

La probabilità
alla luce delle indicazioni nazionali
per la scuola dell'obbligo
quali criticità per l'insegnante?

Maria Reggiani - Pavia



*Non multum oportet consilio credere, quia
suam habet fortuna rationem*

Petronio, Satyricon LXXXIII

Paderno del Grappa, 24 agosto 2014

Indice dell'intervento:

- Indicazioni nazionali
- Focus sulle medie
- Probabilità nei libri testo
- Punti nodali per l'alunno
 - Capire il testo
 - Individuare/rappresentare l'esperimento
 - Frequenza e probabilità
- Difficoltà per l'insegnante: esempi
- Qualche proposta

La probabilità nelle Indicazioni Nazionali

1979 scuola secondaria di primo grado

1985 scuola primaria

1989 programmi PNI e Brocca

Dal 2007 tutti i livelli di scuola

2012

Scuola primaria

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

L'alunno riconosce e quantifica in casi semplici situazioni di incertezza

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Relazioni, dati e previsioni

In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili

2012

Scuola secondaria di primo grado

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado

L'alunno nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi.....) si orienta con valutazioni di probabilità

Obiettivi di apprendimento per la scuola secondaria di primo grado

Dati e previsioni

In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, discutere i modi per assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti

Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti

2010 - Biennio scuola secondaria di secondo grado

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

Licei

PRIMO BIENNIO

Dati e previsioni

Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Lo studente studierà alcuni esempi di modelli matematici in diversi ambiti, apprenderà a descriverne le caratteristiche principali e distinguerne gli aspetti specifici.

LINEE GUIDA

Istituti tecnici (e professionali)

Dati e previsioni

Conoscenze	Abilità
<p>Significato della probabilità e sue valutazioni.</p> <p>Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti.</p> <p>Probabilità e frequenza</p>	<p>Calcolare la probabilità di eventi elementari.</p>

In tutti i livelli maggiore spazio per rappresentazioni di dati e indici statistici

Focus sulla “scuola media”: perché?

Dalle prove Invalsi per la classe V della scuola primaria (2012/13):

D25. È più probabile che venga testa lanciando una moneta oppure che venga il 5 lanciando un dado?

Scegli la risposta corretta e completa la frase.

- È più probabile che venga testa lanciando la moneta perché...
.....
- È più probabile che venga il 5 lanciando il dado perché
.....

Dalle prove Invalsi per la classe V della scuola primaria (2012/13):

D31. Quale fra le seguenti affermazioni è sempre vera?

- A. È molto probabile che domani pioverà
- B. È certo che fra sette giorni sarà domenica
- C. È impossibile che se lancio due dadi (con le facce numerate da 1 a 6) la somma dei punti sia 1
- D. È poco probabile che se lancio una moneta venga croce

Dalle prove Invalsi per la classe I della scuola secondaria di primo grado (2012/13):

Quesito D6

*Dopo una descrizione del gioco della “morra cinese”
(forbice, sasso, carta) si chiede:*

Cristina sostiene che la probabilità che escano due simboli uguali è minore della probabilità che escano due simboli diversi. Sei d'accordo con Cristina?

Scegli una delle possibili risposte e completa la frase.

- Sì, sono d'accordo con Cristina perché
- No, non sono d'accordo con Cristina perché

Dalle prove Invalsi per la classe III della scuola
secondaria di primo grado (2012/13):

**D4. Nel sacchetto A ci sono 4 palline rosse e 8 nere
mentre nel sacchetto B ci sono 4 palline rosse e 6 nere.**

a. Completa correttamente la seguente frase

Estrarre una pallina rossa dal sacchetto A è (*più, meno,
ugualmente*) probabile che estrarre una pallina rossa dal
sacchetto B.



**b. Giovanni distribuisce fra i due sacchetti
altre 6 palline rosse in modo che la probabilità di
estrarre una pallina rossa sia la stessa per entrambi i
sacchetti.**

**Quante palline rosse ha aggiunto Giovanni in ciascuno
dei due sacchetti?**

Dalle prove Invalsi per la classe III della scuola
secondaria di primo grado (2012/13):

**D7. Anna e Daniele giocano con due dadi.
Ciascuno tira i due dadi e moltiplica i due
numeri.**

Ad esempio, in questo caso $4 \times 3 = 12$.



Anna vince se il prodotto è un numero pari.

Daniele vince se il prodotto è un numero dispari.

Hanno entrambi la stessa probabilità di vincere?

Scegli la risposta e completa la frase.

Sì, perché

No, perché.....

Focus sulla “scuola media”: perché?

Dati e previsioni nei libri di testo (e forse nella prassi didattica):

Primo anno: “statistica”

Secondo anno: percentuali

Terzo anno: probabilità (spesso alla fine)

Perché un “buco” di due o più anni dopo la primaria?

Quali contenuti di probabilità nei libri di testo per la scuola media?

- Diverse concezioni/definizioni di probabilità (classica, frequentista, soggettivista) non previste dalle indicazioni.
- Definizione classica – eventi casuali semplici
- Legame frequenza – probabilità
- Eventi composti in situazioni equiprobabili - collegamenti con la trasmissione dei caratteri ereditari

2012

Scuola secondaria di primo grado

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado

L'alunno nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi.....) si orienta con valutazioni di probabilità

Obiettivi di apprendimento per la scuola secondaria di primo grado

Dati e previsioni

In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, discutere i modi per assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti

Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti

Punti nodali per l'alunno

- Interpretazione della situazione e del testo
- Aspetti linguistici: al più, almeno, esattamente
- Corretta interpretazione dei connettivi logici (e, o, non)

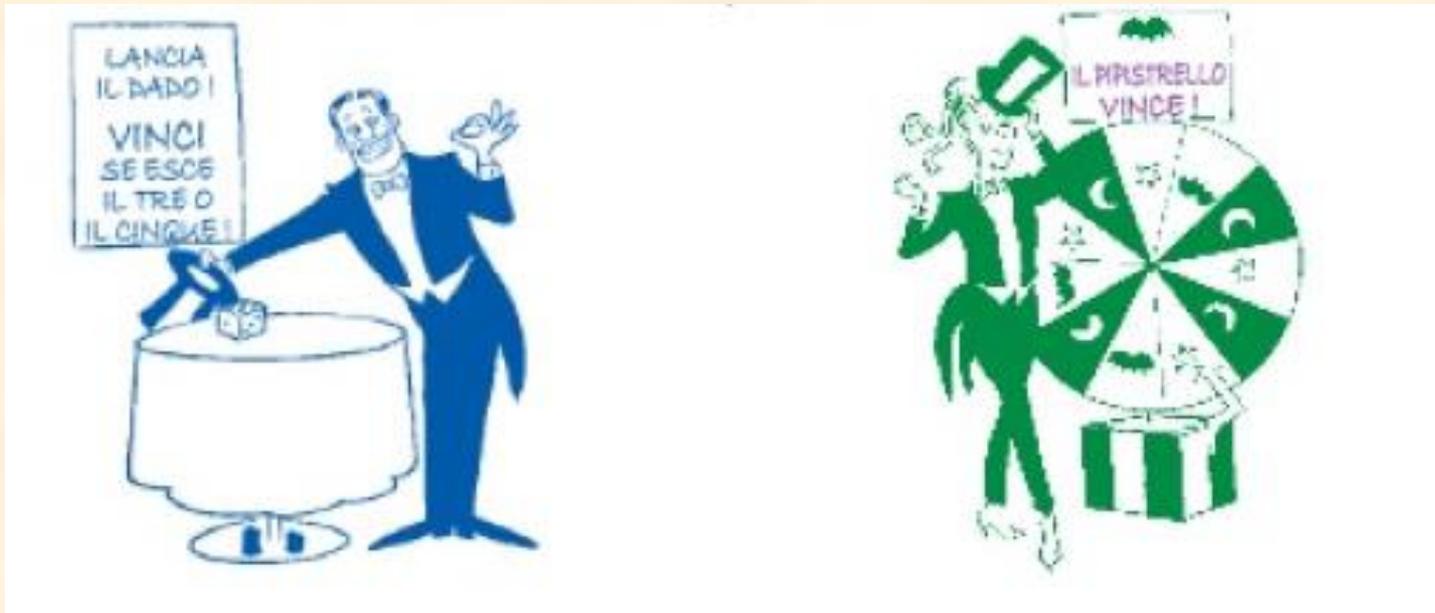
Punti nodali per l'alunno

- Rappresentazione degli eventi:
 - linguaggio degli insiemi
 - grafi ad albero
 - tabella a doppia entrata
- Alcuni misconcetti legati al legame frequenza-probabilità

Rappresentazione degli eventi:

Linguaggio iconico – linguaggio verbale - linguaggio degli insiemi

In quale gioco è più alta la probabilità di vincere?



88

In un sacchetto ci sono dei dischetti numerati da 1 a 15. Estraendo un dischetto, considera l'evento totale C : "Esce un numero dispari o multiplo di 3":

- scrivi gli eventi parziali;
- rappresenta graficamente lo spazio campionario;
- calcola la probabilità degli eventi parziali e dell'evento totale C .

$$\left[\frac{8}{15}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right]$$

Molti testi utilizzano i simboli unione, intersezione, complementare per introdurre le relazioni

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(e altre analoghe)

pur non avendo esplicitato l'identificazione insieme – evento

- diagrammi di Venn poco utilizzati

esercizio guidato

Si estrae un numero della tombola, poi, senza rimettere il numero nell'urna, si estrae un secondo numero: qual è la probabilità che i due numeri estratti siano entrambi pari?

I numeri della tombola sono e di questi sono pari, quindi, la probabilità che si verifichi l'evento A «il primo numero estratto è pari» è: $\frac{\dots}{90}$;

ora, se non si rimette nell'urna il numero estratto, che si suppone sia pari, i numeri rimasti sono e, di questi, i numeri pari sono 44 perché uno è già stato estratto, dunque, la probabilità che si verifichi l'evento B «il secondo numero estratto è pari» è: $\frac{44}{\dots}$;

puoi, quindi, scrivere:

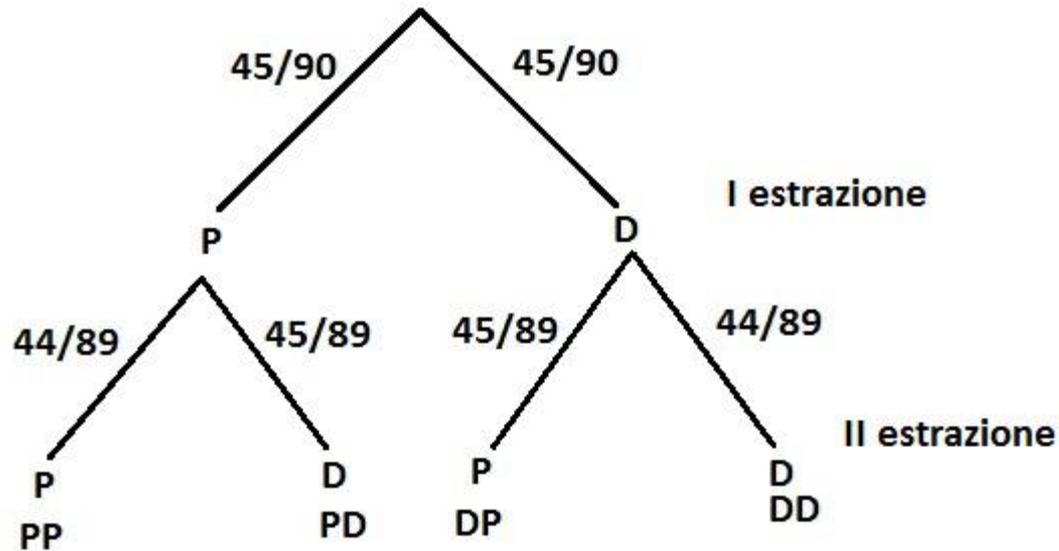
$$p(A \cap B) = \frac{\dots}{90} \dots \frac{44}{\dots} = \dots$$

In questo esempio, gli eventi considerati sono dipendenti o indipendenti?

Rappresentazione degli eventi:

Uso dei grafi ad albero

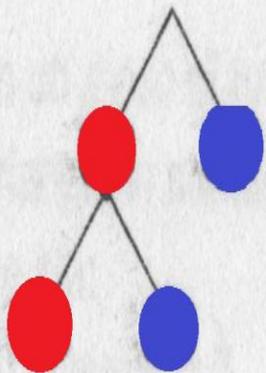
Stessa situazione rappresentata con un grafo



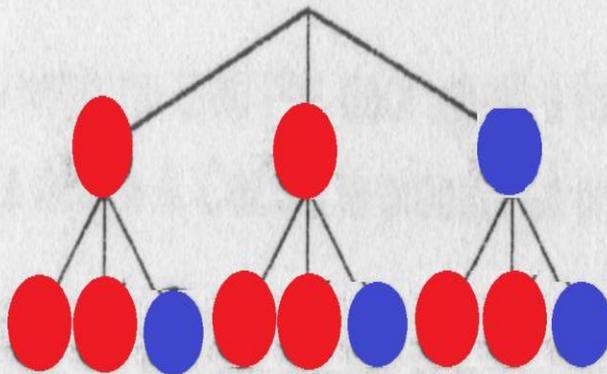
I diagrammi nei libri di testo:

129 In un'urna ci sono tre dischetti: **due rossi e uno blu**

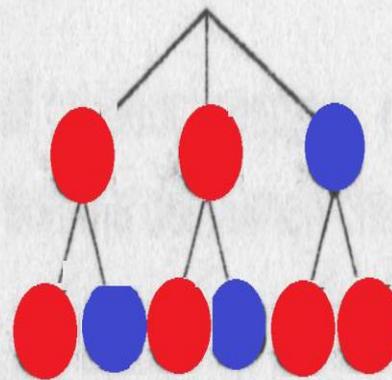
Mimì farà due estrazioni successive rimettendo il primo dischetto nell'urna e vuole rappresentare tutti i casi possibili con un diagramma ad albero. Quale tra i diagrammi che Mimì disegna qui sotto è quello corretto?



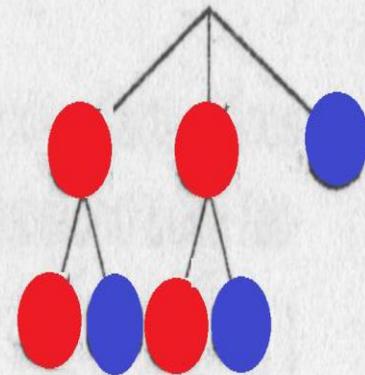
a



b



c



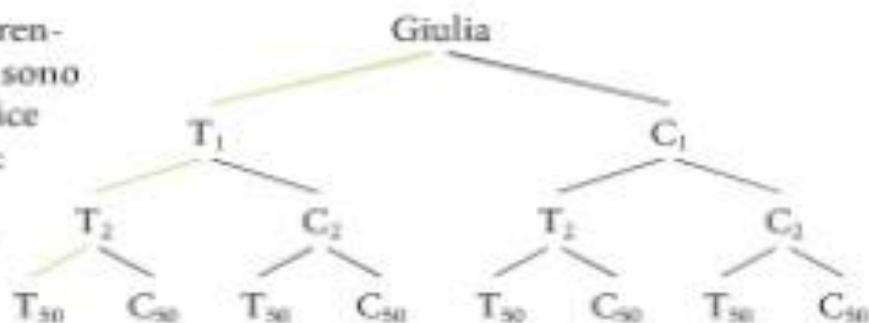
d



Esempio 3 Giulia lancia una moneta da 1 €, una moneta da 2 € e una moneta da 50 centesimi. Qual è la probabilità che escano tre teste?

Indichiamo per ciascuna moneta i risultati possibili: T_1 e C_1 per la moneta da 1 €, T_2 e C_2 per quella da 2 €, e T_{50} e C_{50} per la moneta da 50 centesimi. Tutti i risultati sono ugualmente possibili.

Quando gli eventi da prendere in considerazione sono più di due, è più semplice usare il grafo ad albero: da questo si vede che ci sono 8 casi possibili.



Su ciascuna moneta la probabilità di ottenere testa è $\frac{1}{2}$. Ciascun evento è indipendente dall'altro: la faccia che esce su una moneta è indipendente da quella che esce sull'altra moneta. La probabilità di ottenere tre teste nel lancio di tre monete è

$$P(TTT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Risposta: $\frac{1}{8}$

I grafi sono usati prevalentemente come strumento per contare le combinazioni e in situazione di equiprobabilità

Legame frequenza - probabilità

Da un libro di testo con riferimento al lancio di un dado:

“...immagina di aver lanciato un dado 45 volte e di aver ottenuto per 4 volte il numero 3: allora si definisce frequenza relativa dell'evento esce il numero 3, come la frazione $4/45$, cioè il numero delle esperienze verificate sul totale delle prove effettuate.

.....Se ripeti lo stesso numero di lanci la frequenza relativa può cambiare; ad esempio, se si presenta 7 volte la faccia contrassegnata dal numero 3, **la probabilità dell'evento è: $7/45$.**”

Stesso testo – paragrafo successivo:

Se il numero delle prove effettuate è grande, la frequenza di un evento di solito è uguale alla probabilità e, quanto più è grande il numero delle prove, in generale tanto maggiore è l'approssimazione.

Molti altri esempi nei testi portano a confondere frequenza e probabilità:

a) Una società assicurativa ha rilevato che su 20200 polizze automobilistiche si sono avuti 1660 incidenti.

Qual è la probabilità di incidente?

b)

Anno scolastico	Alunni iscritti alla classe prima	Alunni promossi	Frequenza relativa
2005/06	180	162	0.9
2006/07	200	178	0.89
2007/08	200	182	0.91

Qual è la probabilità di essere promosso nella scuola considerata per un alunno che si iscrive alla classe prima?

Una riflessione opportuna:



a) Qual è la probabilità di vincere comprando un biglietto?

b) Quanti biglietti vincenti ci si aspetta comprando 40 biglietti?

c) Quante vincite sicure si hanno comprando 40 biglietti?

Le difficoltà degli insegnanti

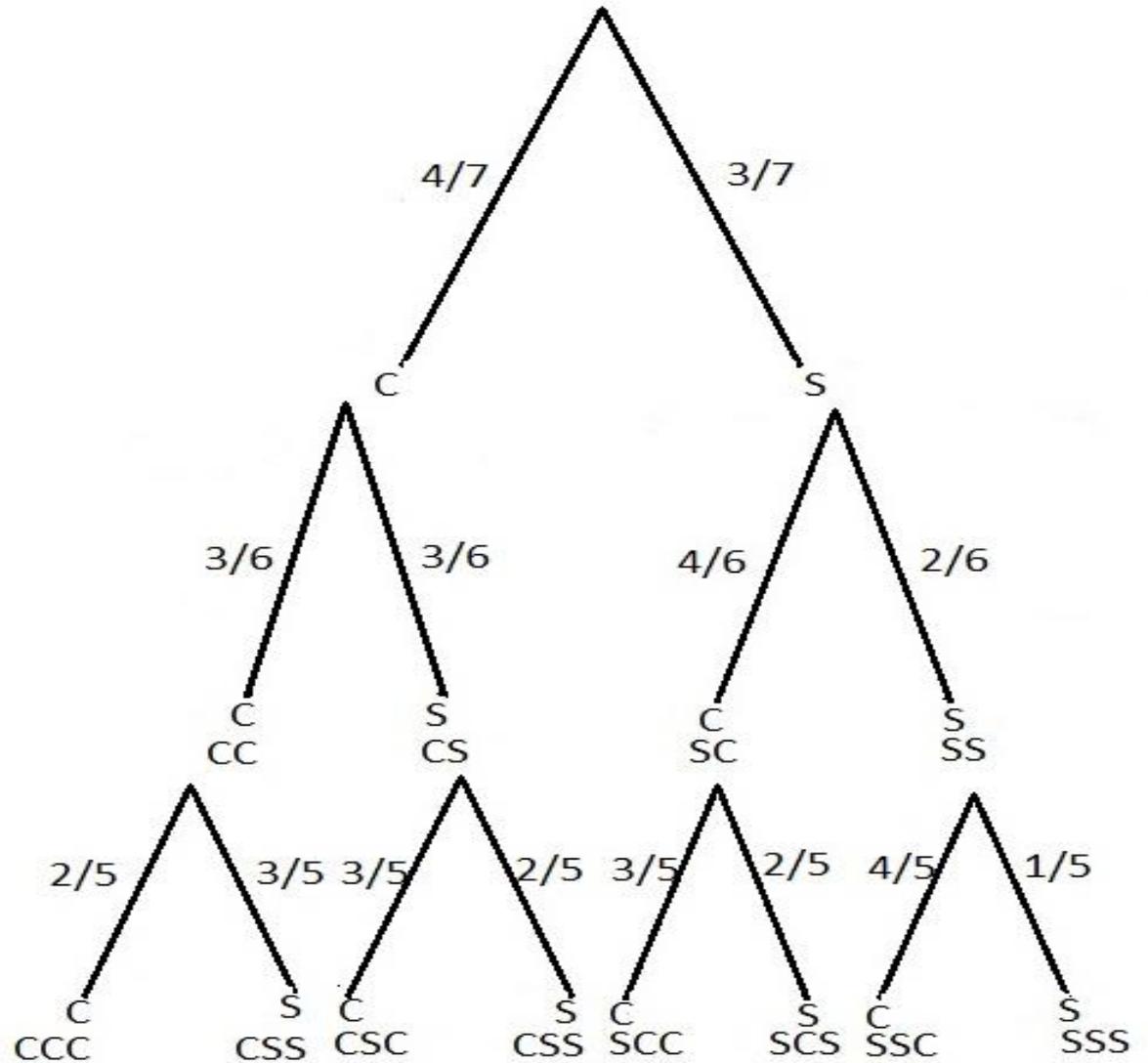
In riferimento ad alunni di scuola secondaria di primo grado:

- **risolvere il problema**
- **indicare le possibili difficoltà**

In una scatola ci sono 7 pile uguali, di cui 3 sono scariche.

- Se prendo a caso una pila, qual è la probabilità che sia carica?
- Se prendo a caso due pile, qual è la probabilità che siano entrambe cariche? E quale quella che solo una delle due sia carica?
- Se prendo a caso tre pile qual è la probabilità che almeno due siano cariche? E quella che almeno due siano scariche?

Un grafo come questo può fornire una utile rappresentazione



Il quesito è stato assegnato a 34 insegnanti di scuola secondaria di primo grado nell'ambito di un corso di formazione

Soluzioni interamente corrette 7

1) Difficoltà nella comprensione del testo:

Il testo dice:

“In una scatola ci sono 7 pile uguali, di cui 3 sono scariche.”

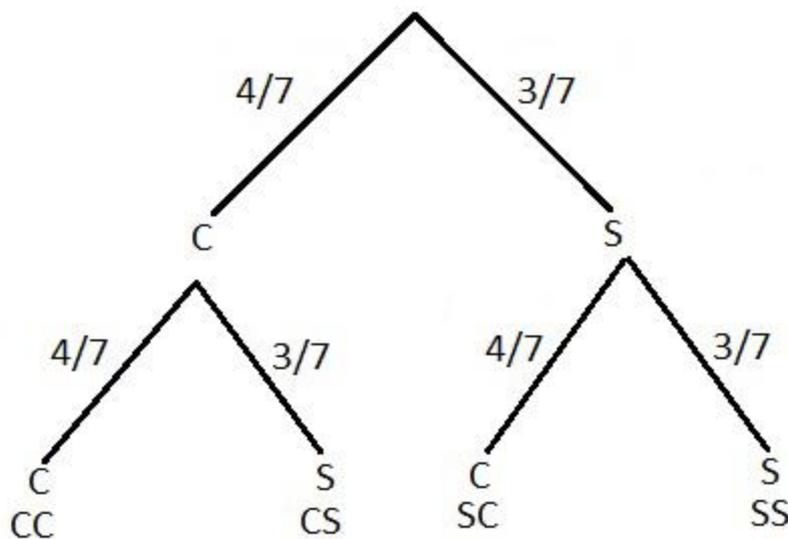
Soluzione proposta:

Numero totale pile: $7+3=10$

Errore dovuto ad una lettura non attenta e/o ad un automatismo nel sommare i dati ???

2) Difficoltà nella costruzione di un modello che possa corrispondere alla situazione proposta

Molti hanno modellizzato l'estrazione contemporanea di due pile da una scatola come due estrazioni successive con reimbussolamento.



3) Errata comprensione del significato dei termini “almeno due”, “una sola” carica. . .

“Se prendo a caso due pile qual è la probabilità che solo una delle due sia carica?”

Soluzione errata

Calcolare solo $P(CS)$ e non $P(CS)+P(SC)$

“Una sola” è stato considerato equivalente a “la prima”

“Se prendo a caso tre pile qual è la probabilità che almeno due pile siano cariche?”

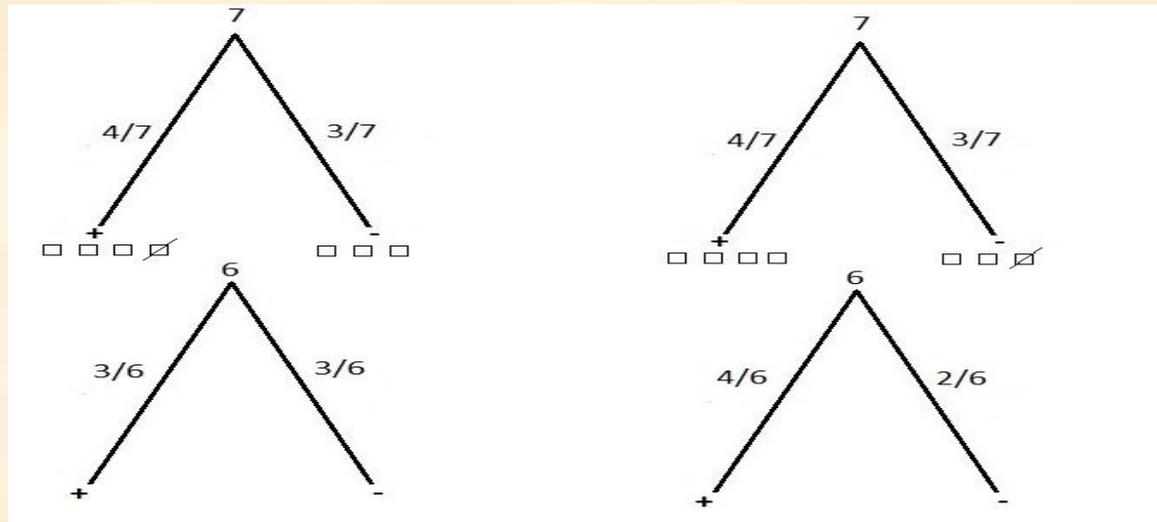
Soluzione errata

$$P(\text{CCS}) + P(\text{CSC}) + P(\text{SCC})$$

Sono stati considerati tutti i casi in cui prendendo a caso tre pile compare due volte la pila carica escludendo il caso in cui si verifica l'uscita della pila carica tre volte CCC.

“almeno due” non viene distinto da “esattamente due”.

4) Difficoltà nella rappresentazione della situazione descritta nel problema attraverso un grafo ad albero o una tabella a doppia entrata



Una corsista propone questi grafi che rappresentano separatamente le singole situazioni ma non aiutano nella soluzione

Rappresentazioni tramite tabella a doppia entrata:

	C	C	C	C	S	S	S
C	CC	CC	CC	CC	CS	CS	CS
C	CC	CC	CC	CC	CS	CS	CS
C	CC	CC	CC	CC	CS	CS	CS
C	CC	CC	CC	CC	CS	CS	CS
S	SC	SC	SC	SC	SS	SS	SS
S	SC	SC	SC	SC	SS	SS	SS
S	SC	SC	SC	SC	SS	SS	SS

Gli autori del compito considerano 49 casi possibili.

Non vedono che le coppie della diagonale principale rappresentano l'estrazione di una pila con se stessa.

Un altro esempio:

Due ragazzi, Claudio e Giulio giocano a dadi.

Ognuno lancia due dadi e somma i punteggi ottenuti.

Vince chi ottiene il punteggio più alto.

Lancia per primo Claudio e ottiene come somma 7.

Che probabilità ha Giulio di vincere?

Ora Claudio e Giulio cambiano gioco e, sempre lanciando due dadi, decidono che Claudio vince se la somma è un numero primo mentre Giulio vince se la somma è multiplo di 3

Chi ha maggiore probabilità di vincere?

Trovare le rispettive probabilità.

Difficoltà nella individuazione degli eventi e nell'uso di una tabella appropriata: rappresentano coppie di punteggi, non somme

In generale gli errori degli insegnanti sono gli stessi segnalati da altri nei loro commenti

Nella discussione successiva molti giustificano le loro difficoltà con la mancanza di tempo per svolgere l'argomento a scuola e con la maggiore presunta difficoltà di questi esercizi rispetto a quelli dei loro testi.

Quali proposte allora? (anche per la formazione)

- Una diversa distribuzione dei temi nei tre anni (m@t.abel e altri percorsi)
- Collegamento con le frazioni e i numeri decimali
- Uso dei grafi (e di altre rappresentazioni)
- Applicazioni alla genetica e a altri temi non matematici
- I “nuovi” giochi (il gioco d’azzardo)

Testi esaminati:

- A) C. Bertinetto, A. Metiainen, J. Paasonen, E. Voutilainen,
“Contaci!” ed. Zanichelli;
- B) M. Zarattini, L. Aicardi, M. Cerofolini,
"Matematica intorno a te", ed. Mondadori;
- C) E. Nicoletti, M. Servida, G. Somaschi,
“Matematica con metodo” , ed. Cedam.