alle definizioni date.

Gli eventi dati sono stocasticamente indipendenti:

$\frac{21}{1000} = \frac{300}{1000} \cdot \frac{70}{1000}$. Gli eventi dati sono logicamente indipendenti.

Un esempio . . . istruttivo

Da una indagine statistica effettuata su un campione di 1000 individui di una certa fascia di età risulta che 70 sono fumatori e che 300 sono mancini. Risulta inoltre che 21 sono contemporaneamente fumatori e mancini. Detto E_1 l'evento: "un individuo è fumatore" e E_2 l'evento: "un individuo è mancino", stabilire se E_1 e E_2 sono indipendenti rispetto alle definizioni date.

Gli eventi dati sono stocasticamente indipendenti:

$$\frac{21}{1000} = \frac{300}{1000} \cdot \frac{70}{1000}.$$

Gli eventi dati sono logicamente indipendenti.

Un esempio . . . istruttivo

Da una indagine statistica effettuata su un campione di 1000 individui di una certa fascia di età risulta che 70 sono fumatori e che 300 sono mancini. Risulta inoltre che 21 sono contemporaneamente fumatori e mancini. Detto E_1 l'evento: "un individuo è fumatore" e E_2 l'evento: "un individuo è mancino", stabilire se E_1 e E_2 sono indipendenti rispetto alle definizioni date.

Gli eventi dati sono stocasticamente indipendenti:
$\frac{21}{1000} = \frac{300}{1000} \cdot \frac{70}{1000}$. Gli eventi dati sono logicamente indipendenti.

Un esempio ... istruttivo

Da una indagine statistica effettuata su un campione di 1000 individui di una certa fascia di età risulta che 69 sono fumatori e che 301 sono mancini. Risulta inoltre che 21 sono contemporaneamente fumatori e mancini. Detto E_1 l'evento: "un individuo è fumatore" e E_2 l'evento: "un individuo è mancino", stabilire se E_1 e E_2 sono indipendenti rispetto alle definizioni date.

Gli eventi dati non sono stocasticamente indipendenti:
$\frac{21}{1000} > \frac{301}{1000} \cdot \frac{69}{1000}$. Gli eventi dati sono logicamente indipendenti.

Un esempio . . . istruttivo

Da una indagine statistica effettuata su un campione di 1000 individui di una certa fascia di età risulta che 69 sono fumatori e che 301 sono mancini. Risulta inoltre che 21 sono contemporaneamente fumatori e mancini. Detto E_1 l'evento: "un individuo è fumatore" e E_2 l'evento: "un individuo è mancino", stabilire se E_1 e E_2 sono indipendenti rispetto alle definizioni date.

Gli eventi dati non sono stocasticamente indipendenti:

$\frac{21}{1000} > \frac{301}{1000} \cdot \frac{69}{1000}$. Gli eventi dati sono logicamente indipendenti.

Un esempio . . . istruttivo

Da una indagine statistica effettuata su un campione di 1000 individui di una certa fascia di età risulta che 69 sono fumatori e che 301 sono mancini. Risulta inoltre che 21 sono contemporaneamente fumatori e mancini. Detto E_1 l'evento: "un individuo è fumatore" e E_2 l'evento: "un individuo è mancino", stabilire se E_1 e E_2 sono indipendenti rispetto alle definizioni date.
Gli eventi dati non sono stocasticamente indipendenti:
$\frac{21}{1000} > \frac{301}{1000} \cdot \frac{69}{1000}$. Gli eventi dati sono logicamente indipendenti.

Indipendenza e incompatibilità

Ritorniamo al problema del Cavalier De De Méré: Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Méré (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di 1/2, aveva scommesso su tale combinazione ma ... invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662): «È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»

Risposta del Cavalier De Méré: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è 1/6. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è 1/36. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Indipendenza e incompatibilità

Ritorniamo al problema del Cavalier De De Mérè: Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Mérè (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di 1/2, aveva scommesso su tale combinazione ma . . . invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662):

«È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»

Risposta del Cavalier De Mérè: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Indipendenza e incompatibilità

Ritorniamo al problema del Cavalier De De Mérè: Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Mérè (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di 1/2, aveva scommesso su tale combinazione ma . . . invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662):
«È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»
Risposta del Cavalier De Mérè: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è 1/6. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è 1/36. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Indipendenza e incompatibilità

Ritorniamo al problema del Cavalier De De Mérè: Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Mérè (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di $1/2$, aveva scommesso su tale combinazione ma ... invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662): «È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»

Risposta del Cavalier De Mérè: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Indipendenza e incompatibilità

Ritorniamo al problema del Cavalier De De Méré: Un noto giocatore d'azzardo, il Cavalier De Méré (1607-1684), si lamentava del fatto che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione di dadi una probabilità maggiore di $1/2$, aveva scommesso su tale combinazione ma . . . invece di vincere perdeva. Decise allora di scrivere a Blaise Pascal (1623-1662): «È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi?»

Risposta del Cavalier De Méré: la probabilità di ottenere un 6 lanciando un solo dado è $1/6$. Con quattro lanci si avrà dunque una probabilità pari a $4 \cdot (1/6) = 2/3$. La probabilità di ottenere un doppio 6 lanciando due dadi è $1/36$. Con 24 lanci dei due dadi si avrà dunque una probabilità di $24 \cdot (1/36) = 2/3$. Quindi la probabilità dei due eventi è la stessa.

Indipendenza e incompatibilità

Il Cavaliere De Mérè aveva commesso un errore: quello di sommare la probabilità di un evento 4 volte nel primo caso, e 24 volte nel secondo, come se si trattasse di eventi incompatibili.

Indipendenza e incompatibilità

Blaise Pascal osservò invece, correttamente, che l'uscita di un 6 (o di una coppia di 6) in un lancio non è incompatibile con le successive uscite del 6 (o di una coppia di 6) nei successivi lanci. In altre parole i lanci sono indipendenti, non incompatibili.

Indipendenza e incompatibilità

Pertanto la probabilità di ottenere almeno un sei su quattro lanci è $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,5177$, mentre la probabilità di ottenere almeno un doppio sei lanciando 24 volte una coppia di dadi è $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,4914$.

Indipendenza e probabilità condizionata

L'indipendenza stocastica testé definita viene applicata valutando lo svolgimento di un esperimento. Cioè due eventi sono considerati indipendenti perché relativi "a prove indipendenti". Consideriamo per esempio due successivi lanci di un dado. Questi sono appunto considerati indipendenti in base allo svolgimento della prova. Ciò è senza ombra di dubbio chiaro ed intuitivo, ma non esaurisce il concetto di indipendenza (e non permette una facile derivazione della "formula delle probabilità composta").

Indipendenza e probabilità condizionata

L'indipendenza stocastica testé definita viene applicata valutando lo svolgimento di un esperimento. Cioè due eventi sono considerati indipendenti perché relativi "a prove indipendenti". Consideriamo per esempio due successivi lanci di un dado. Questi sono appunto considerati indipendenti in base allo svolgimento della prova. Ciò è senza ombra di dubbio chiaro ed intuitivo, ma non esaurisce il concetto di indipendenza (e non permette una facile derivazione della "formula delle probabilità composta").

Indipendenza e probabilità condizionata

L'indipendenza stocastica testé definita viene applicata valutando lo svolgimento di un esperimento. Cioè due eventi sono considerati indipendenti perché relativi "a prove indipendenti". Consideriamo per esempio due successivi lanci di un dado. Questi sono appunto considerati indipendenti in base allo svolgimento della prova. Ciò è senza ombra di dubbio chiaro ed intuitivo, ma non esaurisce il concetto di indipendenza (e non permette una facile derivazione della "formula delle probabilità composta").

Indipendenza e probabilità condizionata

L'indipendenza stocastica testé definita viene applicata valutando lo svolgimento di un esperimento. Cioè due eventi sono considerati indipendenti perché relativi "a prove indipendenti". Consideriamo per esempio due successivi lanci di un dado. Questi sono appunto considerati indipendenti in base allo svolgimento della prova. Ciò è senza ombra di dubbio chiaro ed intuitivo, ma non esaurisce il concetto di indipendenza (e non permette una facile derivazione della "formula delle probabilità composta").

Indipendenza e probabilità condizionata

Il fatto è che le "due prove indipendenti" vanno in realtà considerate come parti di un'unica prova: i risultati possibili del lancio sono le 36 possibili coppie di valori. Indicando con A e B l'uscita del 6 rispettivamente nel primo e nel secondo lancio del dado, ovvero $A = \{ (6, \omega_j) \mid j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ e $B = \{ (\omega_i, 6) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, e contando il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli, si perviene a $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/6$, e poiché $P(A \cap B) = 1/36$ si ottiene l'indipendenza. Il percorso però non è stato agevole!

Indipendenza e probabilità condizionata

Il fatto è che le "due prove indipendenti" vanno in realtà considerate come parti di un'unica prova: i risultati possibili del lancio sono le 36 possibili coppie di valori. Indicando con A e B l'uscita del 6 rispettivamente nel primo e nel secondo lancio del dado, ovvero $A = \{ (6, \omega_j) \mid j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ e $B = \{ (\omega_i, 6) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, e contando il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli, si perviene a $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/6$, e poiché $P(A \cap B) = 1/36$ si ottiene l'indipendenza. Il percorso però non è stato agevole!

Indipendenza e probabilità condizionata

Il fatto è che le "due prove indipendenti" vanno in realtà considerate come parti di un'unica prova: i risultati possibili del lancio sono le 36 possibili coppie di valori. Indicando con A e B l'uscita del 6 rispettivamente nel primo e nel secondo lancio del dado, ovvero $A = \{ (6, \omega_j) \mid j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ e $B = \{ (\omega_i, 6) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, e contando il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli, si perviene a $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/6$, e poiché $P(A \cap B) = 1/36$ si ottiene l'indipendenza.

Il percorso però non è stato agevole!

Indipendenza e probabilità condizionata

Il fatto è che le "due prove indipendenti" vanno in realtà considerate come parti di un'unica prova: i risultati possibili del lancio sono le 36 possibili coppie di valori. Indicando con A e B l'uscita del 6 rispettivamente nel primo e nel secondo lancio del dado, ovvero $A = \{ (6, \omega_j) \mid j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ e $B = \{ (\omega_i, 6) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, e contando il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli, si perviene a $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/6$, e poiché $P(A \cap B) = 1/36$ si ottiene l'indipendenza. Il percorso però non è stato agevole!

Indipendenza e probabilità condizionata

Consideriamo il seguente semplice esempio. Supponiamo di lanciare un dado non truccato e scommettiamo sull'evento A "esce la faccia tre". Prima del lancio, in assenza di ulteriori informazioni, la probabilità dell'evento è $P(A) = 1/6$ e tale rimane anche a lancio effettuato, fino a quando non avremo avuto la possibilità di conoscere in qualche modo l'esito del lancio. Se però qualcuno di fidato ci dice, *prima o dopo il lancio (ma comunque prima di conoscerne l'esito!)*, che il dado è stato truccato in modo da far uscire sempre una faccia dispari, tale informazione ci induce a modificare la nostra precedente valutazione e ad attribuire ad A, sulla base dell'informazione ricevuta "esce un numero dispari", probabilità pari a $1/3$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Consideriamo il seguente semplice esempio. Supponiamo di lanciare un dado non truccato e scommettiamo sull'evento A "esce la faccia tre". Prima del lancio, in assenza di ulteriori informazioni, la probabilità dell'evento è $P(A) = 1/6$ e tale rimane anche a lancio effettuato, fino a quando non avremo avuto la possibilità di conoscere in qualche modo l'esito del lancio. Se però qualcuno di fidato ci dice, *prima o dopo il lancio (ma comunque prima di conoscerne l'esito!)*, che il dado è stato truccato in modo da far uscire sempre una faccia dispari, tale informazione ci induce a modificare la nostra precedente valutazione e ad attribuire ad A, sulla base dell'informazione ricevuta "esce un numero dispari", probabilità pari a $1/3$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Per formalizzare questa situazione, si introduce la seguente:

Definizione (Probabilità condizionata)

Dati due eventi $A, B \subseteq \Omega$, con $P(B) \neq 0$, si dice probabilità condizionata (o condizionale) di A dato B, e si indica con $P(A|B)$, e si legge «P di A dato B», il numero

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Indipendenza e probabilità condizionata

Per formalizzare questa situazione, si introduce la seguente:

Definizione (Probabilità condizionata)

Dati due eventi $A, B \subseteq \Omega$, con $P(B) \neq 0$, si dice probabilità condizionata (o condizionale) di A dato B, e si indica con $P(A|B)$, e si legge «P di A dato B», il numero

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Indipendenza e probabilità condizionata

Con riferimento al precedente esempio del dado truccato, dovremmo ragionare come segue: in Ω, che in assenza di informazioni consta dei sei esiti possibili del lancio del dado, l'informazione B ci dice che in realtà gli esiti possibili sono solo tre, per cui $P(B) = 3/6$. Quanto agli esiti favorevoli dobbiamo considerare solo quelli che soddisfano ad entrambe le condizioni A e B: nel caso specifico vi è un solo caso favorevole per cui $P(A \cap B) = 1/6$. In definitiva $P(A|B) = \dfrac{1/6}{3/6} = 1/3$, in perfetto accordo con la conclusione alla quale eravamo giunti precedentemente con un ragionamento meno formalizzato.

Indipendenza e probabilità condizionata

Con riferimento al precedente esempio del dado truccato, dovremmo ragionare come segue: in Ω, che in assenza di informazioni consta dei sei esiti possibili del lancio del dado, l'informazione B ci dice che in realtà gli esiti possibili sono solo tre, per cui $P(B) = 3/6$. Quanto agli esiti favorevoli dobbiamo considerare solo quelli che soddisfano ad entrambe le condizioni A e B: nel caso specifico vi è un solo caso favorevole per cui $P(A \cap B) = 1/6$. In definitiva $P(A|B) = \dfrac{1/6}{3/6} = 1/3$, in perfetto accordo con la conclusione alla quale eravamo giunti precedentemente con un ragionamento meno formalizzato.

Indipendenza e probabilità condizionata

Con riferimento al precedente esempio del dado truccato, dovremmo ragionare come segue: in Ω, che in assenza di informazioni consta dei sei esiti possibili del lancio del dado, l'informazione B ci dice che in realtà gli esiti possibili sono solo tre, per cui $P(B) = 3/6$. Quanto agli esiti favorevoli dobbiamo considerare solo quelli che soddisfano ad entrambe le condizioni A e B: nel caso specifico vi è un solo caso favorevole per cui $P(A \cap B) = 1/6$. In definitiva $P(A|B) = \dfrac{1/6}{3/6} = 1/3$, in perfetto accordo con la conclusione alla quale eravamo giunti precedentemente con un ragionamento meno formalizzato.

Indipendenza e probabilità condizionata

In molti testi scolastici la nozione di *probabilità condizionata* viene presentata come sopra, seguita da un commento del tipo: Intuitivamente la probabilità condizionata è la probabilità che si verifichi l'evento A qualora si sappia che l'evento B si è verificato (o debba verificarsi). In realtà da un punto di vista matematico le cose non stanno esattamente così.

Indipendenza e probabilità condizionata

In molti testi scolastici la nozione di *probabilità condizionata* viene presentata come sopra, seguita da un commento del tipo: Intuitivamente la probabilità condizionata è la probabilità che si verifichi l'evento A qualora si sappia che l'evento B si è verificato (o debba verificarsi). In realtà da un punto di vista matematico le cose non stanno esattamente così.

Indipendenza e probabilità condizionata

In molti testi scolastici la nozione di *probabilità condizionata* viene presentata come sopra, seguita da un commento del tipo: Intuitivamente la probabilità condizionata è la probabilità che si verifichi l'evento A qualora si sappia che l'evento B si è verificato (o debba verificarsi). In realtà da un punto di vista matematico le cose non stanno esattamente così.

Indipendenza e probabilità condizionata

Proviamo a ragionare in termini di probabilità assiomatica. In tale impostazione si considerano come "eventi" solo i sottoinsiemi dello spazio probabilizzato Ω, dunque non ha senso leggere la scrittura $P(A|B)$ come la probabilità dell'evento $A|B$ (in quanto $A|B$ non è un "evento", non essendo un sottoinsieme di Ω). La formula va vista allora come una definizione del numero $P(A|B)$ espresso sotto forma di quoziente di altri due numeri i quali sono le probabilità dei due eventi $A \cap B$ e B.

Indipendenza e probabilità condizionata

Proviamo a ragionare in termini di probabilità assiomatica. In tale impostazione si considerano come "eventi" solo i sottoinsiemi dello spazio probabilizzato Ω, dunque non ha senso leggere la scrittura $P(A|B)$ come la probabilità dell'evento $A|B$ (in quanto $A|B$ non è un "evento", non essendo un sottoinsieme di Ω). La formula va vista allora come una definizione del numero $P(A|B)$ espresso sotto forma di quoziente di altri due numeri i quali sono le probabilità dei due eventi $A \cap B$ e B.

Indipendenza e probabilità condizionata

Proviamo a ragionare in termini di probabilità assiomatica. In tale impostazione si considerano come "eventi" solo i sottoinsiemi dello spazio probabilizzato Ω, dunque non ha senso leggere la scrittura $P(A|B)$ come la probabilità dell'evento $A|B$ (in quanto $A|B$ non è un "evento", non essendo un sottoinsieme di Ω). La formula va vista allora come una definizione del numero $P(A|B)$ espresso sotto forma di quoziente di altri due numeri i quali sono le probabilità dei due eventi $A \cap B$ e B.

Indipendenza e probabilità condizionata

Dunque quello che cambia non è un evento, bensì la sua probabilità. Nel valutarla dobbiamo tener conto della "possibilità" che si verifichi l'evento B e dunque adottare una probabilità condizionata. I matematici direbbero che *ceteris paribus* cambia solo "la misura di probabilità". Dunque in questo contesto il riferimento alla probabilità di un evento qualora si sappia che un altro evento si è verificato (o deve verificarsi) va quindi inteso semplicemente come un utile aiuto per la nostra intuizione, alla stessa stregua delle pseudo-definizioni euclidee di punto e retta nel contesto di un'impostazione assiomatica rigorosa della geometria.

Indipendenza e probabilità condizionata

Dunque quello che cambia non è un evento, bensì la sua probabilità. Nel valutarla dobbiamo tener conto della "possibilità" che si verifichi l'evento B e dunque adottare una probabilità condizionata. I matematici direbbero che *ceteris paribus* cambia solo "la misura di probabilità". Dunque in questo contesto il riferimento alla probabilità di un evento qualora si sappia che un altro evento si è verificato (o deve verificarsi) va quindi inteso semplicemente come un utile aiuto per la nostra intuizione, alla stessa stregua delle pseudo-definizioni euclidee di punto e retta nel contesto di un'impostazione assiomatica rigorosa della geometria.

Indipendenza e probabilità condizionata

Dunque quello che cambia non è un evento, bensì la sua probabilità. Nel valutarla dobbiamo tener conto della "possibilità" che si verifichi l'evento B e dunque adottare una probabilità condizionata. I matematici direbbero che *ceteris paribus* cambia solo "la misura di probabilità". Dunque in questo contesto il riferimento alla probabilità di un evento qualora si sappia che un altro evento si è verificato (o deve verificarsi) va quindi inteso semplicemente come un utile aiuto per la nostra intuizione, alla stessa stregua delle pseudo-definizioni euclidee di punto e retta nel contesto di un'impostazione assiomatica rigorosa della geometria.

Indipendenza e probabilità condizionata

Dunque quello che cambia non è un evento, bensì la sua probabilità. Nel valutarla dobbiamo tener conto della "possibilità" che si verifichi l'evento B e dunque adottare una probabilità condizionata. I matematici direbbero che *ceteris paribus* cambia solo "la misura di probabilità". Dunque in questo contesto il riferimento alla probabilità di un evento qualora si sappia che un altro evento si è verificato (o deve verificarsi) va quindi inteso semplicemente come un utile aiuto per la nostra intuizione, alla stessa stregua delle pseudo-definizioni euclidee di punto e retta nel contesto di un'impostazione assiomatica rigorosa della geometria.

Indipendenza e probabilità condizionata

Dunque quello che cambia non è un evento, bensì la sua probabilità. Nel valutarla dobbiamo tener conto della "possibilità" che si verifichi l'evento B e dunque adottare una probabilità condizionata. I matematici direbbero che *ceteris paribus* cambia solo "la misura di probabilità". Dunque in questo contesto il riferimento alla probabilità di un evento qualora si sappia che un altro evento si è verificato (o deve verificarsi) va quindi inteso semplicemente come un utile aiuto per la nostra intuizione, alla stessa stregua delle pseudo-definizioni euclidee di punto e retta nel contesto di un'impostazione assiomatica rigorosa della geometria.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ogni definizione è una condizione necessaria e sufficiente. Dunque se nello svolgimento di una prova riteniamo che due eventi siano indipendenti possiamo usare la relativa formula. Viceversa se vale la formula i due eventi sono indipendenti.

Esempio "strano"

Lanciamo un dado. Detto A="esce un numero pari" e B="esce il numero 1 o il numero 2", i due eventi sono indipendenti. Difatti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ogni definizione è una condizione necessaria e sufficiente. Dunque se nello svolgimento di una prova riteniamo che due eventi siano indipendenti possiamo usare la relativa formula. Viceversa se vale la formula i due eventi sono indipendenti.

Esempio "strano"

Lanciamo un dado. Detto A="esce un numero pari" e B="esce il numero 1 o il numero 2", i due eventi sono indipendenti. Difatti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ogni definizione è una condizione necessaria e sufficiente. Dunque se nello svolgimento di una prova riteniamo che due eventi siano indipendenti possiamo usare la relativa formula. Viceversa se vale la formula i due eventi sono indipendenti.

Esempio "strano"

Lanciamo un dado. Detto A="esce un numero pari" e B="esce il numero 1 o il numero 2", i due eventi sono indipendenti. Difatti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ogni definizione è una condizione necessaria e sufficiente. Dunque se nello svolgimento di una prova riteniamo che due eventi siano indipendenti possiamo usare la relativa formula. Viceversa se vale la formula i due eventi sono indipendenti.

Esempio "strano"

Lanciamo un dado. Detto A="esce un numero pari" e B="esce il numero 1 o il numero 2", i due eventi sono indipendenti. Difatti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ogni definizione è una condizione necessaria e sufficiente. Dunque se nello svolgimento di una prova riteniamo che due eventi siano indipendenti possiamo usare la relativa formula. Viceversa se vale la formula i due eventi sono indipendenti.

Esempio "strano"

Lanciamo un dado. Detto A="esce un numero pari" e B="esce il numero 1 o il numero 2", i due eventi sono indipendenti. Difatti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Esempio "realistico"

Nel 1985, nel gioco del lotto, il numero 34 non usciva sulla ruota di Napoli da 147 settimane. La sua probabilità di uscita alla settimana successiva sarebbe stata uguale o maggiore rispetto agli altri numeri?

Il meccanismo dell'estrazione ci dice che la probabilità di uscita è uguale a quella iniziale (si parla a tale proposito di "assenza di memoria"); la nostra aspettativa che il numero prima o poi debba uscire ci dice che è maggiore. Come stanno realmente le cose?

Indipendenza e probabilità condizionata

Esempio "realistico"

Nel 1985, nel gioco del lotto, il numero 34 non usciva sulla ruota di Napoli da 147 settimane. La sua probabilità di uscita alla settimana successiva sarebbe stata uguale o maggiore rispetto agli altri numeri?

Il meccanismo dell'estrazione ci dice che la probabilità di uscita è uguale a quella iniziale (si parla a tale proposito di "assenza di memoria"); la nostra aspettativa che il numero prima o poi debba uscire ci dice che è maggiore. Come stanno realmente le cose?

Indipendenza e probabilità condizionata

Esempio "realistico"

Nel 1985, nel gioco del lotto, il numero 34 non usciva sulla ruota di Napoli da 147 settimane. La sua probabilità di uscita alla settimana successiva sarebbe stata uguale o maggiore rispetto agli altri numeri?

Il meccanismo dell'estrazione ci dice che la probabilità di uscita è uguale a quella iniziale (si parla a tale proposito di "assenza di memoria"); la nostra aspettativa che il numero prima o poi debba uscire ci dice che è maggiore. Come stanno realmente le cose?

Indipendenza e probabilità condizionata

Esempio "realistico"

Nel 1985, nel gioco del lotto, il numero 34 non usciva sulla ruota di Napoli da 147 settimane. La sua probabilità di uscita alla settimana successiva sarebbe stata uguale o maggiore rispetto agli altri numeri?

Il meccanismo dell'estrazione ci dice che la probabilità di uscita è uguale a quella iniziale (si parla a tale proposito di "assenza di memoria"); la nostra aspettativa che il numero prima o poi debba uscire ci dice che è maggiore. Come stanno realmente le cose?

Indipendenza e probabilità condizionata

Esempio "realistico"

Nel 1985, nel gioco del lotto, il numero 34 non usciva sulla ruota di Napoli da 147 settimane. La sua probabilità di uscita alla settimana successiva sarebbe stata uguale o maggiore rispetto agli altri numeri?

Il meccanismo dell'estrazione ci dice che la probabilità di uscita è uguale a quella iniziale (si parla a tale proposito di "assenza di memoria"); la nostra aspettativa che il numero prima o poi debba uscire ci dice che è maggiore. Come stanno realmente le cose?

Indipendenza e probabilità condizionata

Esempio "realistico"

Nel 1985, nel gioco del lotto, il numero 34 non usciva sulla ruota di Napoli da 147 settimane. La sua probabilità di uscita alla settimana successiva sarebbe stata uguale o maggiore rispetto agli altri numeri?

Il meccanismo dell'estrazione ci dice che la probabilità di uscita è uguale a quella iniziale (si parla a tale proposito di "assenza di memoria"); la nostra aspettativa che il numero prima o poi debba uscire ci dice che è maggiore. Come stanno realmente le cose?

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui

$P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui

$P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio.
Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio?
Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui

$P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui

$P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio?

Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui

$P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa $0{,}000\,21$; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui $P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui $P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui $P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui $P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Se calcoliamo la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane, questa è: circa 0,000 21; questo se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà del campionato di calcio una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? Procediamo matematicamente: Siano E_n="il numero 34 esce alla n-esima settimana", B_n="il numero 34 non esce per n settimane".

Si ha che $P(E_n) = p = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$ e $P(E^c) = q = 17/18$. Da cui $P(B_n) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdots P(E_n^c) = q^n$, e perciò $P(B_{148}) = (17/18)^{148} \simeq 0{,}000\,21$.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:

$P(B_n|B_{n-1}) = \dfrac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \dfrac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \dfrac{q^n}{q^{n-1}} = q$, ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:

$P(B_n|B_{n-1}) = \dfrac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \dfrac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \dfrac{q^n}{q^{n-1}} = q$, ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:
$P(B_n|B_{n-1}) = \dfrac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \dfrac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \dfrac{q^n}{q^{n-1}} = q$, ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:
$P(B_n|B_{n-1}) = \frac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = q$, ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:

$$P(B_n|B_{n-1}) = \frac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = q,$$

ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:
$P(B_n|B_{n-1}) = \dfrac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \dfrac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \dfrac{q^n}{q^{n-1}} = q$, ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata

Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di $n-1$ settimane, ovvero $P(B_n|B_{n-1})$, che è data da:
$P(B_n|B_{n-1}) = \frac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = q$, ovvero la stessa probabilità iniziale! Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato B_{n-1}? Non si era parlato di assenza di memoria? Quello che cambia non è B_n ma come si calcola la sua probabilità. Nel valutare tale probabilità non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Partendo dalla formula $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e moltiplicando per $P(B)$ ambo i membri della formula si perviene ad una nuova uguaglianza, detta (come già anticipato in precedenza) formula delle probabilità composte: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.
Osserviamo che tale formula (al contrario della precedente) vale anche se $P(B) = 0$.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Partendo dalla formula $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e moltiplicando per $P(B)$ ambo i membri della formula si perviene ad una nuova uguaglianza, detta (come già anticipato in precedenza) formula delle probabilità composte: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$. Osserviamo che tale formula (al contrario della precedente) vale anche se $P(B) = 0$.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Partendo dalla formula $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e moltiplicando per $P(B)$ ambo i membri della formula si perviene ad una nuova uguaglianza, detta (come già anticipato in precedenza) formula delle probabilità composte: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

Osserviamo che tale formula (al contrario della precedente) vale anche se $P(B) = 0$.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Partendo dalla formula $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e moltiplicando per $P(B)$ ambo i membri della formula si perviene ad una nuova uguaglianza, detta (come già anticipato in precedenza) formula delle probabilità composte: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.
Osserviamo che tale formula (al contrario della precedente) vale anche se $P(B) = 0$.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

A partire dalla formula precedente (delle probabilità composte) si dimostra, per induzione, il seguente risultato, utile per calcolare la probabilità dell'intersezione di un numero finito di eventi, detto regola della moltiplicazione delle probabilità:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots P\left(E_n \Big| \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right).$$

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

A partire dalla formula precedente (delle probabilità composte) si dimostra, per induzione, il seguente risultato, utile per calcolare la probabilità dell'intersezione di un numero finito di eventi, detto regola della moltiplicazione delle probabilità:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_3|E_1\cap E_2)\cdots P\left(E_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right).$$

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Come è ben noto l'intersezione tra due insiemi A e B gode della proprietà commutativa. Ciò consente di scrivere la seguente catena di uguaglianze:
$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$.
Tralasciando i due passaggi intermedi, si ottiene la formula di Bayes (da Thomas Bayes, 1702-1761):

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Come è ben noto l'intersezione tra due insiemi A e B gode della proprietà commutativa. Ciò consente di scrivere la seguente catena di uguaglianze:
$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$.
Tralasciando i due passaggi intermedi, si ottiene la formula di Bayes (da Thomas Bayes, 1702-1761):

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Come è ben noto l'intersezione tra due insiemi A e B gode della proprietà commutativa. Ciò consente di scrivere la seguente catena di uguaglianze:
$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$.
Tralasciando i due passaggi intermedi, si ottiene la formula di Bayes (da Thomas Bayes, 1702-1761):

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

La nozione di probabilità condizionata consente di riformulare la definizione iniziale di indipendenza come segue:

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A e B si dicono stocasticamente indipendenti se $P(A) = P(A|B)$ e se simmetricamente $P(B) = P(B|A)$.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

La nozione di probabilità condizionata consente di riformulare la definizione iniziale di indipendenza come segue:

Definizione (Indipendenza stocastica)

Due eventi A e B si dicono stocasticamente indipendenti se $P(A) = P(A|B)$ e se simmetricamente $P(B) = P(B|A)$.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Se gli eventi A e B sono indipendenti secondo la definizione ora data, ovvero se $P(A) = P(A|B)$ e se $P(B) = P(B|A)$, possiamo operare una sostituzione nella formula delle probabilità composte $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, ottenendo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Poiché tutti i passaggi sono invertibili, ciò prova l'equivalenza tra le definizioni di indipendenza date.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Se gli eventi A e B sono indipendenti secondo la definizione ora data, ovvero se $P(A) = P(A|B)$ e se $P(B) = P(B|A)$, possiamo operare una sostituzione nella formula delle probabilità composte $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, ottenendo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Poiché tutti i passaggi sono invertibili, ciò prova l'equivalenza tra le definizioni di indipendenza date.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Se gli eventi A e B sono indipendenti secondo la definizione ora data, ovvero se $P(A) = P(A|B)$ e se $P(B) = P(B|A)$, possiamo operare una sostituzione nella formula delle probabilità composte $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, ottenendo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Poiché tutti i passaggi sono invertibili, ciò prova l'equivalenza tra le definizioni di indipendenza date.

Indipendenza e probabilità condizionata: conseguenze

Se gli eventi A e B sono indipendenti secondo la definizione ora data, ovvero se $P(A) = P(A|B)$ e se $P(B) = P(B|A)$, possiamo operare una sostituzione nella formula delle probabilità composte $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, ottenendo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Poiché tutti i passaggi sono invertibili, ciò prova l'equivalenza tra le definizioni di indipendenza date.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire 1/2 . . . ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è 1/3. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe 1/2.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire 1/2 . . . ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è 1/3. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe 1/2.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire $1/2$ ... ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è $1/3$. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe $1/2$.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire 1/2 . . . ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è 1/3. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe 1/2.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire 1/2 ... ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è 1/3. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe 1/2.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire $1/2$ ... ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è $1/3$. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe $1/2$.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire $1/2$ ... ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è $1/3$. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe $1/2$.

Paradosso del secondo figlio

Il signor Bianchi dice: «Io ho due figli e *almeno uno* di essi è maschio.» Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio? Si sarebbe tentati di dire $1/2$ ... ma in realtà dobbiamo calcolare una probabilità condizionata: l'informazione che almeno uno è maschio "restringe" lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) a MM, MF, FM. Gli eventi favorevoli corrispondono solo a MM, dunque avremo che la probabilità richiesta è $1/3$. E se il signor Bianchi specificasse: «Io ho due figli e il *minore* di essi è maschio.»? In tal caso lo spazio campionario (tenendo conto dell'ordine di nascita) si ridurrebbe a MM, MF e dunque la probabilità sarebbe $1/2$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Il concetto di indipendenza può essere esteso al caso di un numero qualsiasi di eventi. Nel caso di tre eventi si ha:

Definizione

Tre eventi E_1, E_2, E_3 sono indipendenti se
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$.

Sembra tutto molto naturale, ma . . . consideriamo il seguente esempio:

Ancora pericoli ... a generalizzare

Il concetto di indipendenza può essere esteso al caso di un numero qualsiasi di eventi. Nel caso di tre eventi si ha:

Definizione

Tre eventi E_1, E_2, E_3 sono indipendenti se
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$.

Sembra tutto molto naturale, ma ... consideriamo il seguente esempio:

Ancora pericoli ... a generalizzare

Il concetto di indipendenza può essere esteso al caso di un numero qualsiasi di eventi. Nel caso di tre eventi si ha:

Definizione

Tre eventi E_1, E_2, E_3 *sono indipendenti se* $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$.

Sembra tutto molto naturale, ma ... consideriamo il seguente esempio:

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità 1/8.
Consideriamo ora i seguenti eventi:
E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.
E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.
E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.
Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$
e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.

Consideriamo ora i seguenti eventi:

E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.

E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.

E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.

Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$

e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.
Consideriamo ora i seguenti eventi:
E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.
E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.
E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.
Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$
e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.

Consideriamo ora i seguenti eventi:

E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.

E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.

E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.

Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$

e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.
Consideriamo ora i seguenti eventi:
E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.
E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.
E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.
Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$
e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.
Consideriamo ora i seguenti eventi:
E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.
E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.
E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.
Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$
e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli ... a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.

Consideriamo ora i seguenti eventi:

E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.

E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.

E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.

Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$

e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli ... a generalizzare

Si lanciano in sequenza tre monete regolari. Gli 8 esiti possibili sono equiprobabili, con probabilità $1/8$.
Consideriamo ora i seguenti eventi:
E_1: "la terna presenta almeno due teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTT, TTC, TCT, CTT, e dunque $P(E_1) = 1/2$.
E_2: "la terna presenta un numero pari di teste"; quindi i casi favorevoli sono quattro: TTC, TCT, CTT, CCC, e dunque $P(E_2) = 1/2$.
E_3: "la prima moneta della terna presenta la faccia croce"; quindi i casi favorevoli sono quattro CTT, CCT, CTC, CCC, e dunque $P(E_3) = 1/2$.
Osserviamo ora che $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{ CTT \}$
e che $E_1 \cap E_2 = \{ CTT, TCT, TTC \}$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Avremo pertanto:
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1/8 = (1/2)^3 = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$,
e $P(E_1 \cap E_2) = 3/8 \neq 1/4 = P(E_1) \cdot P(E_2)$.
Abbiamo quindi scoperto un fatto piuttosto sconcertante: se utilizziamo la definizione data rischiamo di imbatterci in terne di eventi tra loro indipendenti, che però presi a due a due non sono necessariamente indipendenti.
Esistono esempi "inversi" del precedente?

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Avremo pertanto:
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1/8 = (1/2)^3 = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$,
e $P(E_1 \cap E_2) = 3/8 \neq 1/4 = P(E_1) \cdot P(E_2)$.
Abbiamo quindi scoperto un fatto piuttosto sconcertante: se utilizziamo la definizione data rischiamo di imbatterci in terne di eventi tra loro indipendenti, che però presi a due a due non sono necessariamente indipendenti.
Esistono esempi "inversi" del precedente?

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Avremo pertanto:
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1/8 = (1/2)^3 = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$,
e $P(E_1 \cap E_2) = 3/8 \neq 1/4 = P(E_1) \cdot P(E_2)$.
Abbiamo quindi scoperto un fatto piuttosto sconcertante: se utilizziamo la definizione data rischiamo di imbatterci in terne di eventi tra loro indipendenti, che però presi a due a due non sono necessariamente indipendenti.
Esistono esempi "inversi" del precedente?

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Avremo pertanto:
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1/8 = (1/2)^3 = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$,
e $P(E_1 \cap E_2) = 3/8 \neq 1/4 = P(E_1) \cdot P(E_2)$.
Abbiamo quindi scoperto un fatto piuttosto sconcertante: se utilizziamo la definizione data rischiamo di imbatterci in terne di eventi tra loro indipendenti, che però presi a due a due non sono necessariamente indipendenti.
Esistono esempi "inversi" del precedente?

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Avremo pertanto:
$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1/8 = (1/2)^3 = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$,
e $P(E_1 \cap E_2) = 3/8 \neq 1/4 = P(E_1) \cdot P(E_2)$.
Abbiamo quindi scoperto un fatto piuttosto sconcertante: se utilizziamo la definizione data rischiamo di imbatterci in terne di eventi tra loro indipendenti, che però presi a due a due non sono necessariamente indipendenti.
Esistono esempi "inversi" del precedente?

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{ 1, 4 \}$, $E_2 = \{ 2, 4 \}$ e $E_3 = \{ 3, 4 \}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{ 4 \}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{ 1, 4 \}$, $E_2 = \{ 2, 4 \}$ e $E_3 = \{ 3, 4 \}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{ 4 \}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti
ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

Consideriamo un dado regolare a forma di tetraedro.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e ogni evento elementare ha probabilità $1/4$.
Consideriamo gli eventi: $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ e $E_3 = \{3, 4\}$.
È facile verificare che gli eventi dati sono a due a due indipendenti ma $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{4\}) = 1/4 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.
Cosa c'è di sbagliato? La definizione di tre eventi indipendenti?!

Ancora pericoli . . . a generalizzare

È risaputo che una definizione, di per sé, è sempre corretta.
Dunque preferire una definizione piuttosto che un'altra dipende solo dalla sua maggiore o minore adeguatezza a caratterizzare tutti e soli gli enti matematici che godono di una determinata proprietà (escludendo quindi tutti gli altri). E infatti i matematici, consapevoli di ciò, hanno ripudiato la definizione data sostituendola con la seguente, dalla formulazione un po' più complessa ma immune da tali inconvenienti:

Definizione (Famiglia di eventi indipendenti)

n eventi $E_1, \dots, E_n$ (con $n \geqslant 2$) si dicono indipendenti se $\forall k \leqslant n$ e per ogni scelta di indici $i_1, \dots, i_k$ distinti e compresi tra 1 e n si ha $P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_k})$.

Ancora pericoli . . . a generalizzare

È risaputo che una definizione, di per sé, è sempre corretta. Dunque preferire una definizione piuttosto che un'altra dipende solo dalla sua maggiore o minore adeguatezza a caratterizzare tutti e soli gli enti matematici che godono di una determinata proprietà (escludendo quindi tutti gli altri). E infatti i matematici, consapevoli di ciò, hanno ripudiato la definizione data sostituendola con la seguente, dalla formulazione un po' più complessa ma immune da tali inconvenienti:

Definizione (Famiglia di eventi indipendenti)

n eventi $E_1, \ldots, E_n$ (con $n \geqslant 2$) si dicono indipendenti se $\forall k \leqslant n$ e per ogni scelta di indici $i_1, \ldots, i_k$ distinti e compresi tra 1 e n si ha $P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_k})$.

Ancora pericoli ... a generalizzare

È risaputo che una definizione, di per sé, è sempre corretta. Dunque preferire una definizione piuttosto che un'altra dipende solo dalla sua maggiore o minore adeguatezza a caratterizzare tutti e soli gli enti matematici che godono di una determinata proprietà (escludendo quindi tutti gli altri). E infatti i matematici, consapevoli di ciò, hanno ripudiato la definizione data sostituendola con la seguente, dalla formulazione un po' più complessa ma immune da tali inconvenienti:

Definizione (Famiglia di eventi indipendenti)

n eventi $E_1, \dots, E_n$ (con $n \geqslant 2$) si dicono indipendenti se $\forall k \leqslant n$ e per ogni scelta di indici $i_1, \dots, i_k$ distinti e compresi tra 1 e n si ha $P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_k})$.

Ancora pericoli ... a generalizzare

È risaputo che una definizione, di per sé, è sempre corretta. Dunque preferire una definizione piuttosto che un'altra dipende solo dalla sua maggiore o minore adeguatezza a caratterizzare tutti e soli gli enti matematici che godono di una determinata proprietà (escludendo quindi tutti gli altri). E infatti i matematici, consapevoli di ciò, hanno ripudiato la definizione data sostituendola con la seguente, dalla formulazione un po' più complessa ma immune da tali inconvenienti:

Definizione (Famiglia di eventi indipendenti)

n eventi $E_1, \ldots, E_n$ (con $n \geqslant 2$) si dicono indipendenti se $\forall k \leqslant n$ e per ogni scelta di indici $i_1, \ldots, i_k$ distinti e compresi tra 1 e n si ha $P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_k})$.

Eventi correlati

In talune presentazioni si trovano i seguenti concetti:

Definizione (Eventi correlati positivamente o negativamente)

Dati $A, B \subseteq \Omega$ con $P(B) \neq 0$, si dice che i due eventi sono correlati positivamente se $P(A|B) > P(A)$, correlati negativamente se $P(A|B) < P(A)$.

In pratica si vuole sottolineare che se i due eventi sono correlati positivamente, il verificarsi di B rende più probabile il verificarsi di A, mentre nel caso in cui i due eventi sono correlati negativamente, il verificarsi di B rende meno probabile il verificarsi di A.

Eventi correlati

In talune presentazioni si trovano i seguenti concetti:

Definizione (Eventi correlati positivamente o negativamente)

Dati $A, B \subseteq \Omega$ con $P(B) \neq 0$, si dice che i due eventi sono correlati positivamente se $P(A|B) > P(A)$, correlati negativamente se $P(A|B) < P(A)$.

In pratica si vuole sottolineare che se i due eventi sono correlati positivamente, il verificarsi di B rende più probabile il verificarsi di A, mentre nel caso in cui i due eventi sono correlati negativamente, il verificarsi di B rende meno probabile il verificarsi di A.

Eventi correlati

In talune presentazioni si trovano i seguenti concetti:

Definizione (Eventi correlati positivamente o negativamente)

Dati $A, B \subseteq \Omega$ con $P(B) \neq 0$, si dice che i due eventi sono correlati positivamente se $P(A|B) > P(A)$, correlati negativamente se $P(A|B) < P(A)$.

In pratica si vuole sottolineare che se i due eventi sono correlati positivamente, il verificarsi di B rende più probabile il verificarsi di A, mentre nel caso in cui i due eventi sono correlati negativamente, il verificarsi di B rende meno probabile il verificarsi di A.

Eventi correlati

In talune presentazioni si trovano i seguenti concetti:

Definizione (Eventi correlati positivamente o negativamente)

Dati $A, B \subseteq \Omega$ con $P(B) \neq 0$, si dice che i due eventi sono correlati positivamente se $P(A|B) > P(A)$, correlati negativamente se $P(A|B) < P(A)$.

In pratica si vuole sottolineare che se i due eventi sono correlati positivamente, il verificarsi di B rende più probabile il verificarsi di A, mentre nel caso in cui i due eventi sono correlati negativamente, il verificarsi di B rende meno probabile il verificarsi di A.

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La dipendenza stocastica di due eventi non significa che sussista una rapporto di causa-effetto! Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna :[C. Rossi, La matematica dell'incertezza]

- aumento delle nidificazioni di cicogne (A="almeno un nuovo nido sul tetto di una casa fissata")
- aumento delle nascite (B="almeno un nuovo nato in una casa fissata")

Ebbene si verificò che $P(B|A) > P(B)$. Si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!

Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!

Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!

Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!

Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!
Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!
Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

Certamente NO! Esiste invece una causa comune che influisce positivamente su entrambi gli eventi: la fine della guerra e dei bombardamenti! La probabilità condizionata si presta anche a distorsioni di interpretazione!
Consideriamo la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti: spesso su televisioni pubbliche o private si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere se fumava spinelli (droghe leggere) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa e questo fatto viene usato come leva emotiva per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze. Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per es. spinelli) è causa di un fenomeno B (per es. tossicodipendenza), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La risposta è ancora NO! Se si chiedesse infatti ai tossicodipendenti se attraversano le strisce pedonali solo quando il semaforo è verde (fatto A), la risposta sarebbe quasi sempre affermativa, ma ciò non consente di concludere che attraversare col verde porta alla tossicodipendenza (fatto B). Va completamente rovesciato il modo di ragionare: occorre esaminare tutte le volte che si osserva il fatto A, quante volte esso è seguito dal verificarsi di B. In termini più tecnici occorre valutare la probabilità $P(B|A)$ e non viceversa! [C. Rossi, Ragionamento induttivo-ragionamento deduttivo. Problemi e implicazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica]

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La risposta è ancora NO! Se si chiedesse infatti ai tossicodipendenti se attraversano le strisce pedonali solo quando il semaforo è verde (fatto A), la risposta sarebbe quasi sempre affermativa, ma ciò non consente di concludere che attraversare col verde porta alla tossicodipendenza (fatto B). Va completamente rovesciato il modo di ragionare: occorre esaminare tutte le volte che si osserva il fatto A, quante volte esso è seguito dal verificarsi di B. In termini più tecnici occorre valutare la probabilità $P(B|A)$ e non viceversa! [C. Rossi, Ragionamento induttivo-ragionamento deduttivo. Problemi e implicazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica]

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La risposta è ancora NO! Se si chiedesse infatti ai tossicodipendenti se attraversano le strisce pedonali solo quando il semaforo è verde (fatto A), la risposta sarebbe quasi sempre affermativa, ma ciò non consente di concludere che attraversare col verde porta alla tossicodipendenza (fatto B). Va completamente rovesciato il modo di ragionare: occorre esaminare tutte le volte che si osserva il fatto A, quante volte esso è seguito dal verificarsi di B. In termini più tecnici occorre valutare la probabilità $P(B|A)$ e non viceversa! [C. Rossi, Ragionamento induttivo-ragionamento deduttivo. Problemi e implicazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica]

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La risposta è ancora NO! Se si chiedesse infatti ai tossicodipendenti se attraversano le strisce pedonali solo quando il semaforo è verde (fatto A), la risposta sarebbe quasi sempre affermativa, ma ciò non consente di concludere che attraversare col verde porta alla tossicodipendenza (fatto B). Va completamente rovesciato il modo di ragionare: occorre esaminare tutte le volte che si osserva il fatto A, quante volte esso è seguito dal verificarsi di B. In termini più tecnici occorre valutare la probabilità $P(B|A)$ e non viceversa! [C. Rossi, Ragionamento induttivo-ragionamento deduttivo. Problemi e implicazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica]

Usi "impropri" della probabilità condizionata

La risposta è ancora NO! Se si chiedesse infatti ai tossicodipendenti se attraversano le strisce pedonali solo quando il semaforo è verde (fatto A), la risposta sarebbe quasi sempre affermativa, ma ciò non consente di concludere che attraversare col verde porta alla tossicodipendenza (fatto B). Va completamente rovesciato il modo di ragionare: occorre esaminare tutte le volte che si osserva il fatto A, quante volte esso è seguito dal verificarsi di B. In termini più tecnici occorre valutare la probabilità $P(B|A)$ e non viceversa! [C. Rossi, Ragionamento induttivo-ragionamento deduttivo. Problemi e implicazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica]

Esempi scolastici

Esercizio

Un'urna contiene 12 palline indistinguibili al tatto. Di queste, 5 sono bianche e 7 sono nere. Si calcoli la probabilità che, estraendo successivamente due palline (senza reimmettere la prima pallina estratta nell'urna):

(a) Entrambe siano bianche.

(b) Entrambe siano nere.

(c) Una sia bianca e l'altra sia nera.

Esempi scolastici

Esercizio

Un'urna contiene 12 palline indistinguibili al tatto. Di queste, 5 sono bianche e 7 sono nere. Si calcoli la probabilità che, estraendo successivamente due palline (senza reimmettere la prima pallina estratta nell'urna):

(a) Entrambe siano bianche.

(b) Entrambe siano nere.

(c) Una sia bianca e l'altra sia nera.

Esempi scolastici

Esercizio

Un'urna contiene 12 palline indistinguibili al tatto. Di queste, 5 sono bianche e 7 sono nere. Si calcoli la probabilità che, estraendo successivamente due palline (senza reimmettere la prima pallina estratta nell'urna):

(a) Entrambe siano bianche.

(b) Entrambe siano nere.

(c) Una sia bianca e l'altra sia nera.

Esempi scolastici

Esercizio

Un'urna contiene 12 palline indistinguibili al tatto. Di queste, 5 sono bianche e 7 sono nere. Si calcoli la probabilità che, estraendo successivamente due palline (senza reimmettere la prima pallina estratta nell'urna):

(a) Entrambe siano bianche.
(b) Entrambe siano nere.
(c) Una sia bianca e l'altra sia nera.

Esempi scolastici

Denotato con B_i l'evento "si estrae una pallina bianca alla i-esima estrazione" , e con N_i l'evento "si estrae una pallina nera alla i-esima estrazione", facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha $P(B_1) = 5/12$ e $P(N_1) = 7/12$. Ovviamente la prima estrazione condiziona la seconda, per cui:

(a) si tratta di calcolare $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = 5/12 \cdot 4/11 = 20/132$;

(b) si tratta di calcolare $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = 7/12 \cdot 6/11 = 42/132$;

Esempi scolastici

Denotato con B_i l'evento "si estrae una pallina bianca alla i-esima estrazione" , e con N_i l'evento "si estrae una pallina nera alla i-esima estrazione", facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha $P(B_1) = 5/12$ e $P(N_1) = 7/12$. Ovviamente la prima estrazione condiziona la seconda, per cui:

(a) si tratta di calcolare $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = 5/12 \cdot 4/11 = 20/132$;

(b) si tratta di calcolare $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = 7/12 \cdot 6/11 = 42/132$;

(c) si tratta di calcolare $P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2))$. Essendo gli eventi $B_1 \cap N_2$ e $N_1 \cap B_2$ disgiunti, tale probabilità è pari a $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(N_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = 7/12 \cdot 5/11 + 5/12 \cdot 7/11 = 70/132$.

Esempi scolastici

Denotato con B_i l'evento "si estrae una pallina bianca alla i-esima estrazione" , e con N_i l'evento "si estrae una pallina nera alla i-esima estrazione", facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha $P(B_1) = 5/12$ e $P(N_1) = 7/12$. Ovviamente la prima estrazione condiziona la seconda, per cui:

(a) si tratta di calcolare $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = 5/12 \cdot 4/11 = 20/132$;

(b) si tratta di calcolare $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = 7/12 \cdot 6/11 = 42/132$;

(c) si tratta di calcolare $P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2))$. Essendo gli eventi $B_1 \cap N_2$ e $N_1 \cap B_2$ disgiunti, tale probabilità è pari a $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(N_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = 7/12 \cdot 5/11 + 5/12 \cdot 7/11 = 70/132$.

Esempi scolastici

Denotato con B_i l'evento "si estrae una pallina bianca alla i-esima estrazione" , e con N_i l'evento "si estrae una pallina nera alla i-esima estrazione", facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha $P(B_1) = 5/12$ e $P(N_1) = 7/12$. Ovviamente la prima estrazione condiziona la seconda, per cui:

(a) si tratta di calcolare $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = 5/12 \cdot 4/11 = 20/132$;

(b) si tratta di calcolare $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = 7/12 \cdot 6/11 = 42/132$;

(c) si tratta di calcolare $P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2))$. Essendo gli eventi $B_1 \cap N_2$ e $N_1 \cap B_2$ disgiunti, tale probabilità è pari a $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(N_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = 7/12 \cdot 5/11 + 5/12 \cdot 7/11 = 70/132$.

Esempio classico più elaborato

Qual è la probabilità $P(n)$ che in una classe di n allievi ($n \leqslant 365$) almeno due festeggino il loro compleanno in uno stesso giorno? La matematizzazione del problema richiede una certa fatica: supponiamo che tutti gli anni siano di 365 giorni, ossia escludiamo la presenza del 29 febbraio negli anni bisestili, che le date di nascita siano indipendenti.

Supponiamo infine che le date di nascita siano equidistribuite nell'arco di tutti i 365 giorni.

Esempio classico più elaborato

Qual è la probabilità $P(n)$ che in una classe di n allievi ($n \leqslant 365$) almeno due festeggino il loro compleanno in uno stesso giorno? La matematizzazione del problema richiede una certa fatica:
supponiamo che tutti gli anni siano di 365 giorni, ossia escludiamo la presenza del 29 febbraio negli anni bisestili, che le date di nascita siano indipendenti.
Supponiamo infine che le date di nascita siano equidistribuite nell'arco di tutti i 365 giorni.

Esempio classico più elaborato

Qual è la probabilità $P(n)$ che in una classe di n allievi ($n \leqslant 365$) almeno due festeggino il loro compleanno in uno stesso giorno? La matematizzazione del problema richiede una certa fatica: supponiamo che tutti gli anni siano di 365 giorni, ossia escludiamo la presenza del 29 febbraio negli anni bisestili, che le date di nascita siano indipendenti.

Supponiamo infine che le date di nascita siano equidistribuite nell'arco di tutti i 365 giorni.

Esempio classico più elaborato

Qual è la probabilità $P(n)$ che in una classe di n allievi ($n \leqslant 365$) almeno due festeggino il loro compleanno in uno stesso giorno? La matematizzazione del problema richiede una certa fatica: supponiamo che tutti gli anni siano di 365 giorni, ossia escludiamo la presenza del 29 febbraio negli anni bisestili, che le date di nascita siano indipendenti.

Supponiamo infine che le date di nascita siano equidistribuite nell'arco di tutti i 365 giorni.

Esempio classico più elaborato

Qual è la probabilità $P(n)$ che in una classe di n allievi ($n \leqslant 365$) almeno due festeggino il loro compleanno in uno stesso giorno? La matematizzazione del problema richiede una certa fatica: supponiamo che tutti gli anni siano di 365 giorni, ossia escludiamo la presenza del 29 febbraio negli anni bisestili, che le date di nascita siano indipendenti.
Supponiamo infine che le date di nascita siano equidistribuite nell'arco di tutti i 365 giorni.

Un esempio classico più elaborato

Osserviamo poi che la probabilità cercata $P(n)$ può essere riscritta nella forma $P(n) = 1 - P(E_n)$ dove E_n sta ad indicare l'evento: E_n = "Tutti i compleanni cadono in giorni differenti".

Orbene, l'evento E_n può essere riscritto nella forma $E_n = \{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \}$, dove A_i sta a denotare l'evento A_i = "il giorno del compleanno dell' i-esimo studente è diverso dai giorni di compleanno di tutti gli studenti che lo precedono nella numerazione".

Tenendo conto dell'indipendenza degli eventi considerati, si ha:
$P(E_n) = 365/365 \times 364/365 \times \cdots \times (365 - n + 1)/365 = \dfrac{365!}{365^n (365-n)!}$.

$P(10) \simeq 0,12$; $P(20) \simeq 0,41$; $P(30) \simeq 0,71$; $P(40) \simeq 0,90$; $P(50) \simeq 0,97$.

Un esempio classico più elaborato

Osserviamo poi che la probabilità cercata $P(n)$ può essere riscritta nella forma $P(n) = 1 - P(E_n)$ dove E_n sta ad indicare l'evento: E_n = "Tutti i compleanni cadono in giorni differenti".

Orbene, l'evento E_n può essere riscritto nella forma $E_n = \{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \}$, dove A_i sta a denotare l'evento A_i = "il giorno del compleanno dell' i-esimo studente è diverso dai giorni di compleanno di tutti gli studenti che lo precedono nella numerazione".

Tenendo conto dell'indipendenza degli eventi considerati, si ha:

$P(E_n) = 365/365 \times 364/365 \times \cdots \times (365 - n + 1)/365 = \frac{365!}{365^n (365-n)!}$.

$P(10) \simeq 0,12$; $P(20) \simeq 0,41$; $P(30) \simeq 0,71$; $P(40) \simeq 0,90$; $P(50) \simeq 0,97$.

Un esempio classico più elaborato

Osserviamo poi che la probabilità cercata $P(n)$ può essere riscritta nella forma $P(n) = 1 - P(E_n)$ dove E_n sta ad indicare l'evento: E_n = "Tutti i compleanni cadono in giorni differenti".

Orbene, l'evento E_n può essere riscritto nella forma $E_n = \{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \}$, dove A_i sta a denotare l'evento A_i = "il giorno del compleanno dell' i-esimo studente è diverso dai giorni di compleanno di tutti gli studenti che lo precedono nella numerazione".

Tenendo conto dell'indipendenza degli eventi considerati, si ha:

$P(E_n) = 365/365 \times 364/365 \times \cdots \times (365 - n + 1)/365 = \dfrac{365!}{365^n(365-n)!}$.

$P(10) \simeq 0,12$; $P(20) \simeq 0,41$; $P(30) \simeq 0,71$; $P(40) \simeq 0,90$; $P(50) \simeq 0,97$.

Un esempio classico più elaborato

Osserviamo poi che la probabilità cercata $P(n)$ può essere riscritta nella forma $P(n) = 1 - P(E_n)$ dove E_n sta ad indicare l'evento: E_n = "Tutti i compleanni cadono in giorni differenti".

Orbene, l'evento E_n può essere riscritto nella forma $E_n = \{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \}$, dove A_i sta a denotare l'evento A_i = "il giorno del compleanno dell' i-esimo studente è diverso dai giorni di compleanno di tutti gli studenti che lo precedono nella numerazione".

Tenendo conto dell'indipendenza degli eventi considerati, si ha:

$$P(E_n) = 365/365 \times 364/365 \times \cdots \times (365 - n + 1)/365 = \frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$

$P(10) \simeq 0,12$; $P(20) \simeq 0,41$; $P(30) \simeq 0,71$; $P(40) \simeq 0,90$; $P(50) \simeq 0,97$.

. . . e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?
Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1-\dfrac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1-\left(1-\dfrac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

. . . e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?

Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1 - \left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

. . . e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?
Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1-\frac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1-\left(1-\frac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

. . . e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?

Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1 - \left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

. . . e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?
Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1-\frac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1-\left(1-\frac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

... e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?
Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1 - \left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

...e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?

Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1-\dfrac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1-\left(1-\dfrac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

. . . e una sua variante

10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni. Uno dei partecipanti dice: «La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta.» Cosa ne pensate?
Supponendo l'indipendenza, calcoliamo prima la probabilità che nessuno dei partecipanti festeggi il compleanno durante il viaggio, questa è: $\left(1 - \dfrac{16}{365}\right)^{10}$, quindi, per il teorema della probabilità contraria, la probabilità richiesta è: $1 - \left(1 - \dfrac{16}{365}\right)^{10} \simeq 0.36$ non trascurabile ma non particolarmente alta!

Sommario

Il modello dell'urna

Sfogliando un qualunque manuale che tratti di calcolo delle probabilità, ci si accorge che si fa spesso riferimento ad una stessa schematizzazione: il modello dell'urna.

Per capire di cosa si tratti occorre fare alcune precisazioni. Il modello consiste nel pensare ad un'urna (spazio degli eventi) contenente delle palline, ciascuna delle quali corrispondente ad un elemento dello spazio degli eventi, distinguibili le une dalle altre tramite una proprietà (per esempio il colore) o un numero. Si suppone poi di effettuare delle estrazioni casuali dall'urna di una o più palline alla volta.

Il modello dell'urna

Sfogliando un qualunque manuale che tratti di calcolo delle probabilità, ci si accorge che si fa spesso riferimento ad una stessa schematizzazione: il modello dell'urna.
Per capire di cosa si tratti occorre fare alcune precisazioni. Il modello consiste nel pensare ad un'urna (spazio degli eventi) contenente delle palline, ciascuna delle quali corrispondente ad un elemento dello spazio degli eventi, distinguibili le une dalle altre tramite una proprietà (per esempio il colore) o un numero. Si suppone poi di effettuare delle estrazioni casuali dall'urna di una o più palline alla volta.

Il modello dell'urna

Sfogliando un qualunque manuale che tratti di calcolo delle probabilità, ci si accorge che si fa spesso riferimento ad una stessa schematizzazione: il modello dell'urna.
Per capire di cosa si tratti occorre fare alcune precisazioni. Il modello consiste nel pensare ad un'urna (spazio degli eventi) contenente delle palline, ciascuna delle quali corrispondente ad un elemento dello spazio degli eventi, distinguibili le une dalle altre tramite una proprietà (per esempio il colore) o un numero. Si suppone poi di effettuare delle estrazioni casuali dall'urna di una o più palline alla volta.

Il modello dell'urna

Sfogliando un qualunque manuale che tratti di calcolo delle probabilità, ci si accorge che si fa spesso riferimento ad una stessa schematizzazione: il modello dell'urna.
Per capire di cosa si tratti occorre fare alcune precisazioni. Il modello consiste nel pensare ad un'urna (spazio degli eventi) contenente delle palline, ciascuna delle quali corrispondente ad un elemento dello spazio degli eventi, distinguibili le une dalle altre tramite una proprietà (per esempio il colore) o un numero. Si suppone poi di effettuare delle estrazioni casuali dall'urna di una o più palline alla volta.

Il modello dell'urna

Per garantire il meccanismo della casualità si suppone che le palline siano indistinguibili al tatto e che l'estrazione sia fatta senza avere la possibilità di privilegiare una pallina rispetto ad un'altra (per esempio l'estrazione viene effettuata da una persona bendata o da un qualche meccanismo automatico che ne garantisca la casualità) ed inoltre le palline nell'urna vengono mescolate prima e dopo ogni estrazione.

Il modello dell'urna

Parliamo allora dal caso più semplice: si effettua una sequenza di estrazioni dall'urna di una unica pallina alla volta. Evidentemente ciò può essere realizzato in due modi:

1. estrazione con reimbussolamento (ovvero dopo ogni estrazione la pallina estratta viene reintrodotta nell'urna);
2. estrazione senza reimbussolamento (ovvero ogni pallina estratta non viene più reintrodotta nell'urna).

La differenza sostanziale tra i due casi è l'indipendenza o meno degli eventi: questo comporta una differenza sul numero di estrazioni che si possono effettuare.

Il modello dell'urna

Parliamo allora dal caso più semplice: si effettua una sequenza di estrazioni dall'urna di una unica pallina alla volta. Evidentemente ciò può essere realizzato in due modi:

1. estrazione con reimbussolamento (ovvero dopo ogni estrazione la pallina estratta viene reintrodotta nell'urna);
2. estrazione senza reimbussolamento (ovvero ogni pallina estratta non viene più reintrodotta nell'urna).

La differenza sostanziale tra i due casi è l'indipendenza o meno degli eventi: questo comporta una differenza sul numero di estrazioni che si possono effettuare.

Il modello dell'urna

Parliamo allora dal caso più semplice: si effettua una sequenza di estrazioni dall'urna di una unica pallina alla volta. Evidentemente ciò può essere realizzato in due modi:

1. estrazione con reimbussolamento (ovvero dopo ogni estrazione la pallina estratta viene reintrodotta nell'urna);
2. estrazione senza reimbussolamento (ovvero ogni pallina estratta non viene più reintrodotta nell'urna).

La differenza sostanziale tra i due casi è l'indipendenza o meno degli eventi: questo comporta una differenza sul numero di estrazioni che si possono effettuare.

Il modello dell'urna

Parliamo allora dal caso più semplice: si effettua una sequenza di estrazioni dall'urna di una unica pallina alla volta. Evidentemente ciò può essere realizzato in due modi:

1. estrazione con reimbussolamento (ovvero dopo ogni estrazione la pallina estratta viene reintrodotta nell'urna);
2. estrazione senza reimbussolamento (ovvero ogni pallina estratta non viene più reintrodotta nell'urna).

La differenza sostanziale tra i due casi è l'indipendenza o meno degli eventi: questo comporta una differenza sul numero di estrazioni che si possono effettuare.

Il modello dell'urna

Parliamo allora dal caso più semplice: si effettua una sequenza di estrazioni dall'urna di una unica pallina alla volta. Evidentemente ciò può essere realizzato in due modi:

1. estrazione con reimbussolamento (ovvero dopo ogni estrazione la pallina estratta viene reintrodotta nell'urna);
2. estrazione senza reimbussolamento (ovvero ogni pallina estratta non viene più reintrodotta nell'urna).

La differenza sostanziale tra i due casi è l'indipendenza o meno degli eventi: questo comporta una differenza sul numero di estrazioni che si possono effettuare.

Il modello dell'urna

Nel primo caso è possibile effettuare un qualsivoglia numero di estrazioni; nel secondo caso il numero massimo di estrazioni effettuabili coincide con il numero di palline presenti nell'urna.
Dunque usando l'estrazione con reimbussolamento è possibile modellizzare situazioni in cui gli esiti sono finiti o numerabili, mentre usando l'estrazione senza reimbussolamento questi ultimi sono necessariamente finiti.

Il modello dell'urna

Nel primo caso è possibile effettuare un qualsivoglia numero di estrazioni; nel secondo caso il numero massimo di estrazioni effettuabili coincide con il numero di palline presenti nell'urna. Dunque usando l'estrazione con reimbussolamento è possibile modellizzare situazioni in cui gli esiti sono finiti o numerabili, mentre usando l'estrazione senza reimbussolamento questi ultimi sono necessariamente finiti.

Il modello dell'urna

Notiamo che in ciascuno dei due modi si può tenere conto dell'ordine in cui le palline vengono estratte (per esempio annotando ad ogni estrazione il numero della pallina estratta). In tal caso l'estrazione di un numero di palline fissato, può essere pensato come una sequenza di ordinata di numeri che a seconda dei casi risulta finita o numerabile.

È possibile non tenere conto dell'ordine di estrazione?

Certamente anche questo può succedere non appena si cambi la procedura di estrazione: supponiamo di effettuare una estrazione di un numero n di palline fissato a priori, ovvero prelevando in blocco le n palline dall'urna.

Il modello dell'urna

Notiamo che in ciascuno dei due modi si può tenere conto dell'ordine in cui le palline vengono estratte (per esempio annotando ad ogni estrazione il numero della pallina estratta). In tal caso l'estrazione di un numero di palline fissato, può essere pensato come una sequenza di ordinata di numeri che a seconda dei casi risulta finita o numerabile.

È possibile non tenere conto dell'ordine di estrazione?

Certamente anche questo può succedere non appena si cambi la procedura di estrazione: supponiamo di effettuare una estrazione di un numero n di palline fissato a priori, ovvero prelevando in blocco le n palline dall'urna.

Il modello dell'urna

Notiamo che in ciascuno dei due modi si può tenere conto dell'ordine in cui le palline vengono estratte (per esempio annotando ad ogni estrazione il numero della pallina estratta). In tal caso l'estrazione di un numero di palline fissato, può essere pensato come una sequenza di ordinata di numeri che a seconda dei casi risulta finita o numerabile.

È possibile non tenere conto dell'ordine di estrazione?

Certamente anche questo può succedere non appena si cambi la procedura di estrazione: supponiamo di effettuare una estrazione di un numero n di palline fissato a priori, ovvero prelevando in blocco le n palline dall'urna.

Il modello dell'urna

Notiamo che in ciascuno dei due modi si può tenere conto dell'ordine in cui le palline vengono estratte (per esempio annotando ad ogni estrazione il numero della pallina estratta). In tal caso l'estrazione di un numero di palline fissato, può essere pensato come una sequenza di ordinata di numeri che a seconda dei casi risulta finita o numerabile.
È possibile non tenere conto dell'ordine di estrazione?
Certamente anche questo può succedere non appena si cambi la procedura di estrazione: supponiamo di effettuare una estrazione di un numero n di palline fissato a priori, ovvero prelevando in blocco le n palline dall'urna.

Problema della "ripartizione della posta"

Nel 1654 un accanito giocatore d'azzardo (il Cavalier De Mérè) sottopone a Blaise Pascal e Pierre Fermat il seguente problema :
«Una sfida tra due giocatori d'azzardo prevede una serie di partite con l'intesa che il vincitore della sfida sarà colui che arriverà per primo a vincere tre partite. Si suppone che entrambi i giocatori abbiano la stessa abilità (ovvero che in ogni partita entrambi abbiano sempre la stessa probabilità di vincere o perdere) e che in ogni partita vi sia sempre un vincitore. Ma talvolta può capitare che il gioco debba essere interrotto anzitempo, quando ancora nessun giocatore ha vinto tre partite. Si pone allora il seguente problema: come ripartire equamente la posta in palio in base al numero di partite vinte fino a quel momento da ciascuno dei due?»

Problema della "ripartizione della posta"

Nel 1654 un accanito giocatore d'azzardo (il Cavalier De Mérè) sottopone a Blaise Pascal e Pierre Fermat il seguente problema : «Una sfida tra due giocatori d'azzardo prevede una serie di partite con l'intesa che il vincitore della sfida sarà colui che arriverà per primo a vincere tre partite. Si suppone che entrambi i giocatori abbiano la stessa abilità (ovvero che in ogni partita entrambi abbiano sempre la stessa probabilità di vincere o perdere) e che in ogni partita vi sia sempre un vincitore. Ma talvolta può capitare che il gioco debba essere interrotto anzitempo, quando ancora nessun giocatore ha vinto tre partite. Si pone allora il seguente problema: come ripartire equamente la posta in palio in base al numero di partite vinte fino a quel momento da ciascuno dei due?»

Problema della "ripartizione della posta"

Dobbiamo preliminarmente tradurre la condizione di "equità della ripartizione" in termini matematici precisi. E l'unica traduzione ragionevole, che mette sullo stesso piano entrambi i giocatori, è la seguente: le due parti della posta devono essere proporzionali alle rispettive probabilità di vittoria, qualora il gioco non fosse stato interrotto anzitempo.

Problema della "ripartizione della posta"

Dobbiamo preliminarmente tradurre la condizione di "equità della ripartizione" in termini matematici precisi. E l'unica traduzione ragionevole, che mette sullo stesso piano entrambi i giocatori, è la seguente: le due parti della posta devono essere proporzionali alle rispettive probabilità di vittoria, qualora il gioco non fosse stato interrotto anzitempo.

Problema della "ripartizione della posta"

Supponiamo dunque, tanto per fare un esempio, che il primo giocatore (nel seguito lo chiameremo Tizio) abbia già vinto una partita mentre il secondo giocatore (lo chiameremo Caio) non ne abbia vinto nemmeno una. Dunque per vincere la sfida mancano rispettivamente due vittorie a Tizio e tre a Caio. È facile convincersi che il gioco, se non fosse interrotto, si concluderebbe con la vittoria di uno dei due giocatori entro un massimo di altre quattro partite, che chiameremo "virtuali" per non confonderle con quelle già giocate in precedenza.

Problema della "ripartizione della posta"

Supponiamo dunque, tanto per fare un esempio, che il primo giocatore (nel seguito lo chiameremo Tizio) abbia già vinto una partita mentre il secondo giocatore (lo chiameremo Caio) non ne abbia vinto nemmeno una. Dunque per vincere la sfida mancano rispettivamente due vittorie a Tizio e tre a Caio. È facile convincersi che il gioco, se non fosse interrotto, si concluderebbe con la vittoria di uno dei due giocatori entro un massimo di altre quattro partite, che chiameremo "virtuali" per non confonderle con quelle già giocate in precedenza.

Problema della "ripartizione della posta"

Supponiamo dunque, tanto per fare un esempio, che il primo giocatore (nel seguito lo chiameremo Tizio) abbia già vinto una partita mentre il secondo giocatore (lo chiameremo Caio) non ne abbia vinto nemmeno una. Dunque per vincere la sfida mancano rispettivamente due vittorie a Tizio e tre a Caio. È facile convincersi che il gioco, se non fosse interrotto, si concluderebbe con la vittoria di uno dei due giocatori entro un massimo di altre quattro partite, che chiameremo "virtuali" per non confonderle con quelle già giocate in precedenza.

Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$
- Sequenze con esattamente tre vittorie di Tizio $\binom{4}{3} = 4$
- Sequenze con esattamente quattro vittorie di Tizio $\binom{4}{4} = 1$

Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$
- Sequenze con esattamente tre vittorie di Tizio $\binom{4}{3} = 4$
- Sequenze con esattamente quattro vittorie di Tizio $\binom{4}{4} = 1$

Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$

Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$
- Sequenze con esattamente tre vittorie di Tizio $\binom{4}{3} = 4$
- Sequenze con esattamente quattro vittorie di Tizio $\binom{4}{4} = 1$

Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$
- Sequenze con esattamente tre vittorie di Tizio $\binom{4}{3} = 4$
- Sequenze con esattamente quattro vittorie di Tizio $\binom{4}{4} = 1$

Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$
- Sequenze con esattamente tre vittorie di Tizio $\binom{4}{3} = 4$
- Sequenze con esattamente quattro vittorie di Tizio $\binom{4}{4} = 1$

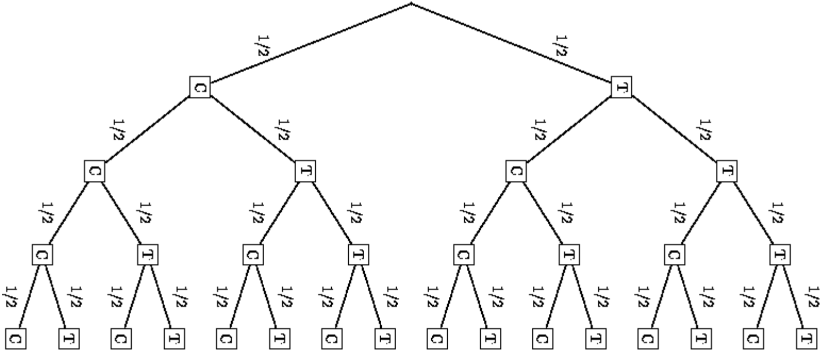
Problema della "ripartizione della posta"

Possiamo ovviamente modellizzare il problema con lo schema dell'urna: Abbiamo un'urna contenente due palline, contrassegnate rispettivamente con T (vince Tizio) e C (vince Caio). La probabilità di estrazione di ogni pallina è identica. Eseguiamo quattro estrazioni di una pallina ciascuna con reimbussolamento (questo equivale all'esito di una partita virtuale). Si possono presentare $2^4 = 16$ sequenze diverse (i possibili esiti delle partite virtuali). Le estrazioni che portano alla vittoria di Tizio si possono ottenere contando le sequenze favorevoli con il calcolo combinatorio:

- Sequenze con esattamente due vittorie di Tizio $\binom{4}{2} = 6$
- Sequenze con esattamente tre vittorie di Tizio $\binom{4}{3} = 4$
- Sequenze con esattamente quattro vittorie di Tizio $\binom{4}{4} = 1$

Problema della "ripartizione della posta"

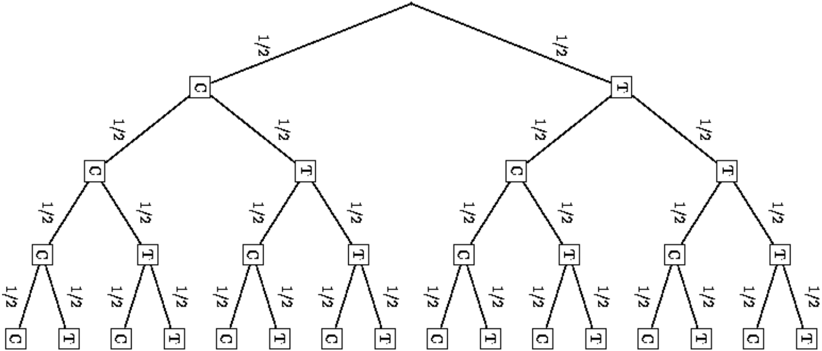
A livello didattico si usa "un albero" del tipo:



I rami uscenti dal punto iniziale mostrano i due possibili esiti della prima partita virtuale, e così via ad ogni biforcazione. Il numero 1/2 accanto a ciascun ramo è la probabilità dei rispettivi eventi.

Problema della "ripartizione della posta"

A livello didattico si usa "un albero" del tipo:



I rami uscenti dal punto iniziale mostrano i due possibili esiti della prima partita virtuale, e così via ad ogni biforcazione. Il numero 1/2 accanto a ciascun ramo è la probabilità dei rispettivi eventi.

Processo di Bernoulli

Si noti che nel calcolo è stata usata sia l'indipendenza delle estrazioni, sia il teorema delle probabilità totali.

In ambito probabilistico lo schema di calcolo utilizzato negli esempi precedenti è un caso particolare di un risultato più generale, noto come Processo di Bernoulli o delle prove ripetute (per la precisione si tratta di Jakob Bernoulli, per non confonderlo con altri illustri matematici della sua famiglia).

Processo di Bernoulli

Si noti che nel calcolo è stata usata sia l'indipendenza delle estrazioni, sia il teorema delle probabilità totali.
In ambito probabilistico lo schema di calcolo utilizzato negli esempi precedenti è un caso particolare di un risultato più generale, noto come Processo di Bernoulli o delle prove ripetute (per la precisione si tratta di Jakob Bernoulli, per non confonderlo con altri illustri matematici della sua famiglia).

Processo di Bernoulli

Teorema (Processo di Bernoulli)

Sia E un evento suscettibile di verificarsi in una prova secondo due sole modalità, che chiameremo convenzionalmente "successo" (con probabilità p) e "insuccesso" (con probabilità $q = 1 - p$).
Se si effettuano n prove indipendenti, la probabilità $P(k)$ di ottenere almeno k successi, è data dalla formula:

$$P(k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Processo di Bernoulli

Con l'andare del tempo i matematici hanno scoperto che l'ambito di applicazione del processo di Bernoulli va ben oltre i giochi. Più in generale, si sono resi conto che trarre spunto da situazioni ludiche per poi generalizzarle e adattarle a problematiche anche molto diverse presenta innegabili vantaggi. Infatti la formulazione delle regole dei giochi risulta generalmente semplice perché non vi intervengono elementi estranei che potrebbero fuorviare l'attenzione dei partecipanti. Costituisce dunque una buona "palestra" prima di affrontare una modellizzazione di situazioni più complesse.

Processo di Bernoulli

Con l'andare del tempo i matematici hanno scoperto che l'ambito di applicazione del processo di Bernoulli va ben oltre i giochi. Più in generale, si sono resi conto che trarre spunto da situazioni ludiche per poi generalizzarle e adattarle a problematiche anche molto diverse presenta innegabili vantaggi. Infatti la formulazione delle regole dei giochi risulta generalmente semplice perché non vi intervengono elementi estranei che potrebbero fuorviare l'attenzione dei partecipanti. Costituisce dunque una buona "palestra" prima di affrontare una modellizzazione di situazioni più complesse.

Processo di Bernoulli

Con l'andare del tempo i matematici hanno scoperto che l'ambito di applicazione del processo di Bernoulli va ben oltre i giochi. Più in generale, si sono resi conto che trarre spunto da situazioni ludiche per poi generalizzarle e adattarle a problematiche anche molto diverse presenta innegabili vantaggi. Infatti la formulazione delle regole dei giochi risulta generalmente semplice perché non vi intervengono elementi estranei che potrebbero fuorviare l'attenzione dei partecipanti. Costituisce dunque una buona "palestra" prima di affrontare una modellizzazione di situazioni più complesse.

Overbooking

Le compagnie aeree sanno per esperienza che non tutti quelli che hanno prenotato un volo si presentano poi all'imbarco a causa di mancate coincidenze, malattie improvvise o altri contrattempi.

Come può la compagnia valutare tale probabilità?

Overbooking

Una compagnia aerea ha stimato che su una certa rotta la probabilità che un passeggero non si presenti all'imbarco è mediamente del $K\%$. Come può la compagnia valutare tale probabilità?

Overbooking

Per massimizzare i propri profitti la compagnia accetta quindi un numero N di prenotazioni superiore al numero D dei posti disponibili. Come può la compagnia valutare tale probabilità?

Overbooking

D'altra parte la differenza $N - D$ non deve essere eccessiva perché se qualche passeggero munito di regolare biglietto restasse a terra per mancanza di posti, la compagnia è tenuta a pagare una penale pari al costo del doppio del biglietto. Come può la compagnia valutare tale probabilità?

Overbooking

Da qui l'interesse della compagnia a valutare la probabilità che questo inconveniente non si verifichi, in corrispondenza ai valori prescelti per il numero N. Come può la compagnia valutare tale probabilità?

Overbooking

Come può la compagnia valutare tale probabilità?

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Dati:

- Posti disponibili: $D = 20$
- Probabilità individuale di rinuncia al volo: $K\% = 10\%$
- Scelte di N: $N = 21, 22$
- Soglia di accettabilità di N: la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero non deve essere superiore al 33%.

Si tratta ancora di un problema di urne (o processo di Bernoulli): basta tradurre "successo" come "una persona si presenta all'imbarco", e "insuccesso" come "una persona non si presenta all'imbarco".

Overbooking

Soluzioni:

- $N = 21$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{21}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^0$ ovvero circa 11%.
- $N = 22$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{22}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^1 + \binom{22}{22} \cdot (9/10)^{22} \cdot (1/10)^0$ ovvero circa 34%.

Dunque per contenere il rischio della penalità la compagnia non dovrà accettare più di 21 prenotazioni.

Overbooking

Soluzioni:

- $N = 21$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{21}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^0$ ovvero circa 11%.
- $N = 22$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{22}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^1 + \binom{22}{22} \cdot (9/10)^{22} \cdot (1/10)^0$ ovvero circa 34%.

Dunque per contenere il rischio della penalità la compagnia non dovrà accettare più di 21 prenotazioni.

Overbooking

Soluzioni:

- $N = 21$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{21}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^{0}$ ovvero circa 11%.
- $N = 22$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{22}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^{1} + \binom{22}{22} \cdot (9/10)^{22} \cdot (1/10)^{0}$ ovvero circa 34%.

Dunque per contenere il rischio della penalità la compagnia non dovrà accettare più di 21 prenotazioni.

Overbooking

Soluzioni:

- $N = 21$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{21}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^0$ ovvero circa 11%.
- $N = 22$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{22}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^1 + \binom{22}{22} \cdot (9/10)^{22} \cdot (1/10)^0$ ovvero circa 34%.

Dunque per contenere il rischio della penalità la compagnia non dovrà accettare più di 21 prenotazioni.

Overbooking

Soluzioni:

- $N = 21$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{21}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^{0}$ ovvero circa 11%.
- $N = 22$ la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è: $\binom{22}{21} \cdot (9/10)^{21} \cdot (1/10)^{1} + \binom{22}{22} \cdot (9/10)^{22} \cdot (1/10)^{0}$ ovvero circa 34%.

Dunque per contenere il rischio della penalità la compagnia non dovrà accettare più di 21 prenotazioni.

Avvertenze

Dobbiamo tener ben presente che la modellizzazione di situazioni reali risulta generalmente molto più complessa di quella con cui si ha a che fare nei casi ludici. Infatti i modelli per loro natura non possono tenere conto di tutte le variabili in gioco e quindi risultano non del tutto precisi. Nel caso dell'overbooking ad esempio l'aver supposto i comportamenti dei passeggeri indipendenti tra loro può non sempre essere un'ipotesi ragionevole: si pensi per esempio a cosa accade quando a viaggiare sono intere famiglie, o squadre sportive. Tutto ciò comunque non vanifica l'utilità dei modelli, che pur limitati nella loro adeguatezza, forniscono (come visto sopra) comunque utili informazioni.

In particolare la semplicità delle situazioni ludiche consente di avere modelli particolarmente semplici e che ben si prestano ad essere analizzati a fondo.

Avvertenze

Dobbiamo tener ben presente che la modellizzazione di situazioni reali risulta generalmente molto più complessa di quella con cui si ha a che fare nei casi ludici. Infatti i modelli per loro natura non possono tenere conto di tutte le variabili in gioco e quindi risultano non del tutto precisi. Nel caso dell'overbooking ad esempio l'aver supposto i comportamenti dei passeggeri indipendenti tra loro può non sempre essere un'ipotesi ragionevole: si pensi per esempio a cosa accade quando a viaggiare sono intere famiglie, o squadre sportive. Tutto ciò comunque non vanifica l'utilità dei modelli, che pur limitati nella loro adeguatezza, forniscono (come visto sopra) comunque utili informazioni.

In particolare la semplicità delle situazioni ludiche consente di avere modelli particolarmente semplici e che ben si prestano ad essere analizzati a fondo.

Avvertenze

Dobbiamo tener ben presente che la modellizzazione di situazioni reali risulta generalmente molto più complessa di quella con cui si ha a che fare nei casi ludici. Infatti i modelli per loro natura non possono tenere conto di tutte le variabili in gioco e quindi risultano non del tutto precisi. Nel caso dell'overbooking ad esempio l'aver supposto i comportamenti dei passeggeri indipendenti tra loro può non sempre essere un'ipotesi ragionevole: si pensi per esempio a cosa accade quando a viaggiare sono intere famiglie, o squadre sportive. Tutto ciò comunque non vanifica l'utilità dei modelli, che pur limitati nella loro adeguatezza, forniscono (come visto sopra) comunque utili informazioni.

In particolare la semplicità delle situazioni ludiche consente di avere modelli particolarmente semplici e che ben si prestano ad essere analizzati a fondo.

Avvertenze

Dobbiamo tener ben presente che la modellizzazione di situazioni reali risulta generalmente molto più complessa di quella con cui si ha a che fare nei casi ludici. Infatti i modelli per loro natura non possono tenere conto di tutte le variabili in gioco e quindi risultano non del tutto precisi. Nel caso dell'overbooking ad esempio l'aver supposto i comportamenti dei passeggeri indipendenti tra loro può non sempre essere un'ipotesi ragionevole: si pensi per esempio a cosa accade quando a viaggiare sono intere famiglie, o squadre sportive. Tutto ciò comunque non vanifica l'utilità dei modelli, che pur limitati nella loro adeguatezza, forniscono (come visto sopra) comunque utili informazioni.

In particolare la semplicità delle situazioni ludiche consente di avere modelli particolarmente semplici e che ben si prestano ad essere analizzati a fondo.

Avvertenze

Dobbiamo tener ben presente che la modellizzazione di situazioni reali risulta generalmente molto più complessa di quella con cui si ha a che fare nei casi ludici. Infatti i modelli per loro natura non possono tenere conto di tutte le variabili in gioco e quindi risultano non del tutto precisi. Nel caso dell'overbooking ad esempio l'aver supposto i comportamenti dei passeggeri indipendenti tra loro può non sempre essere un'ipotesi ragionevole: si pensi per esempio a cosa accade quando a viaggiare sono intere famiglie, o squadre sportive. Tutto ciò comunque non vanifica l'utilità dei modelli, che pur limitati nella loro adeguatezza, forniscono (come visto sopra) comunque utili informazioni.

In particolare la semplicità delle situazioni ludiche consente di avere modelli particolarmente semplici e che ben si prestano ad essere analizzati a fondo.

Avvertenze

Dobbiamo tener ben presente che la modellizzazione di situazioni reali risulta generalmente molto più complessa di quella con cui si ha a che fare nei casi ludici. Infatti i modelli per loro natura non possono tenere conto di tutte le variabili in gioco e quindi risultano non del tutto precisi. Nel caso dell'overbooking ad esempio l'aver supposto i comportamenti dei passeggeri indipendenti tra loro può non sempre essere un'ipotesi ragionevole: si pensi per esempio a cosa accade quando a viaggiare sono intere famiglie, o squadre sportive. Tutto ciò comunque non vanifica l'utilità dei modelli, che pur limitati nella loro adeguatezza, forniscono (come visto sopra) comunque utili informazioni.
In particolare la semplicità delle situazioni ludiche consente di avere modelli particolarmente semplici e che ben si prestano ad essere analizzati a fondo.

Sommario

Il paradosso di Borel

Nel passare dal caso in cui si considera un numero finito di eventi al caso numerabile ci si imbatte subito in situazioni interessanti.

Qualora si approfondisse l'argomento si giungerebbe a conclusioni corrette ma sorprendenti.

Una scimmia, battendo a caso sui tasti di una macchina da scrivere, comporrà prima o poi l'intera "Divina Commedia". Tale situazione paradossale (nota come "paradosso di Borel") può essere descritta in termini matematici tramite un processo di Bernoulli in cui si ha a disposizione un numero illimitato di prove tra loro indipendenti (il numero di volte che la scimmia, supposta immortale, digita i tasti), dove in ogni prova si ha o successo (la battuta genera il carattere giusto) o insuccesso (la battuta genera il carattere sbagliato).

Il paradosso di Borel

Nel passare dal caso in cui si considera un numero finito di eventi al caso numerabile ci si imbatte subito in situazioni interessanti. Qualora si approfondisse l'argomento si giungerebbe a conclusioni corrette ma sorprendenti.

Una scimmia, battendo a caso sui tasti di una macchina da scrivere, comporrà prima o poi l'intera "Divina Commedia". Tale situazione paradossale (nota come "paradosso di Borel") può essere descritta in termini matematici tramite un processo di Bernoulli in cui si ha a disposizione un numero illimitato di prove tra loro indipendenti (il numero di volte che la scimmia, supposta immortale, digita i tasti), dove in ogni prova si ha o successo (la battuta genera il carattere giusto) o insuccesso (la battuta genera il carattere sbagliato).

Il paradosso di Borel

Nel passare dal caso in cui si considera un numero finito di eventi al caso numerabile ci si imbatte subito in situazioni interessanti. Qualora si approfondisse l'argomento si giungerebbe a conclusioni corrette ma sorprendenti.
Una scimmia, battendo a caso sui tasti di una macchina da scrivere, comporrà prima o poi l'intera "Divina Commedia". Tale situazione paradossale (nota come "paradosso di Borel") può essere descritta in termini matematici tramite un processo di Bernoulli in cui si ha a disposizione un numero illimitato di prove tra loro indipendenti (il numero di volte che la scimmia, supposta immortale, digita i tasti), dove in ogni prova si ha o successo (la battuta genera il carattere giusto) o insuccesso (la battuta genera il carattere sbagliato).

Il paradosso di Borel

Nel passare dal caso in cui si considera un numero finito di eventi al caso numerabile ci si imbatte subito in situazioni interessanti. Qualora si approfondisse l'argomento si giungerebbe a conclusioni corrette ma sorprendenti.

Una scimmia, battendo a caso sui tasti di una macchina da scrivere, comporrà prima o poi l'intera "Divina Commedia". Tale situazione paradossale (nota come "paradosso di Borel") può essere descritta in termini matematici tramite un processo di Bernoulli in cui si ha a disposizione un numero illimitato di prove tra loro indipendenti (il numero di volte che la scimmia, supposta immortale, digita i tasti), dove in ogni prova si ha o successo (la battuta genera il carattere giusto) o insuccesso (la battuta genera il carattere sbagliato).

Eventi quasi-certi o quasi-impossibili

Osserviamo per inciso che siamo di fronte ad una situazione nuova anche da un punto di vista teorico: abbiamo infatti identificato un evento (ottenere il poema la "Divina Commedia") che pur non essendo l'evento certo, ha comunque probabilità uguale a 1. Eventi di questo tipo (in cui ci si può imbattere solo se la cardinalità dello spazio degli eventi non è finita) vengono detti *quasi-certi*. Ovviamente i loro contrari (che avranno probabilità uguale a zero, pur non coincidendo con l'evento impossibile) verranno per analogia detti *quasi-impossibili*. Dunque nel caso numerabile non è necessariamente vero che se la probabilità di un evento è 1 (rispettivamente 0) questo sia l'evento certo (rispettivamente l'evento impossibile).

Eventi quasi-certi o quasi-impossibili

Osserviamo per inciso che siamo di fronte ad una situazione nuova anche da un punto di vista teorico: abbiamo infatti identificato un evento (ottenere il poema la "Divina Commedia") che pur non essendo l'evento certo, ha comunque probabilità uguale a 1. Eventi di questo tipo (in cui ci si può imbattere solo se la cardinalità dello spazio degli eventi non è finita) vengono detti *quasi-certi*. Ovviamente i loro contrari (che avranno probabilità uguale a zero, pur non coincidendo con l'evento impossibile) verranno per analogia detti *quasi-impossibili*. Dunque nel caso numerabile non è necessariamente vero che se la probabilità di un evento è 1 (rispettivamente 0) questo sia l'evento certo (rispettivamente l'evento impossibile).

Eventi quasi-certi o quasi-impossibili

Osserviamo per inciso che siamo di fronte ad una situazione nuova anche da un punto di vista teorico: abbiamo infatti identificato un evento (ottenere il poema la "Divina Commedia") che pur non essendo l'evento certo, ha comunque probabilità uguale a 1. Eventi di questo tipo (in cui ci si può imbattere solo se la cardinalità dello spazio degli eventi non è finita) vengono detti *quasi-certi*. Ovviamente i loro contrari (che avranno probabilità uguale a zero, pur non coincidendo con l'evento impossibile) verranno per analogia detti *quasi-impossibili*. Dunque nel caso numerabile non è necessariamente vero che se la probabilità di un evento è 1 (rispettivamente 0) questo sia l'evento certo (rispettivamente l'evento impossibile).

Eventi quasi-certi o quasi-impossibili

Osserviamo per inciso che siamo di fronte ad una situazione nuova anche da un punto di vista teorico: abbiamo infatti identificato un evento (ottenere il poema la "Divina Commedia") che pur non essendo l'evento certo, ha comunque probabilità uguale a 1. Eventi di questo tipo (in cui ci si può imbattere solo se la cardinalità dello spazio degli eventi non è finita) vengono detti *quasi-certi*. Ovviamente i loro contrari (che avranno probabilità uguale a zero, pur non coincidendo con l'evento impossibile) verranno per analogia detti *quasi-impossibili*. Dunque nel caso numerabile non è necessariamente vero che se la probabilità di un evento è 1 (rispettivamente 0) questo sia l'evento certo (rispettivamente l'evento impossibile).

Il paradosso di Borel

Il paradosso di Borel rientra in un insieme di paradossi derivanti dal seguente teorema:

Teorema (Legge zero-uno, di Borel-Cantelli)

Sia data una successione di eventi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti. Allora la probabilità che si verifichino infiniti di tali eventi è pari a 0 se $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ converge, è pari a 1 se $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ diverge.

Il paradosso di Borel

Il paradosso di Borel rientra in un insieme di paradossi derivanti dal seguente teorema:

Teorema (Legge zero-uno, di Borel-Cantelli)

Sia data una successione di eventi $\{ A_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *indipendenti. Allora la probabilità che si verifichino infiniti di tali eventi è pari a* 0 *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *converge, è pari a* 1 *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *diverge.*

Il paradosso della scimmia

Il modo di procedere della scimmia non è un buon metodo per comporre poemi. Supponendo per semplicità che le "scimmie dattilografe" abbiano a disposizione una tastiera semplificata con soli 30 tasti (lettere minuscole dell'alfabeto italiano e segni di punteggiatura), e che eseguano 240 battute al minuto, il tempo medio di attesa per ottenere, senza spaziature, solo il titolo del poema (ovvero la stringa "*la divina commedia*") è di circa 10^{15} anni! Dunque per portare a termine l'opera occorrerebbe avere a disposizione un tempo pressoché infinito.

Il paradosso della scimmia

Il modo di procedere della scimmia non è un buon metodo per comporre poemi. Supponendo per semplicità che le "scimmie dattilografe" abbiano a disposizione una tastiera semplificata con soli 30 tasti (lettere minuscole dell'alfabeto italiano e segni di punteggiatura), e che eseguano 240 battute al minuto, il tempo medio di attesa per ottenere, senza spaziature, solo il titolo del poema (ovvero la stringa "*la divina commedia*") è di circa 10^{15} anni! Dunque per portare a termine l'opera occorrerebbe avere a disposizione un tempo pressoché infinito.

Il paradosso della scimmia

Il modo di procedere della scimmia non è un buon metodo per comporre poemi. Supponendo per semplicità che le "scimmie dattilografe" abbiano a disposizione una tastiera semplificata con soli 30 tasti (lettere minuscole dell'alfabeto italiano e segni di punteggiatura), e che eseguano 240 battute al minuto, il tempo medio di attesa per ottenere, senza spaziature, solo il titolo del poema (ovvero la stringa "*la divina commedia*") è di circa 10^{15} anni! Dunque per portare a termine l'opera occorrerebbe avere a disposizione un tempo pressoché infinito.

Il paradosso della scimmia

Il modo di procedere della scimmia non è un buon metodo per comporre poemi. Supponendo per semplicità che le "scimmie dattilografe" abbiano a disposizione una tastiera semplificata con soli 30 tasti (lettere minuscole dell'alfabeto italiano e segni di punteggiatura), e che eseguano 240 battute al minuto, il tempo medio di attesa per ottenere, senza spaziature, solo il titolo del poema (ovvero la stringa "*la divina commedia*") è di circa 10^{15} anni! Dunque per portare a termine l'opera occorrerebbe avere a disposizione un tempo pressoché infinito.

Teoria della misura

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre usato il calcolo delle probabilità in situazioni in cui si aveva a che fare con un numero finito di casi possibili. Abbiamo accennato che passando al caso numerabile le cose si complicano: occorre infatti "mettere mano" agli assiomi e a causa della necessità di usare strumenti matematici più complessi, le serie. Risulta spontaneo pensare di poter affrontare il passo successivo, ovvero il passaggio al caso continuo, facendo uso del calcolo integrale che, generalizza il concetto di serie. Dato inoltre che il concetto di integrale è strettamente collegato a quello di misura (teoria dell'integrazione e teoria della misura sono due facce della stessa medaglia) si è portati a ipotizzare che la stessa cosa valga anche nell'ambito del calcolo delle probabilità, e che quindi si possa impostare la probabilità nel continuo in termini geometrici.

Teoria della misura

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre usato il calcolo delle probabilità in situazioni in cui si aveva a che fare con un numero finito di casi possibili. Abbiamo accennato che passando al caso numerabile le cose si complicano: occorre infatti "mettere mano" agli assiomi e a causa della necessità di usare strumenti matematici più complessi, le serie. Risulta spontaneo pensare di poter affrontare il passo successivo, ovvero il passaggio al caso continuo, facendo uso del calcolo integrale che, generalizza il concetto di serie. Dato inoltre che il concetto di integrale è strettamente collegato a quello di misura (teoria dell'integrazione e teoria della misura sono due facce della stessa medaglia) si è portati a ipotizzare che la stessa cosa valga anche nell'ambito del calcolo delle probabilità, e che quindi si possa impostare la probabilità nel continuo in termini geometrici.

Teoria della misura

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre usato il calcolo delle probabilità in situazioni in cui si aveva a che fare con un numero finito di casi possibili. Abbiamo accennato che passando al caso numerabile le cose si complicano: occorre infatti "mettere mano" agli assiomi e a causa della necessità di usare strumenti matematici più complessi, le serie. Risulta spontaneo pensare di poter affrontare il passo successivo, ovvero il passaggio al caso continuo, facendo uso del calcolo integrale che, generalizza il concetto di serie. Dato inoltre che il concetto di integrale è strettamente collegato a quello di misura (teoria dell'integrazione e teoria della misura sono due facce della stessa medaglia) si è portati a ipotizzare che la stessa cosa valga anche nell'ambito del calcolo delle probabilità, e che quindi si possa impostare la probabilità nel continuo in termini geometrici.

Teoria della misura

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre usato il calcolo delle probabilità in situazioni in cui si aveva a che fare con un numero finito di casi possibili. Abbiamo accennato che passando al caso numerabile le cose si complicano: occorre infatti "mettere mano" agli assiomi e a causa della necessità di usare strumenti matematici più complessi, le serie. Risulta spontaneo pensare di poter affrontare il passo successivo, ovvero il passaggio al caso continuo, facendo uso del calcolo integrale che, generalizza il concetto di serie. Dato inoltre che il concetto di integrale è strettamente collegato a quello di misura (teoria dell'integrazione e teoria della misura sono due facce della stessa medaglia) si è portati a ipotizzare che la stessa cosa valga anche nell'ambito del calcolo delle probabilità, e che quindi si possa impostare la probabilità nel continuo in termini geometrici.

Teoria della misura

Supponiamo di porci il seguente problema:
Marco e Giovanni devono incontrarsi in un posto convenuto tra le 10 e le 11. Giovanni, arrivato per primo, può attendere Marco solo per 20 minuti e poi è costretto ad andarsene. Che probabilità c'è che Marco e Giovanni si incontrino?

Teoria della misura

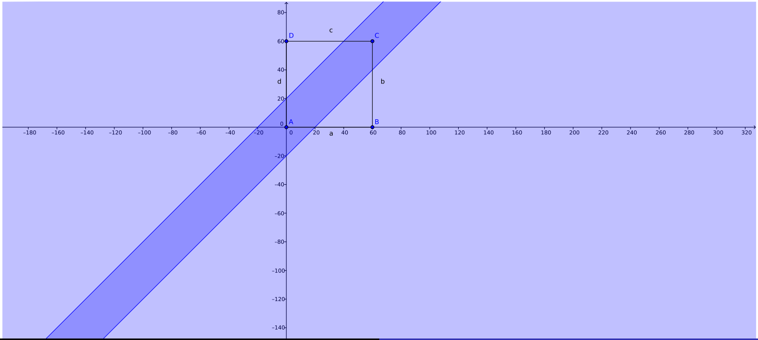
Il problema è evidentemente relativo al caso continuo visto che il tempo è una grandezza continua. Possiamo provare a dare una risposta presupponendo che i tempi di arrivo di Marco e di Giovanni siano tra loro indipendenti.

Teoria della misura

Detto T_M il tempo di arrivo di Marco e T_G il tempo di arrivo di Giovanni, l'incontro avrà luogo se e solo se $|T_G - T_M| \leqslant 20$. Ora se in un piano cartesiano ortonormato consideriamo i punti di coordinate (T_G, T_M), i casi possibili saranno rappresentati dai punti interni e dai punti del bordo del quadrato avente un vertice nell'origine e lato 60 (infatti dato che l'incontro era stato stabilito nell'arco di un'ora, si avrà $0 \leqslant T_G, T_M \leqslant 60$, avendo scelto di misurare il tempo in minuti).

Teoria della misura

D'altro canto i casi favorevoli saranno rappresentati solo dai punti del quadrato che soddisfano la disuguaglianza vista sopra. Usando la teoria della misura possiamo allora calcolare la probabilità usando le misure delle aree delle figure ottenute:



Teoria della misura

Perciò $P = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = 5/9.$

Probabilità nel continuo

Pensiamo di "scegliere un punto a caso" nell'intervallo $[0, 1]$. Ogni punto può essere rappresentato da un allineamento decimale illimitato (con la convenzione che per i numeri decimali finiti tutte le cifre siano uguali a zero da un certo punto in poi). Ad esempio, il numero π ha un allineamento decimale (approssimato per troncamento) del tipo 3,141 592 654. La probabilità di "azzeccare a caso" una specifica cifra nell'allineamento decimale è ovviamente $1/10$, per cui la probabilità di azzeccare le prime dodici cifre di π è $(1/10)^{12}$, un numero estremamente piccolo! Se pensiamo di andare aventi all'infinito diventa plausibile pensare che l'unico valore che possiamo attribuire alla probabilità di azzeccare tutte le cifre di π sia zero!

Probabilità nel continuo

Pensiamo di "scegliere un punto a caso" nell'intervallo $[0, 1]$. Ogni punto può essere rappresentato da un allineamento decimale illimitato (con la convenzione che per i numeri decimali finiti tutte le cifre siano uguali a zero da un certo punto in poi). Ad esempio, il numero π ha un allineamento decimale (approssimato per troncamento) del tipo 3,141 592 654. La probabilità di "azzeccare a caso" una specifica cifra nell'allineamento decimale è ovviamente $1/10$, per cui la probabilità di azzeccare le prime dodici cifre di π è $(1/10)^{12}$, un numero estremamente piccolo! Se pensiamo di andare aventi all'infinito diventa plausibile pensare che l'unico valore che possiamo attribuire alla probabilità di azzeccare tutte le cifre di π sia zero!

Probabilità nel continuo

Pensiamo di "scegliere un punto a caso" nell'intervallo $[0, 1]$. Ogni punto può essere rappresentato da un allineamento decimale illimitato (con la convenzione che per i numeri decimali finiti tutte le cifre siano uguali a zero da un certo punto in poi). Ad esempio, il numero π ha un allineamento decimale (approssimato per troncamento) del tipo 3,141 592 654. La probabilità di "azzeccare a caso" una specifica cifra nell'allineamento decimale è ovviamente $1/10$, per cui la probabilità di azzeccare le prime dodici cifre di π è $(1/10)^{12}$, un numero estremamente piccolo! Se pensiamo di andare aventi all'infinito diventa plausibile pensare che l'unico valore che possiamo attribuire alla probabilità di azzeccare tutte le cifre di π sia zero!

Probabilità nel continuo

Pensiamo di "scegliere un punto a caso" nell'intervallo $[0, 1]$. Ogni punto può essere rappresentato da un allineamento decimale illimitato (con la convenzione che per i numeri decimali finiti tutte le cifre siano uguali a zero da un certo punto in poi). Ad esempio, il numero π ha un allineamento decimale (approssimato per troncamento) del tipo 3,141 592 654. La probabilità di "azzeccare a caso" una specifica cifra nell'allineamento decimale è ovviamente $1/10$, per cui la probabilità di azzeccare le prime dodici cifre di π è $(1/10)^{12}$, un numero estremamente piccolo! Se pensiamo di andare aventi all'infinito diventa plausibile pensare che l'unico valore che possiamo attribuire alla probabilità di azzeccare tutte le cifre di π sia zero!

Probabilità nel continuo

Dunque nel caso continuo, al contrario di quanto avviene nel caso discreto, lo studio di una v.a. X non può essere fatto studiando solo gli eventi del tipo $\{ X = x \}$, visto che questi ultimi hanno tutti probabilità nulla.

Questo giustifica la necessità dell'introduzione di un apparato matematico che risulta essere ben più complesso rispetto a quello del caso discreto. Esso si basa sull'uso della teoria dell'integrazione e della misura.

Data la complessità dell'argomento ritengo opportuno fermarmi qui e consigliare a coloro eventualmente interessati di consultare un testo specifico sull'argomento.

Probabilità nel continuo

Dunque nel caso continuo, al contrario di quanto avviene nel caso discreto, lo studio di una v.a. X non può essere fatto studiando solo gli eventi del tipo $\{X = x\}$, visto che questi ultimi hanno tutti probabilità nulla.
Questo giustifica la necessità dell'introduzione di un apparato matematico che risulta essere ben più complesso rispetto a quello del caso discreto. Esso si basa sull'uso della teoria dell'integrazione e della misura.
Data la complessità dell'argomento ritengo opportuno fermarmi qui e consigliare a coloro eventualmente interessati di consultare un testo specifico sull'argomento.

Probabilità nel continuo

Dunque nel caso continuo, al contrario di quanto avviene nel caso discreto, lo studio di una v.a. X non può essere fatto studiando solo gli eventi del tipo $\{ X = x \}$, visto che questi ultimi hanno tutti probabilità nulla.
Questo giustifica la necessità dell'introduzione di un apparato matematico che risulta essere ben più complesso rispetto a quello del caso discreto. Esso si basa sull'uso della teoria dell'integrazione e della misura.
Data la complessità dell'argomento ritengo opportuno fermarmi qui e consigliare a coloro eventualmente interessati di consultare un testo specifico sull'argomento.

Sommario

Ringraziamenti

Ringrazio in primis il Prof. Don Mario Ferrari per avermi dato la possibilità di "cimentarmi" in questa relazione . . . e ringrazio tutti voi per avermi dato la possibilità di riflettere su un argomento appassionante come la "matematica dell'incertezza".
Come il Prof. Giovanni Prodi sosteneva di avere incontrato nella probabilità uno spunto didattico per la matematica, mi auguro che ciò possa valere anche per il vostro insegnamento.

Ringraziamenti

Ringrazio in primis il Prof. Don Mario Ferrari per avermi dato la possibilità di "cimentarmi" in questa relazione ... e ringrazio tutti voi per avermi dato la possibilità di riflettere su un argomento appassionante come la "matematica dell'incertezza".

Come il Prof. Giovanni Prodi sosteneva di avere incontrato nella probabilità uno spunto didattico per la matematica, mi auguro che ciò possa valere anche per il vostro insegnamento.

Ringraziamenti

Ringrazio in primis il Prof. Don Mario Ferrari per avermi dato la possibilità di "cimentarmi" in questa relazione ... e ringrazio tutti voi per avermi dato la possibilità di riflettere su un argomento appassionante come la "matematica dell'incertezza".
Come il Prof. Giovanni Prodi sosteneva di avere incontrato nella probabilità uno spunto didattico per la matematica, mi auguro che ciò possa valere anche per il vostro insegnamento.

Ringraziamenti

Ringrazio in primis il Prof. Don Mario Ferrari per avermi dato la possibilità di "cimentarmi" in questa relazione . . . e ringrazio tutti voi per avermi dato la possibilità di riflettere su un argomento appassionante come la "matematica dell'incertezza".
Come il Prof. Giovanni Prodi sosteneva di avere incontrato nella probabilità uno spunto didattico per la matematica, mi auguro che ciò possa valere anche per il vostro insegnamento.