CORSO AGGIORNAMENTO DOMENICALE

PADERNO DEL GRAPPA

ANNO SCOLASTICO 2000 – 2001

PROBLEMI.
DALLA ARITMETICA ALLA PROBABILITA',
DALLA PRIMA ELEMENTARE ALLA TERZA MEDIA

APPUNTI DELLE LEZIONI DEL PROF. MARIO FERRARI

1. I problemi nei programmi di matematica.

La prassi didattica italiana non privilegia certo, in generale, un insegnamento per problemi. In genere nei libri di testo e nelle attività in classe e a casa si risolvono tanti esercizi, ma pochi problemi interessanti.

Eppure il posto dei problemi nei programmi di matematica è di tutto rispetto.

1.1. Scuola elementare

Basta ricordare, al di là di affermazioni sparse nei programmi, che il primo tema è proprio dedicato ai problemi.

a) I problemi. - Il pensiero matematico è caratterizzato dalla attività di risoluzione di problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte. Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza e quali sono le difficoltà che incontra.

Occorre evitare, peraltro, di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze.

Obiettivi:

- Tradurre problemi elementari espressi con parole in rappresentazioni matematiche, scegliendo le operazioni adatte; quindi trovare le soluzioni e interpretare correttamente i risultati; inversamente, attribuire un significato a rappresentazioni matematiche date;
- Individuare situazioni problematiche in ambiti di esperienza e di studio e formularne e giustificarne ipotesi di risoluzione con l'uso di appropriati strumenti matematici, sia aritmetici sia di altro tipo;
- Risolvere problemi aventi procedimento e soluzione unici e problemi che offrono possibilità di risposte diverse, ma ugualmente accettabili;
- Individuare la carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo.

E' un tema denso di concetti:

- Importanza dei problemi per la matematica
- Loro corrispondenza alla psicologia del bambino
- Importanza didattica
    - Come punto di partenza per la costruzione di concetti
    - Come strumento di valutazione di risultati, processi e strategie

Dal linguaggio comune alla espressione matematica e viceversa

Pluralità di tipi di problemi

1.2. Scuola Media

Tra gli "obiettivi" contenuti nelle "Indicazioni generali" vi è "porsi problemi e prospettarne soluzioni". Nel primo tema dedicato alla geometria leggiamo:

" c) semplici problemi di isoperimetria e di equiestensione "

Il quarto tema è

Problemi ed equazioni

> a) Individuazione di dati e di variabili significative in un problema. Risoluzione mediante ricorso a procedimenti diversi (diagrammi di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche...).
>
> b) Lettura, scrittura, uso e trasformazioni di semplici formule. c) Semplici equazioni e disequazioni numeriche di primo grado

1.3. Scuola secondaria superiore

Sembrerebbe, ed è effettivamente, il regno dell'insegnamento per teorie, ma i programmi Brocca sono molto categorici.

Nelle " finalità " del settore " Matematica e informatica " si legge:

> *"La matematica, parte rilevante del pensiero umano ed elemento motore dello stesso pensiero filosofico, ha in ogni tempo operato su due fronti: da una parte si è rivolta a risolvere problemi ed a rispondere ai grandi interrogativi che via, via l'uomo si poneva sul significato della realtà che lo circonda; dall'altra, sviluppandosi autonomamente, ha posto affascinanti interrogativi sulla portata, il significato e la consistenza delle sue stesse costruzioni culturali".*

Nelle "Indicazioni didattiche" leggiamo:

"Non ci si può illudere di poter partire dalla disciplina già confezionata, cioè

da teorie e concetti già elaborati e scritti, senza prendersi cura dei processi 1.
costruttivi che li riguardano. E' invece importante partire da situazioni didattiche che favoriscano l'insorgere di problemi matematizzabili, la pratica

di procedimenti euristici per risolverli, la genesi dei concetti e delle teorie, l'approccio a sistemi assiomatici e formali. Le fonti naturali di queste situazioni sono il mondo reale, la stessa matematica e tutte le altre scienze. Ciò lascia intravedere possibili momenti di pratica interdisciplinare, prima nella scoperta e nella caratterizzazione delle diverse discipline in base al loro oggetto e al loro metodo, poi nel loro uso convergente nel momento conoscitivo. [...]

Il problema didattico centrale che si pone al docente nell'attuazione dei programmi risiede nella scelta di situazioni particolarmente idonee a far insorgere in modo naturale congetture, ipotesi, problemi. Per una pratica didattica così finalizzata, offrono prioritaria ispirazione i risultati delle ricerche in campo storico - epistemologico, in quello psico - pedagogico, nonché in quello metodologico - didattico.

La scelta delle situazioni e dei problemi rientra in un quadro più vasto di progettazione didattica che si realizza attraverso la valutazione delle disponibilità psicologiche e dei livelli di partenza dei singoli studenti, l'analisi e la determinazione degli obiettivi di apprendimento, l'analisi e la selezione dei contenuti, l'individuazione di metodologie e tecniche opportune, l'adozione di adeguate modalità di verifica. Questa progettazione sostiene il lavoro didattico, favorisce la collocazione dei contenuti nel quadro del sapere scientifico, permette di individuare con più chiarezza la loro importanza e la difficoltà del loro apprendimento."

Anche i programmi del triennio insistono sui problemi:

- Obiettivi

  Saper affrontare a livello critico situazioni problematiche di varia natura scegliendo in modo flessibile e personalizzato le strategie di approccio.

- Indicazioni metodologiche:

"Si ricorda a questo proposito che il termine problema va inteso nella sua accezione più ampia, riferito cioè anche a questioni interne alla stessa matematica; in questo caso potrà risultare didatticamente proficuo storicizzare la questione presentandola come una successione di tentativi via, via portati livello di rigore e di astrazione sempre più spinti".

L'insegnamento per problemi non esclude però che il docente faccia ricorso ad esercizi di tipo applicativo, sia per consolidare le nozioni apprese dagli allievi, sia per far acquisire loro una sicura padronanza del calcolo."

2. Matematica e problemi

La matematica è nata per risolvere problemi. Ogni sua teoria, soprattutto nella fase della giovinezza e della creatività, affronta e risolve problemi, interni alla matematica o proposti da realtà esterne; spesso nella fase della sua maturità cerca di inquadrare i problemi in vaste classi e di stabilire fra essi una gerarchia.

2.1. La geometria, come dice il nome, è nata per risolvere problemi di misure di appezzamenti di terreni dopo le periodiche inondazioni del Nilo. Le poche formule geometriche note agli Egiziani riguardavano calcoli di aree e volumi.

2.2. L'aritmetica è nata per contare e registrare oggetti e per rendere più facili gli scambi commerciali (Babilonesi e Fenici).

2.3.I più antichi "libri" di matematica che ci sono pervenuti sono esclusivamente di problemi. Dall'Egitto è arrivato il "Papiro di Rhind", dal nome dell'inglese che lo comprò a Luxor nel 1858, chiamato anche "Papiro di Ahmes" dal nome dello scriba che lo copiò intorno al 1650 a C. Il papiro contiene 80 problemi di aritmetica, di algebra e di geometria.

Ecco un esempio: "Se ad una quantità si sommano i suoi $\frac{2}{3}$ e dalla somma si sottrae $\frac{1}{2}$ otteniamo 10. Quanto è la quantità?"

Dalla Mesopotamia ci sono pervenute circa 50 000 tavolette d'argilla di cui molte di argomento matematico. Alcune contengono calcoli, altre problemi di aritmetica, di algebra e di geometria.

Ecco un esempio: "Una trave lunga 30 è appoggiata a una parete. Il suo estremo superiore si è spostato verso il basso di 6. Di quanto si è spostato l'estremo inferiore?"

2.4. In Grecia, la matematica subisce un lento processo di astrazione e si. trasforma in "matematica pura", in "matematica contemplativa". Esempio tipico` sono gli Elementi di Euclide. In essi non ci sono problemi pratici, né di applicazione della matematica alle scienze.

Ci sono, però, problemi matematici. Delle 465 proposizioni degli Elementi, circa un centinaio sono problemi. La prima proposizione del libro 1 è un problema: "Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero".

Inventore di strumenti e fenomenale solutore di problemi matematici fu Archimede, il più grande matematico dell'antichità. Basta ricordare il titolo di una sua opera: "Misura del cerchio". La proposizione III dice: "La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro e di più di dieci settantunesimi". In simboli: $\left(3+\frac{10}{71}\right)d<C<\left(3+\frac{1}{7}\right)d$ dove C è la lunghezza della circonferenza e d quella del suo diametro.

2.5. Composta esclusivamente di problemi è l'Aritmetica di Diofanto (III-IV secolo d. C.), in 13 libri di cui ci sono pervenuti i primi 6 e un frammento del settimo.

Questo manuale si configura come una raccolta di 189 problemi formulati in termini di esempi numerici specifici e, quindi, con una evidente fisionomia didattica.

Ecco un esempio: "Dividere l'unità in due numeri ed aggiungere a ciascuno di essi un numero dato in modo che il prodotto delle somme sia un quadrato".

2.6. La letteratura matematica indiana era motivata dalla astronomia e si trova in libri dedicati all'astronomia.

Sono molti, però, anche i problemi, più o meno pratici, più o meno divertenti, presentati dai matematici indiani. Ecco un esempio: "La quinta parte di un branco di scimmie, meno tre, al quadrato, entrò in una caverna; una era in vista essendosi arrampicata su un albero. Dire quante erano".

2.7. Con Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, inizia il "rinascimento" della matematica nell'Europa cristiana.

I suoi scritti, a cominciare dal capolavoro, il Liber abaci (1202), sono sostanzialmente libri di problemi di aritmetica commerciale e finanziaria el di geometria. Ne riporto uno: "Un lavoratore avrebbe dovuto prendere 7 bisanti al mese se avesse lavorato, mentre avrebbe dovuto restituire 4 bisanti per un intero mese di assenza dal lavoro. Questi talvolta lavorò e talvolta no ed alla fine del mese ricevette un solo bisante. Quanti giorni lavorò?"

2.8. Nei secoli XV e XVI furono fiorenti in Italia molte "botteghe d'abaco", dove si insegnava a fare i calcoli, a tenere la contabilità di banche ed esercizi commerciali, le conversioni tra le varie monete e le diverse unità di misura. La letteratura prodotta e usata in queste botteghe, e rimasta sostanzialmente inedita fino a tempi recenti, era fatta soprattutto di esempi pratici e di problemi con essenziali e stringate premesse teoriche.

Mi limito a ricordare "larte de labbacho" detta anche "Aritmetica di Treviso", di autore ignoto, stampata a Treviso nel 1478. Riporto uno dei suoi problemi: "Maistri 17 fano in 9 zorni 2 case. Domando maistri 20 in quanti zorni faranno 5 case".

2.9. Questa tradizione dei problemi continuò anche in opere che non uscivano dalle botteghe di abaco e che non avevano una destinazione commerciale. Mi riferisco alle opere di Luca Pacioli (1445 - 1514), Nicolò Tartaglia (1506 - 1559), Girolamo Cardano

(1501-1576), Rafael Bombelli (1525 - 1573).

Ecco un esempio tratto dalla "Summa de aritmetica geometrica proportioni et proporzionalità", di Pacioli pubblicata a Venezia nel 1494. "Uno compra 7 ova per tanto men de 12 denari quanto che li costò li 12 ovi men de 8 denari. Dimando che valse l'ovo".

2.10. Con Galileo incomincia il processo di matematizzazione della scienza e

quindi l'uso della matematica nella soluzione di problemi scientifici. Riporto un celeberrimo passo di Galileo: "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intendere la lingua, e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile ad intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto".

Questo processo raggiunge un picco altissimo con i "Philosophiae naturalis principia mathematica"pubblicati da Newton nel 1687.

Naturalmente esso continuò ad estendersi ed ora sono moltissime le più disparate discipline che utilizzano strumenti matematici.

Sono nate anche polemiche vivaci tra i cultori della "matematica pura" e quelli della "matematica applicata". Se ne può avere un'idea leggendo il capitolo "L'isolamento della matematica" dal volume "Matematica la perdita della certezza" di M. Kline.

3. Problemi e insegnamento della matematica

Stante quanto detto nel paragrafo precedente ci si può domandare come mai nell'insegnamento della matematica, a qualunque livello scolare, i problemi abbiano, tutto sommato, una posizione marginale. Le cause sono diverse.

3.1. L'insegnamento della matematica, soprattutto nella scuola superiore, è sempre stato sotto l'influsso degli Elementi di Euclide ritenuti un esempio insuperato di libro di testo. Gli Elementi procedono con il metodo della "sintesi": enunciazione dei principi fondamentali (postulati), definizioni, teoremi. I problemi, pur presenti negli Elementi, sono sempre e solo problemi interni alla matematica che si risolvono applicando la teoria già studiata.

Questo è stato il modello dell'insegnamento della matematica, specie della geometria, dal secolo XVI in poi nel mondo europeo.

Ci sono stati, però, dei tentativi di reazione alla impostazione euclidea nei quali si privilegiavano gli aspetti intuitivi e problematici per arrivare, poi, alla costruzione di una teoria. Qui basterà citare gli: "Elemens de géométrie" del 1741 del francese Alexis - Claude Clairaut (1718 -1765) il quale si propone di "rendere le cose più interessanti e più intelligibili ai principianti" e di "occupare continuamente i miei lettori a risolvere problemi, cioè a cercare i mezzi di fare qualche operazione o di scoprire qualche verità sconosciuta (...). Seguendo questa via, i principianti conoscono a ciascun passo che lor si faccia fare qual è la ragione che determina l'inventore; e così possono acquistare più facilmente lo spirito di invenzione".

Questa linea, però, rimase minoritaria. Basta ricordare che il primo libro di testo per la scuola classica italiana dopo l'unificazione fu, proprio gli "Elementi di Euclide" curati da Betti e Brioschi.

3.2. Un insegnamento per teorie: postulati, definizioni, teoremi, esercizi, oltre che tradizionale, è decisamente più facile che non un insegnamento per problemi. E' il modello dei libri di testo, è il modello dei nostri professori e noi tendiamo a riproporlo nella nostra attività didattica.

3.3. Un insegnamento per problemi è decisamente più impegnativo e difficile per insegnanti ed alunni. Se non vuole essere episodico, estemporaneo e disorganico,

esso prevede l'individuazione di un campo di problemi per risolvere i quali bisogna "inventare" strumenti teorici. I vari segmenti teorici devono poi essere raccordati in una teoria organica.

Tutto questo richiede impegno e fantasia da parte dell'insegnante, impegno e studio da parte dello studente.

Forse per questo i pochi libri di testo che hanno fatto questa scelta non hanno avuto fortuna.

3.4. Nel biennio delle superiori l'algebra fa la parte del leone ed anche nella scuola media la sua posizione è di tutto rispetto. Questo insegnamento si concretizza in una valanga di esercizi, spesso tecnici e noiosi, ma è privo di problemi interessanti.

Problemi interessanti possono essere offerti dall'aritmetica, ma essa non viene studiata nel biennio e non viene utilizzata per questo nella scuola media.

Ecco qualche esempio.

- Se "assaggiamo" qualche terna di numeri naturali consecutivi, ci accorgiamo che in ciascuna c'è un multiplo di 3: 1, 2, 3; 8, 9, !0; ecc. Sarà sempre vero? Qui interviene l'algebra.

  Scriviamo la generica tema: n, n+1, n+2.

  Se n = 3k multiplo di 3 siamo a posto. Altrimenti se n =3k+1 allora n+2 =3k+3 è multiplo di 3; se n=3k+2 allora n+1=3k+3 è multiplo di tre.

- Facciamo il prodotto di tre numeri consecutivi, come 1 x 2 x 3 = 6; 4 x 5 x 6 = 120; 2 x 3 x 4 = 24 ecc. In ciascuna terna prendiamo il numero centrale, ne facciamo il cubo e gli sottraiamo il numero stesso: 23- 2 = 6; 53- 5 = 120; 3^3 -3= 24
  I risultati saranno sempre uguali? Basta fare (n —1) * n * (n + 1) e confrontarlo
  Con n^3 — n. Si trova (n — 1) * n * (n + 1) = n^3 —n

- Devo andare in città. Che cosa mi conviene fare: prendere un taxi che costa 300 lire al chilometro o noleggiare una macchina che costa 4000 lire di fisso e 100 lire al chilometro?

Lo si può risolvere per tentativi nella scuola elementare ed è una buona occasione per fare ipotesi e poi verificarle; nella scuola media si può ricorrere ad una equazione o a una disequazione.

3.5. Nella scuola elementare, nonostante il tema "I problemi", la richiesta più pressante degli insegnanti è di riempire il sussidiario di tanti esercizi ripetitivi. I problemi che fanno riflettere insegnanti e bambini sembra che non interessino.

4. Letteratura matematica recente sui problemi

Citerò solo scritti in italiano facilmente reperibili o fotocopiabili e relativi alla scuola dell'obbligo.

4.1.Articoli pubblicati sulla rivista

- Pellerey M. "*Ruolo dei problemi nell'apprendimento della matematica*", vol.2 (1979), N. 1
- Borasi R., "*Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulla sua utilizzazione nella Didattica della Matematica*", vol. 7 (1984) N. 2
- Borasi R., "*L'insegnamento interpretato come soluzione di problemi di carattere educativo*", vol. 7 (1984) N. 3
- Manara C. F., "*L'insegnamento della matematica per problemi. Spunti di discussione*", vol. 7 (1984) N. 3
- Antiseri D., "*Insegnare per problemi*", vol. 8 (1985) N. 1, N. 2, N. 3
- Mammana C. e altri, "*Ricerca sul ruolo dei problemi nell'educazione matematica*". Parte prima, vol. 9 (1986) N. 8. Parte seconda, vol. 10 (1986) N. 10
- Boero P., "*Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare*" vol. 9 (1986) N9
- Mostacci C., "*Il " problema" nei modelli concettuali del preadolescente. Rapporto su una esperienza*", vol. 10 (1987) Ni
- Galletti e altri, "*La strategia dell'inventar problemi*", vol. 13 (1990) N1
- Pesci A. “*Problemi inversi e schemi a frecce in media*”, vol. 14 (1991) N1
- Zan R., “*I modelli concettuali di " Problema" nei bambini della scuola elementare*”, Parte prima vol.14 (1991) N7; Parte seconda N 9; Parte terza, vol. 15 (1992) N1
- Malara N., *Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza*”, vol. 16 (1993) N 10
- Boero P., Ferrari P. L., Rassegna di alcune ricerche sul "*Problema dei problemi*"• loro importanza per l'insegnamento, vol. 11 (1988) N7 — 8
- Tonelli M., Zan R.; “*Il ruolo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione dei problemi*”, vol. 18 A (1995) Ni
- D'Amore B. e altri, “*La ri - formulazione dei testi dei problemi scolastici standard*”, vol. 18 A (1995) N2
- Colombo Bozzolo C., “*L'angolo dei problem*i”,

  vol. 19A (1996) N1, N2, N3, N4, N5

  vol. 20A (1997) Ni, N2, N3

  vol. 21A (1998) Ni, N2, N3, N4

  vol. 22A (1999) N2

Ferrari M., “*Problemi per la prima elementare... e oltre*”, vol. 20A (1997) N3, N4, Vol. 21A (1998) N1.

Ferrari M., “*Problemi per la seconda elementare... e oltre*”, vol. 21A (1998) N2, N3, N4.

Ferrari M., “*Problemi per la terza elementare... e oltre*”, vol. 22A (1999) N1, N3, N4, N5.

4.2. Libri

Bruno D'Amore, “*Problemi, pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solvine*”, Franco Angeli, Milano 1993

S. I. Brown — M. I. Walter, “*L'arte del problem posino*”, SEI, Torino 1988

C. Bernardi e altri, “*Il numero e le abilità numeriche*”, La Nuova Italia, Firenze 1991.

L. Artusi Chini (a cura di), “*Numeri e operazioni nella scuola di base”*, Zanichelli, Bologna 1985.

F. Ferri (a cura di), “*Apprendimento per problemi in matematica nella scuola elementare*”, Rapporto tecnico n. 14. Comune di Modena. 1989.

E. Gallo (a cura di), “*Problemi e situazioni problematiche*”, Torino 1984

G. Polya, “*Come risolvere i problemi di matematica*”, Feltrinelli, Milano 1983

Martelli e altri, “*I problemi nella pratica didattica”*, Franco Angeli, Milano 1993

Colombo Bozzolo - M. Ferrari, “*Problemi di aritmetica*”, Quaderno n. 10 del C.R.D.U.M.

5. Il problema: un concetto relativo

Qualunque cosa si intenda con la parola "problema", fra poco vedremo alcune definizioni, è certo che si tratta di un concetto relativo, cioè che dipende dalle persone, dalle circostanze, dagli strumenti che si hanno a disposizione, dalle informazioni possedute, dall'epoca considerata.

5.1. Fino al 1995 l'ultimo teorema di Fermat, cioè la risolubilità in numeri naturali della equazione x" + y" = z" per n > 2 era un problema per tutti i matematici. Ora il problema è stato risolto e, quindi, non è più un problema.

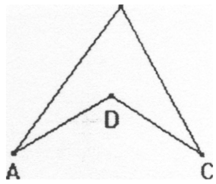
5.2.A tutt'oggi sono ancora problematiche le due seguenti situazioni:

- È vero che tutti i numeri pari maggiori di 2 si possono scrivere come somma di due numeri primi?
- I numeri primi gemelli, cioè coppie di numeri primi che differiscono di 2, sono infiniti o no?

Fra cent'anni potrebbero non essere più problemi.

5.3. Secondo la mia esperienza ci sono situazioni che sono problematiche, quasi allo stesso modo, per alunni ed insegnanti. B

- Una colonna è alta 3 m. Una lumaca durante il giorno sale 1 m; durante la notte scende di mezzo metro. Quanti metri percorre per arrivare in cima alla colonna?
- ABCD è un quadrilatero con le diagonali perpendicolari. Quanto vale l'area?



5.4.I problemi dei sussidiari, anche quando sono seri, sono problemi per gli studenti, ma non lo sono per gli insegnanti.

6. Che cosa è un problema?

Riporto alcune "definizioni" o descrizioni presenti nella letteratura.

Ecco il pensiero di G. Polya. "Risolvere un problema è trovare mezzi non noti per raggiungere un fine distintamente concepito. Se il fine, con la sua semplice presenza, non suggerisce istantaneamente i mezzi; se, quindi, si devono ricercare i mezzi, riflettendo consapevolmente su come raggiungere il fine, allora si deve risolvere un problema. Risolvere un problema significa trovare una strada dove nessuna strada è nota ancora, trovare una strada per uscire da una difficoltà, trovare una strada per aggirare un ostacolo, al fine di raggiungere con mezzi appropriati uno scopo desiderato, che non sia immediatamente raggiungibile".

"Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano".

"Risolvere problemi è la natura umana stessa. Si può caratterizzare l'uomo come l'animale che risolve problemi".

Altre proposte.

"Quando una persona si trova di fronte ad una situazione e il bagaglio delle risposte intuitive o abituali non gli permette di venirne a capo, tale situazione è un problema". OLERON citato da G. Glaeser

"Un problema, è una situazione che differisce da un esercizio poiché colui che deve risolverlo non ha a disposizione un procedimento o algoritmo che può con certezza condurlo alla soluzione". Kantowski

"Un problema è un compito per cui:

- l'individuo o il gruppo che si confronta con esso vuole o ha bisogno di trovare una soluzione,
- Non c'è una procedura immediatamente accessibile che garantisca o determini in modo completo le soluzioni,
- L'individuo o il gruppo devono fare uno sforzo per trovare una soluzione". Lester

<u>Problema</u>: ogni situazione di fronte alla quale il repertorio di risposte immediatamente disponibili non permette di fornire una reazione adeguata.

Si può parlare di problema quando, partendo da una situazione in cui si conosce un certo numero di informazioni, si devono trovare nuove informazioni ricorrendo alle varie forme dell'intelligenza. (Traversi)

"Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla". (Duncker)

6.1. Un problema suppone la presenza di un ostacolo, di una difficoltà che non sia immediatamente superabile con i mezzi che si hanno a disposizione. In caso contrario si avrebbe, in matematica, un esercizio, qualunque sia la sua formulazione.

6.2. Un problema richiede l'attivazione di ragionamenti, collegamenti, di ricerche ed, eventualmente, di fantasia e inventività.

6.3. Un problema richiede uno scopo da raggiungere ed una motivazione per raggiungerlo. In caso contrario la situazione prospettata potrà essere problematica in se stessa, ma non per Pierino.

7. Principali elementi costitutivi di un problema

Vi presento ora una prima analisi degli elementi costitutivi di un problema, contenuta nell'articolo della Borasi (1984). Siccome qui si fa continuamente riferimento agli 8 problemi che la Borasi presenta nel suo articolo e che io non ho riprodotto, allora riporto la fedele interpretazione che ne fa la Ferri (1989).

> A questo punto iniziano a delinearsi con una certa chiarezza alcuni degli elementi che differenziano il problema, nel senso in cui noi lo intendiamo, e il problema - esercizio. Certamente tra gli elementi più significativi va sottolineato e ribadito questo: **nella risoluzione di un problema tutti gli aspetti del pensiero sono coinvolti, mentre nella risoluzione di un problema - esercizio si ha soltanto la riproduzione di schemi noti, quindi, soltanto, uno sforzo mnemonico di ricerca dello schema risolutivo**. Con questo discorso non intendiamo negare una certa importanza da attribuirsi ancora ai problemi - esercizi: è chiaro che il mantenimento delle conoscenze e la memorizzazione di tecniche o schemi, richiede necessariamente una attività di esercizio ripetitiva. Un progetto didattico, equilibrato deve riservare tempi ad attività di entrambi i tipi (Christiansen & Walther). Fino ad ora abbiamo individuato elementi che permettono di riconoscere se una data attività proposta può considerarsi o meno un'attività di risoluzione di problemi. Ci occuperemo ora invece di alcuni elementi che potremmo dire "intrinseci" al problema, elementi che Borasi chiama *elementi costitutivi del problema*. Gli elementi di cui stiamo parlando sono i seguenti:
>
> - La formulazione del problema, owero l'esplicita definizione del compito da svolgere, cioè degli obiettivi da raggiungere;
> - Il contesto in cui si inquadra il problema;
> - L'insieme delle soluzioni accettabili;
> - I metodi che potrebbero essere usati per affrontare la soluzione del problema.

7.1. Formulazione

La formulazione è tradizionalmente l'elemento che permette di avvicinarsi al problema. Quando parliamo di formulazione del problema, intendiamo fare riferimento a tutto ciò che fornisce indicazioni sul compito da svolgere, sugli obiettivi che si vogliono raggiungere. Così la formulazione può essere esplicitata nel testo sotto forma di domande a cui rispondere, di consegne da eseguire, ma può anche non essere esplicitata direttamente ed essere demandata al solutore del problema.

Esempio. Queste sono terne pitagoriche: ($x^2 + y^2 = z^2$)

3	4	5
6	8	10
5	12	13
0	48	52
8	15	17

Che cosa puoi dire?

Questa domanda serve solo a stimolare il solutore a porsi delle domande.

- Come sono i numeri delle singole terne?
  - due dispari e uno pari;
  - tre pari, ma la seconda si ottiene dalla prima moltiplicando per 2 e la quarta dalla terza moltiplicando per 4.
- Quali rapporti ci sono fra i numeri di una terna?
  - Il terzo è maggiore degli altri due e minore della loro somma (disuguaglianza triangolare).
  - La somma dei quadrati dei primi due è uguale al quadrato del terzo.
- Quante terne pitagoriche ci sono?
  - Infinite, perché da una ne posso ottenere infinite altre moltiplicando i tre numeri per uno stesso numero.
  - Anche le altre terne, quelle primitive, sono infinite.

7.2. Contesto

Da R. Borasi leggiamo:

> "*Si intende per "contesto" tutto ciò che nel testo viene espresso esplicitamente o implicitamente, allo scopo di inquadrare il problema, e che provvede le varie informazioni necessarie a risolverlo*".

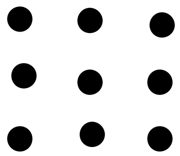
Fanno dunque parte del contesto quelli che vengono detti i dati del problema, cioè le informazioni che sono date espressamente dal testo o dalla situazione presentata.

Del contesto possono far parte anche degli elementi impliciti. Per esempio in un problema aritmetico (terne pitagoriche) le proprietà fondamentali dei numeri naturali sono una parte essenziale, sebbene implicita, del contesto.

Talvolta il solutore inserisce nel contesto di certi problemi condizioni, in generale restrittive, che il problema non prevede.

Prendiamo il seguente testo: *E' possibile costruire con 6 fiammiferi 4 triangoli equilateri*? La maggior parte delle persone a cui viene posta questa domanda cerca di rispondervi prendendo in mano carta e penna e disponendo in diversi modi sul foglio i 6 fiammiferi, concludendo, dopo un certo tempo, che la costruzione non è possibile. Anche avendo a disposizione i 6 fiammiferi, difficilmente si arriva a dare una soluzione, perché si continua a lavorare nel piano rendendo, di fatto, impossibile la costruzione dei 4 triangoli equilateri che possono invece essere costruiti nello spazio come facce di un tetraedro. Nel testo non si danno indicazioni circa lo spazio in cui operare (se bi o tridimensionale). Il vincolarsi a cercare la soluzione operando nel piano è dunque imporre una condizione che il testo non richiede: il contesto viene mutato in modo rilevante.

Un altro esempio tipico è il seguente: unire i nove punti con 4 segmenti che passano una sola volta per ogni punto e tracciati senza sollevare la matita dal foglio.



La condizione restrittiva che spesso il solutore inserisce è quella di non" uscire" dal "quadrato" dei nove punti, rendendo insolubile il problema.

Questi due esempi (ma altri potrebbero essere forniti) dovrebbero bastare a fare comprendere l'importanza che ha il contesto di un problema e l'attenzione che deve essere posta su di esso. Anche riguardo la ricerca dei metodi di soluzione di un problema spesso si vincola involontariamente la loro ricerca ad una certo contesto (ad -esempio aritmetico) trascurandone altri, nei quali la ricerca potrebbe risultare più proficua.

7.3.Insieme delle soluzioni

Riguardo all'insieme delle soluzioni bisogna tenere presente la grande varietà di situazioni che si possono presentare (a differenza del problema esercizio che di norma ammette una e una sola soluzione)

Così possono aversi:

- Problemi che ammettono *una e una sola soluzione*.
- Problemi che ammettono *più soluzioni, anche infinite*; (in alcuni di questi, il contesto è troppo povero per potere determinare soluzioni o dimostrare che non possono esserci soluzioni);
- Problemi che *non* ammettono soluzioni.

È importante osservare qui come il passaggio dalla ricerca di una soluzione, alla ricerca di *tutte le soluzioni di un problema* sia di fondamentale importanza. Se ci si accontenta di trovare una soluzione si può procedere per tentativi e raggiungere l'obiettivo per puro caso.

Se vogliamo, invece, trovare tutte le soluzioni (eventualmente una soltanto) è necessaria una strategia che permetta di dimostrare che effettivamente quelle trovate sono *tutte e sole le soluzioni del problema*.

Esempio

Ho messo 10 frutti in un cesto. Un po' sono pere ed un po' sono mele. Quante possono essere le pere? E le mele?

Trovare una soluzione è immediato. Basta prendere due numeri la cui somma è 10. L'insieme di tutte le soluzioni, dal punto di vista matematico, è rappresentato dalle coppie di numeri naturali che verificano l'equazione $x+y=10$ e sono 11.

I bambini potranno esprimersi in termini di "numeri amici del 10", ma il testo li costringe a scartare le "soluzioni estreme", cioè (0,10) e (10,0).

Problemi significativi con infinite soluzioni possono essere dati anche alla scuola elementare.

Esempio: i pennarelli di Lucia

A Lucia piace molto giocare con i numeri. L'altro giorno contando i suoi pennarelli si è accorta che contandoli per 2 ne avanza 1, contandoli per 3 ne avanza 2, contandoli per 4 ne avanza 3. Sapresti indovinare quanti pennarelli ha Lucia?

Un esame di questo problema si trova in IMSI vol. 22A N.3 maggio 1999 pag. 279. Qui basta dire che le infinite soluzioni in numeri naturali sono date dalla formula 11+12K dove 11 è la soluzione "minima" e K è un numero naturale qualunque.

I problemi che non ammettono soluzione sono di due tipi:

- Per insufficienza di informazioni
- Per contraddittorietà dei dati.

Esempi

"Matteo e Luca sono due fratelli. Matteo studia più volentieri di Luca. Oggi sono tornati a casa da scuola alle 12 e mezza. Matteo deve studiare storia e alle 17 ha già finito; Luca, invece, chiude il libro di matematica alle 18. Chi ha studiato di più? Perché?"

Qui basta "inventare" l'ora d'inizio dello studio per risolvere il problema.

"In un cesto ci sono 25 frutti. Le mele sono il doppio delle pere. Quante sono le mele? E le pere?"

Indicando con x il numero delle pere, il problema si traduce nella equazione $x + 2x = 25$ $3x = 25$ che non può avere soluzioni in numeri interi. I dati contraddittori sono: 25 e il doppio.

7.4. Metodi di soluzioni

Per quanto concerne i metodi di soluzione bisogna segnalare che troppo spesso;'da questo punto di vista, i testi dei problemi che vengono presentati sono molto poveri.

In altre parole, si dà quasi sempre per scontato che il metodo di soluzione debba essere unico e si tende, anzi, a contrastare i tentativi che non seguono lo schema che viene considerato naturale. Necessario sarebbe un allargamento di vedute: è, infatti, fondamentale proporre problemi che possano essere risolti in diversi modi, con diverse strategie, non privilegiandone nessuna, se non in base a qualche criterio esplicativo (che può essere la brevità, la semplicità, ecc.) accettando che possa non esistere un metodo migliore in assoluto degli altri.

Un esempio tipico di una pluralità di strategie in un problema di aritmetica è il problema "La base segreta" riportato e commentato in IMSI nel 22A N1 gennaio 1999 pag. 82 — 86.

Un'altra analisi degli elementi costitutivi di un problema è stata presentata da Boero (1986). Essa riguarda i problemi aritmetici. Boero distingue due gruppi di elementi:

- Elementi statici

- <u>Testo del problema</u> (in seguito TESTO): nell'insegnamento tradizionale nella scuola elementare è l'elemento di accesso al problema per l'allievo; esso potrebbe però anche essere formulato dall'allievo o con l'allievo a partire da una situazione problematica nota all'allievo o costruita con lui. Tecnicamente il TESTO è costituito da segni linguistici (verbali e non verbali) che possono essere interpretati come "informazioni" e "domande". Confrontando con la "formulazione del problema" di Borasi, mi sembra che in questa l'accento sia messo soprattutto sulla "definizione esplicita del compito da svolgere".
- <u>Situazione problematica</u> (in seguito, SIT. PRO.): è costituita da quegli aspetti del mondo reale e dell'esperienza culturale implicati dal TESTO del problema (quando il TESTO già esiste) o esprimibili attraverso un TESTO. Quindi, la situazione problematica è da intendersi in modo più restrittivo rispetto al "contesto" di Borasi, come "significato del testo" piuttosto che come "contesto della formulazione".

Si noti che facendo riferimento "all'esperienza culturale" oltre che al "mondo reale" la "definizione" di SIT. PRO. SU cui lavoreremo consente di trattare anche problemi inerenti proprietà dei numeri o giochi con i numeri. Si noti altresì, che (come vedremo più in dettaglio al punto 5.) ad una stessa SIT. PRO. possono corrispondere più TESTI.

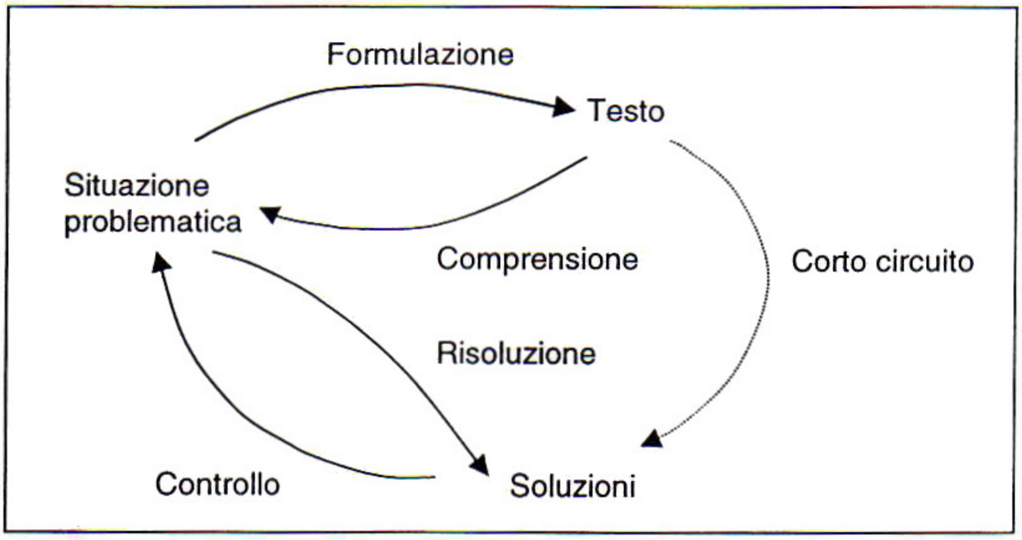
- <u>Soluzione/i del problema</u> (in seguito SOL.): è costituita (come in Borasi) dall'insieme delle soluzioni che possono considerarsi accettabili per il problema (naturalmente, un problema può non avere SOL. accettabili o averne molte).

- Elementi dinamici: riguardano le attività del solutore:

- *Comprensione* del testo, che consente di ricostruire la situazione prolematica;
- *Formulazione* di un testo, che consente di esprimere un compito da svolgere a partire da una situazione problematica data;
- *Risoluzione* che consiste nel determinare un insieme di possibili soluzioni del problema;
- *Controllo* delle soluzioni, che consiste nel verificare i risultati ottenuti.

TAVOLA IX

GLI ELEMENTI COSTITUTIVI DI UN PROBLEMA SECONDO BOERO



Mentre gli elementi statici del problema sono analizzabili prima della proposta in classe, gli elementi dinamici sono, da un lato, oggetto di osservazione e dall'altro, abilità da costruire all'interno del progetto educativo.

Così le prestazioni attese dagli insegnanti in un progetto di apprendimento per problemi sono le capacità di:

- Formulare un testo
- Comprendere un testo
- Risolvere una situazione problematica
- Controllare le soluzioni

Il percorso tradizionale connetteva direttamente il testo con le soluzioni (meglio, un testo stereotipato con una formulazione standard di soluzione) creando un cortocircuito, che rischiava di tagliare, il più delle volte, l'esplorazione della situazione problematica.

8. Il problema e l'insegnante

Possiamo distinguere due momenti diversi.

8.1.Fuori della classe

Che cosa deve fare l'insegnante prima di assegnare un problema serio?

Possiamo esprimere tutto con questa frase: ogni problema serio va accuratamente preparato.

Che cosa comporta tutto ciò?

- Caratterizzare il problema con <u>un titolo</u> attraente, accattivante, così che gli alunni possano facilmente ricordarlo e, quando è il caso, richiamarlo.
- Stendere un testo facilmente comprensibile, con termini il cui significato sia noto agli studenti in modo da evitare una pluralità di interpretazioni e di non aggiungere difficoltà linguistiche a quelle matematiche. Ricordare che il vocabolario degli studenti è molto più povero di quello degli insegnanti e che essi sono specialisti in interpretazioni fantasiose.

Esempio

Nel problema "Per chi fa il tipo Simona?" (IMSI, vol. 22A N5 settembre1999 pag. 483 — 487) l'informazione:

"A Roberta non piacciono né le Alci né i Camaleonti" da qualcuno è stata interpretata nel senso che Roberta non tifa per nessuna squadra (erano 4), da altri nel senso che Roberta tifa quelle due squadre.

- La stessa osservazione vale se si presenta una situazione problematica, magari con un disegno, dalla quale gli studenti devono ricavare un testo.
- Nello stendere un testo, l'insegnante, può, volutamente, presentare un testo ambiguo per osservare come i ragazzi lo interpretano e, poi, giustificano l'interpretazione.

  Esempio

  Un quadrato ha lato lungo 1. Costruisci un quadrato doppio.
  "Doppio", però, può essere il lato oppure l'area e le difficoltà, nelle due interpretazioni, sono completamente diverse.
- L'insegnante deve pensare ai prerequisiti necessari per risolvere un problema e al fatto che i suoi alunni li possiedano o no.

In caso contrario, il problema può avere un effetto devastante sull'autostima degli alunni. È, però, da notare che un problema può essere dato anche per "forzare una situazione", per aprire la strada ad un concetto nuovo necessario per risolverlo e, quindi, per giustificare lo sforzo necessario per conquistarlo.

- L'insegnante deve anche fissare gli obiettivi che intende raggiungere con un problema. Essi saranno certamente matematici, ma possono essere obiettivi di comportamento: come uno studente si comporta davanti ad una difficoltà, come affronta il problema (legge con attenzione, cerca di capire, rilegge, riflette oppure passa subito ai conti, cerca subito una soluzione. Si accontenta di una sola soluzione o ne cerca altre, se ce ne sono?)
- L'insegnante deve inserire il problema in un quadro teorico per capire le difficoltà e per prevedere eventuali ulteriori sviluppi.
- L'insegnante deve prevedere le possibili strategie che un bambino potrebbe usare nella ricerca della soluzione, per essere pronto, in classe, a valutarle, confrontarle e indicare la migliore (la più semplice, la più bella, la più economica, la più efficace).

8.2.In classe

Come comportarsi in classe quando si assegna un problema serio?

- La prima cosa da fare è quella di creare un clima disteso, sereno. Dovrebbe essere il clima normale in tutta l'attività didattica, ma è ancor più necessario nella soluzione di problemi, che richiede allo studente un impegno maggiore. La soluzione di un problema non deve diventare un dramma.
- Bisogna stabilire con gli studenti un preciso e chiaro contratto didattico. Per esempio
  - Dire esplicitamente che la cosa più importante è l'impegno di ciascuno per evitare tentazioni di copiature, di scoraggiamento, di abbandono dell'attività, di rinuncia alle prime difficoltà.
  - Sottolineare che sono più importanti le strategie, i metodi di soluzione che non il risultato finale. E in questa ricerca di strategie, bisogna sentirsi liberi di seguire

le proprie idee anche se sono diverse da quelle dell'insegnante.

  - Sottolineare che tutti gli errori hanno qualcosa di positivo e, in questo senso, possono ricevere una valutazione positiva.

- Porsi in atteggiamento di ricerca. Forse l'espressione è troppo impegnativa e un po' ipocrita. Intendo dire che

  - L'insegnante deve accettare che gli studenti diano interpretazioni del testo diverse da quella cui egli ha pensato;

  - L'insegnante deve accettare linguaggi e strategie diverse da quelli che si aspetta.

- Deve orchestrare una discussione finale dopo aver letto e corretto l'elaborato "dei bambini. La discussione serve per capire meglio i ragionamenti dei bambini, per confrontare le loro strategie ed, eventualmente, indicarne vantaggi e svantaggi, per sottolineare eventuali dati superflui o contraddittori, per rimarcare eventuali aspetti positivi degli errori, per proporre varianti al problema, per sottolineare i contenuti matematici.

È ovvio che, comportando tutte queste attività, fuori e dentro la classe, di problemi seri non se ne possano dare molti in un anno.

9. Problemi gioco

Scrive Martin Gardner: " La matematica non è mai stata un soggetto arido, sebbene sia stata troppo spesso insegnata nel modo più arido possibile. Non vi è miglior modo di alleggerire la noia che inserire, in un corso, argomenti ricreativi, soggetti efficacemente coloriti con elementi di gioco, con umorismo, bellezza e sorpresa".

È in questo spirito che propongo alcuni problemi — gioco.

9.1.Trovare due numeri di due cifre, diciamo AB e CD Sapendo che:

- AB + CD = DDD
- AB X CD = EBAB
- a lettere diverse corrispondono cifre diverse.

La prima uguaglianza ci dice che DDD = 111 perché la somma di due numeri di due cifre può essere, al massimo, 198 e, quindi, l'unico numero possibile con tre cifre uguali è 111.

Quindi: D = 1. Riscriviamo la somma in colonna:

$$\begin{array}{r} AB+ \\ \underline{C1} \\ 111 \end{array}$$

Siccome B + 1 =1 ne deriva B = O e A+C = 110.

Le possibili coppie di numeri sono: (20,91), (30,81), (40,71), (50, 61), (60,51), (70,41), (80,31), (90,21).

Ora facciamo entrare in gioco le informazioni date dalla moltiplicazione.

$$\begin{array}{r} AO\ x \\ \underline{C1} \\ AO \end{array}$$

EBO
EBAO

EBAO cioè E0A0

Il prodotto C x A = EB = E0 è un multiplo di 10.

Fra le coppie elencate prima quelle nelle quali il prodotto delle cifre delle decine, è un multiplo di 10 sono

(50, 61) e (60,51). Queste sono le due soluzioni del problema.

Per risolvere questo problema bisogna conoscere:

- La numerazione decimale
- Il ruolo dello zero nell'addizione e nella moltiplicazione
- Il ruolo dell' uno nella moltiplicazione.

Obiettivo del problema possono essere il ripasso dei concetti sopra elencati, lo sviluppo del pensiero combinatorio (le possibili coppie) e la capacità di utilizzare sequenzialmente le informazioni date.

9.2. Trovare tre numeri a, b, c tali che a + b +c = a x b x c

Una prima osservazione. L'enunciato non richiede che i tre numeri siano diversi. Quindi potrebbe essere a = b = c.

Inoltre è necessario fissare l'insieme numerico nel quale si cercano le soluzioni. Mettiamoci nei <u>numeri naturali</u>.

- Prima soluzione immediata, alla quale difficilmente si pensa, a = b = c = 0,
- Cerchiamo se esistono altre soluzioni.
  - Supponiamo a = b = c 0. L'equazione diventa
  - $3a = a^3 = 3 = a^2$ impossibile perché 3 non è il quadrato di un numero naturale.
  - Supponiamo a = b e c diverso. L'equazione diventa

    $2a + c = a^2 c$. $\boxed{1}$ Perché valga l'uguaglianza deve essere:

    $2a = a^2$ e cioè

    $2 = a$

    Si tratta di trovare quanto vale c.
    Sostituendo nella $\boxed{1}$ il valore di a troviamo
    4+c=4xc da cui

    4=3c cioè c=$\frac{4}{3}$ soluzione da scartare perché $\frac{4}{3}$ non è un numero naturale.

- Supponiamo, infine, che i tre numeri siano diversi. La soluzione va cercata fra le teme di numeri piccoli perché <u>normalmente</u> il prodotto di due numeri diversi da O e da 1 è maggiore della loro somma.
  La prima terna da provare è (1,2,3) ed è quella giusta perché 1+2+3=1x2x3.
  Con la seconda terna (2,3,4) il prodotto incomincia a distanziare di molto la somma.

In **N**, quindi, abbiamo due soluzioni.

Il gioco può essere una buona occasione per riflettere in quali casi il prodotto di due numeri è minore della loro somma.

- Se uno dei due numeri è O e l'altro è a 0 la somma è sempre maggiore del prodotto: a *a + O > ax0* perché

  a > O

- Se uno dei due numeri è 1 e l'altro è maggiore di 1 la somma è sempre maggiore del prodotto:

  a + 1 > ax1 perché
  a + 1 > a

Mettiamoci, ora, nei numeri interi relativi (**Z**).
Le due soluzioni che abbiamo trovato in **N** sono soluzioni anche in **Z**, ma se ne aggiungono infinite altre.
Se ne trova subito una nuova: (-1, -2, -3) perché la somma è –6 come pure il prodotto. Le altre infinite soluzioni sono formate da O, un qualunque numero e il suo opposto cioè (O, +a, -a). La somma è O come il prodotto.

Esempio:

(+3)+0+(-3)=(+3)x0x(-3–)

Se ci mettiamo nei numeri razionali (**Q**) a tutte queste infinite soluzioni si aggiunge la terna

$(2, 2, \frac{4}{3})$ che avevamo scartato in **N**. infatti:

$2+ 2+ \frac{4}{3} = 2x2x\frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

Se infine ci mettiamo nei numeri reali (**R**) si aggiunge la terna ($\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$)

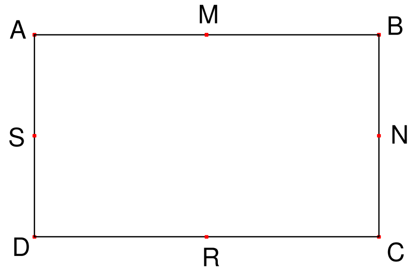
che avevamo dichiarato impossibile in **N**. Infatti:

$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}$

Da questo gioco si vede l'importanza dell'Universo in cui si ambienta il discorso e questo potrebbe essere, nella scuola media, l'obiettivo del gioco.

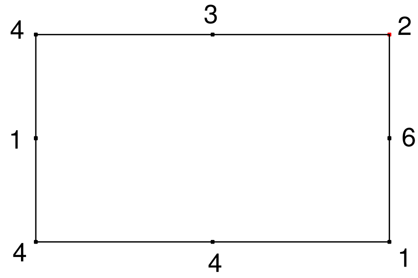
9.3. La cantina

Un maestro possiede una cantina rettangolare e 25 bottiglie di vino pregiato. Siccome è amante della matematica ed ha gusto estetico, dopo vari tentativi riesce a collocare le sue 25 bottiglie nei 4 vertici e nei 4 punti medi in modo che la somma delle bottiglie su ciascun lato fosse 9.



Come avrà fatto?

Di solito la gente parte lancia in resta e dopo vari tentativi riesce a collocare 9 bottiglie in ogni lato, ma il totale non è 25.
Meglio cercare di ragionare.



- Il numero complessivo delle bottiglie collocate sui lati AB e CD è 18. Ne restano 7 da collocare nei punti medi N e S. Se ne pongono 6 in N e 1 in S.
- Sul lato BC dobbiamo collocarne 3. Ne mettiamo 2 in B e 1 in C.
- Sul lato AB ne collochiamo 4 in A e 3 in M
- Il resto è obbligato: 4 in D e 4 in R.

Abbiamo usato cinque numeri diversi. Un'altra soluzione usa la terna (1,2,6).

Si trova un'altra soluzione collocando 5 bottiglie in N e 2 in S.
Le soluzioni sono diverse. La più economica ed elegante usa solo i numeri 2 e 5. Nuova soluzione ponendo 4 bottiglie in N e 3 in S.

Trovate le soluzioni per 25 il gioco può proseguire in due direzioni.

- Verso numeri maggiori di bottiglie. Si arriva fino a 32 con l'elegante soluzione

1	7	1
7		7
1	7	1

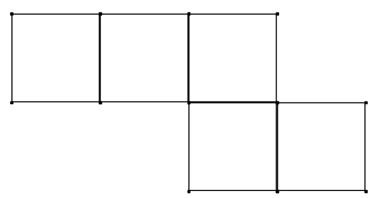
Con 33 bottiglie il gioco si blocca. Non è necessario fare prove. Basta pensare che nei punti N e S dobbiamo collocare 15 bottiglie cioè 8+7. Ma il lato con 8 nel punto medio deve contenere almeno 10 bottiglie.

- Verso numeri minori di bottiglie.
  Si arriva fino a 20 e la soluzione usa solo i numeri 1 e 4.
  Con 19 bottiglie il gioco si blocca, perché ci resta una sola bottiglia da collocare nei due punti medi N e S (lo zero non è ammesso).

Obiettivi del gioco possono essere il ripasso di concetti geometrici (rettangolo, vertici, punti medi, simmetria perché da ogni soluzione se ne ottengono altre due con la simmetria rispetto all'asse MR e all'asse NS), e la necessità di trovare strategie adeguate.

9.4.Da 5 a 4

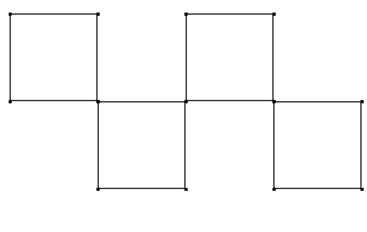
Questi sono 5 quadrati uguali. Spostare 2 lati e riutilizzarli in modo da ottenere 4 quadrati uguali a questi.



Prima di avventurarsi in tentativi è meglio leggere le informazioni che la figura ci dà:

- I cinque quadrati hanno dei lati in comune
- I lati (stuzzicadenti) sono 16.

Siccome con essi dobbiamo formare 4 quadrati, è ovvio che



essi non possono avere lati comuni, ma possono solo essere "attaccati" per un vertice. Dopo di che la soluzione è facile:

Oltre che a ripassare semplici concetti geometrici il gioco può

servire per sottolineare la diversità concettuale fra area e perimetro: le due configurazioni, infatti, hanno uguale perimetro, ma area diversa.

9.5.Un rompicapo

Un ragazzo ha tanti fratelli quante sorelle, ma ogni sorella ha metà sorelle rispetto al numero dei fratelli. Quanti sono i fratelli e le sorelle della famiglia?

È un classico rompicapo. Può aiutare una formulazione leggermente diversa. Invece di dire che "ogni sorella ha metà sorelle..." si può dire che "ogni sorella ha un numero di fratelli doppio rispetto al numero delle sorelle". In questo modo si ha subito l'informazione che il numero dei fratelli è pari.

Siccome un fratello c'è come dato del problema ad esso bisogna aggiungerne un numero dispari. Allora si prova con 1F e 1S. Abbiamo così 2 fratelli e 1 sola sorella (dei due fratelli). Ella però non ha altre sorelle, ha zero sorelle e 2 non è il doppio di zero.

Al secondo tentativo si trova la soluzione.

Si aggiungono 3F e 3S. il ragazzo del problema ha tanti fratelli quante sorelle (3) e ogni ragazza ha 2 sorelle e 4 fratelli.

Ci saranno altre soluzioni?
In genere i rompicapi sono a soluzione unica.
Comunque si può provare con 5F e 5S oppure con 7F e 7S e si vede che le cose non funzionano.
Lo si può vedere in generale.
I fratelli sono 1+(2n+1) [2n+1 è un generico numero dispari]. Anche le sorelle sono in numero dispari: 2n+1.
Ciascuna di esse ha 2n sorelle e sono la metà dei fratelli, cioè: 1+(2n+1)=2x2n. Manipolando la formula si ottiene:

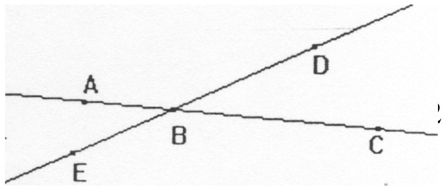
2+2n=2x2n
2(n+1)=2x2n
n+1=2n
1=n

Sostituendo questo valore in 2n+1 otteniamo 3. È l'unica soluzione

Questo gioco può servire a ripassare i numeri pari e dispari e, nella scuola media, a fare un po' di algebra significativa.

9.6.Tra punti e rette

In questo disegno ci sono due rette, cinque punti e tre punti



in ogni retta. Aggiungere un solo punto in modo da ottenere 4 rette con 3 punti in ogni retta.

L'enunciato è un po' stringato. Non è che aggiungendo un punto nascono d'incanto altre due rette. Naturalmente bisogna trovarle e giustificare l'esistenza.

Il punto "nuovo" non può stare su una delle due "vecchie" rette perché i punti su ogni retta devono essere solo tre.

Anche se l'accento del testo è posto sul punto "nuovo" da aggiungere, è controproducente segnare un punto ed andare poi alla ricerca delle rette. Meglio iniziare da queste e trovare il punto come intersezione.

Il disegno ci offre su un piatto d'argento le due nuove rette. Sono la retta AD ed EC. Il nuovo punto è il loro punto di intersezione.

L'elemento concettuale più importante è la proprietà, di solito assunta come assioma, che regola i rapporti punti - rette: per due punti distinti passa una ed una sola retta.

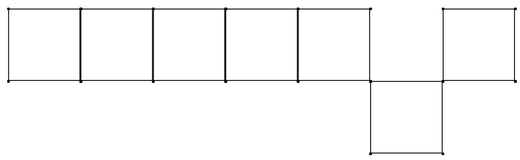
9.7.Quadrati e fiammiferi

Con 24 fiammiferi della stessa lunghezza quanti quadrati di lato lungo 1 fiammifero posso costruire?

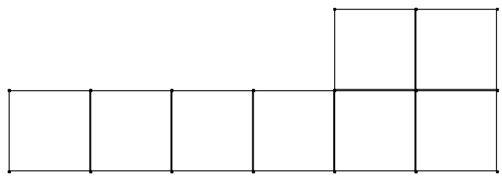
C'è una risposta ovvia: 6. Si tratta di quadrati disgiunti, "attaccati" al più per un vertice. Se questa fosse l'unica risposta, il gioco sarebbe un po' cretino.

C'è da aspettarsi che si possa costruire un numero maggiore di quadrati. Per poterlo fare bisogna "attaccare" i quadrati per un lato, almeno in modo da avere più lati a disposizione.

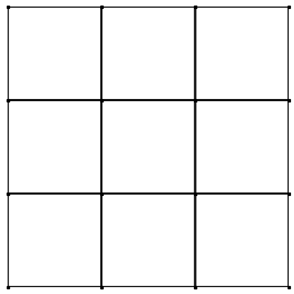
Una soluzione è: 7 quadrati come si vede in figura:



Attaccando un po' di più si possono costruire 8 quadrati:



Il massimo si raggiunge con 9 quadrati:



Anche questo gioco può servire per sottolineare la differenza fra perimetro ed area.

9.8. Dai puntini ai numeri

Sostituire ai puntini una cifra in modo da ottenere il risultato indicato.

● ● ● ● ●
●
―――――――
1 1 1 1 1 1

L'operazione è ovviamente, la moltiplicazione.

- Il moltiplicatore non può essere 1 perché il risultato ha 6 cifre ed al moltiplicando 5. Quindi anche la cifra delle unità non può essere 1.
- Né moltiplicatore né cifre delle unità del moltiplicando possono essere pari perché il loro prodotto non potrebbe essere 1. Quindi sono ambedue dispari.
- La prima coppia che va bene è 3 (moltiplicatore) e 7 (cifra unità moltiplicando)

● ● ● ● 7
3
―――――――
1

- Tenendo conto del riporto (2), il prodotto di 3 con la cifra delle decine deve terminare con 9. L'unica possibilità è che sia 3. Quindi:

● ● ● 3 7
3
―――――――
1 1

- Tenendo conto del riporto (1) il prossimo prodotto deve terminare con zero. Quindi O è la cifra delle centinaia.

● ● 0 3 7
3
―――――――
1 1 1

- Poi si ricomincia da capo con 7 e 3.

In definitiva:

$$\begin{array}{r} 37037 \\ 3 \\ \hline 111111 \end{array}$$

- Si può vedere se le cose funzionano con 7 come moltiplicatore. Non è difficile, con lo stesso tipo di argomento trovare una nuova soluzione:

$$\begin{array}{r} 15873 \\ 7 \\ \hline 11111 \end{array}$$

- Resta da provare con la coppia 9 e 9, ma ci si accorge che le cose non funzionano.

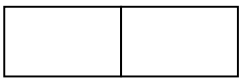
9.9.il mattone

Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?

Anche persone adulte vanno in tilt con questo gioco. Nella scuola media si può ragionare così: indico con *x* il peso del mattone. Esso è uguale a 1 x più $\frac{1}{2}$x , cioè

$x = 1 + \frac{1}{2}x$ da cui x=2

Nella scuola elementare si può procedere a questo modo: il mattone è formato da due mezzi mattoni:



Essi hanno lo stesso peso. Siccome il peso totale è 1 kg più mezzo mattone allora mezzo mattone pesa 1 kg ed il mattone 2 kg.

9.10. Quattro amici

Quattro amici devono attraversare un fiume con una barca che porta al massimo, 150 kg. Roberto pesa 100 kg, Vincenzo 65, Mario 56 e Salvatore 70 kg.

Quanti viaggi devono fare con la barca i quattro amici per attraversare il fiume?

È un problema celebre della serie mogli e mariti gelosi.

Un primo dato evidente è che Roberto non può andare in barca con nessun altro. D'altra parte, fargli fare un viaggio da solo subito all'inizio, non serve perché poi deve tornare e ci si riduce alla situazione di partenza.

Una soluzione è la seguente:

- Attraverseranno Vincenzo e Mario il quale, poi, ritorna.
- Attraversa Roberto e ritorna Vincenzo
- Attraversano ancora Vincenzo e Mario e ritorna Mario
- Attraverseranno Mario e Salvatore.

Quindi con 7 viaggi (andata e ritorno) i 4 amici raggiungono l'altra riva del fiume.

10. Problemi: analisi a priori dal punto di vista matematico

Nei problemi per le classi prima, seconda e terza citati nella bibliografia, si trovano esempi di questa analisi. Ne propongo qualche altra.

10.1. Problema tratto dal libro di F. Ferri

"Stefano e Silvia giocano a biglie. Per una partita vinta Stefano riceve tre biglie. Siccome è più piccolo, per ogni partita che perde deve dare a Silvia soltanto 2 biglie.

Quando i due amici smettono di giocare Stefano ha vinto 10 biglie. Quante partite ha vinto Stefano?
Quante partite ha vinto Silvia?
Quante partite hanno giocato?"

Indichiamo con x il numero delle partite vinte da Stefano, e con y il numero delle partite vinte da Silvia (e quindi perse da Stefano).
Allora il numero totale delle partite giocate è x+y.
Cerchiamo di tradurre il problema verbale in una equazione.
In x partite Stefano vince 3x biglie; in y partite vinte da Silvia, Stefano perde 2y biglie. Siccome alla fine ha vinto 10 biglie l'equazione è:

3x-2y=10 $\boxed{1}$

Questa è una equazione di primo grado in due incognite da risolvere in numeri naturali perché $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Una equazione di questo tipo si dice diofantea, in onore di Diofanto, matematico greco del III secolo dopo Cristo.
Risolvere l'equazione significa trovare una coppia, almeno, di numeri naturale che rendano vera l'uguaglianza.
Quale informazioni ci fornisce l'equazione?

- Deve essere $x \geq 0$ e $y \geq 0$ perché si tratta di partite giocate.
- Siccome la coppia di numeri (0,0) non verifica l'equazione, possiamo dire che almeno una delle due variabili deve essere maggiore di zero.
- Non può essere x=0 perché -2y non può essere uguale a 10; non può essere y=0 perché 3x non può essere uguale a 10.
- Quindi x e y sono maggiori di zero.
- X deve essere un numero pari. Altrimenti 3x sarebbe dispari e la differenza fra un dispari e un pari (2y) non può essere un numero pari (10). Quindi x=2n con n=1, 2, 3,4,...
- Stefano ha vinto <u>almeno</u> 2 partite (n=1); ma con 2 sole partite vinte guadagnerebbe 6 biglie e non 10. Quindi Stefano ha vinto almeno 4 partite (n=2).
- Qui nasce la prima soluzione.
  Vincendo 4 partite e perdendone 1 (*y=1*) Stefano guadagna 10 biglie. Quindi la coppia (4,1) è una soluzione della equazione. Il totale delle partite, in questo caso, è 5.
  Questa non è l'unica soluzione.
- Dalla $\boxed{1}$, a portando a destra 2y, a sinistra 10 e dividendo per 2 otteniamo: y=$\frac{3*2n-10}{2}$=*3n* $\boxed{2}$

Siccome *x=2n* sostituendo nella $\boxed{2}$ otteniamo: y=$\frac{3*2n-10}{2}$=*3n-5*

Siccome y>0 deve essere n ≥ 2. Per n=2 otteniamo la soluzione (4,1)

- Per ogni n>2 otteniamo le infinite soluzioni (2n, 3n -5)
- Mentre x=2n è sempre pari, il numero y=3n-5 è, alternativamente, dispari e pari.
- Le partite vinte da Stefano aumentano sempre di 2, quelle vinte da Silvia aumentano sempre di 3 perché 3n aumenta ogni volta di 3, mentre 5 resta fisso.
- Il numero totale delle partite è:

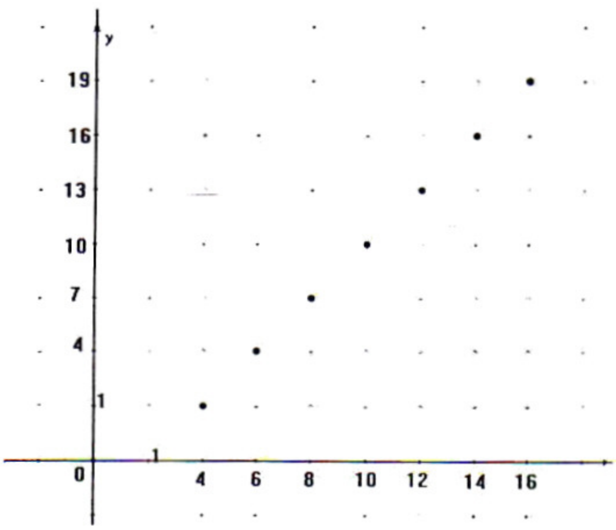
  x + y =2n +3n — 5 = 5n — 5 = 5(n —1)

  cioè un multiplo di 5.

- Possiamo rappresentare tutto con questa tabella:

x	y	X + y
4	1	5
6	4	10
8	7	15
10	10	20

L'equazione $\boxed{1}$ è l'equazione di una retta che possiamo rappresentare su un reticolato a numeri interi:



I punti in neretto rappresentano le soluzioni.
Nel libro della Ferri (pag. 125-135) si può vedere lo sviluppo didattico di questo problema.

10.2. Le gabbie di Piero (F. Ferri)

"Piero vuole acquistare delle gabbie per sistemarvi 19 conigli. Le gabbie sono di due tipi: piccole e grandi. Nelle piccole ci stanno 2 conigli e nelle grandi ce ne stanno 3. Vuoi aiutare Piero a stabilire quante gabbie sono necessarie?

Una gabbia grande costa 4 000 lire e una piccola 3 000 lire.. Siccome Piero è un po' tirchio vorrebbe spendere il meno possibile; puoi aiutarlo?"

Indichiamo con x il numero delle gabbie grandi e con y il numero di quelle piccole.

Siccome di conigli ce ne stanno 3 in quelle grandi e 2 in quelle piccole e il totale è 19, il problema si traduce nella equazione: 3x + 2y =19 $\boxed{1}$

Vediamo quali informazioni ci fornisce l'equazione.

- Il numero delle soluzioni può essere al massimo 20, cioè tante quante sono le coppie di numeri amici del 19. In realtà sono di meno per via dei coefficienti di x e di y.
- Deve essere x ≥ 0 e y ≥ 0 interi dato il loro significato.
- In realtà x>0 perché 19 non è multiplo di 2 e y>0 perché 19 non è multiplo di 3.
- x deve essere dispari perché la somma di due numeri pari non può fare 19.

  Quindi X può essere = 1(n=0), 3(n=1), 5(n=2)
- x può assumere al massimo il valore 5 perché con x=7 si supera 19.

  Quindi x può essere: 1(n=0), 3(n=1), 5(n=2).
- Le soluzione della $\boxed{1}$ a possono essere (1,y), (3y) e (5,y).
- Per trovare i valori di y, incominciamo a ricavare dalla $\boxed{1}$. Con semplici passaggi

  si ottiene y = $\frac{19-3x}{2}$ $\boxed{2}$

  Siccome x=2n+1 la $\boxed{2}$ diventa

  $$y=\frac{19-3(2n+1)}{2}=\frac{19-3-6n}{2}=8-3n$$

Sostituendo i tre possibili valori della n otteniamo:

n=0 y=8

n=1 y=5

n=2 y=2

Le soluzioni sono, quindi, (1,8), (3,5), (5,2).

La seconda parte del problema ci informa che Piero sceglie la soluzione (5,2) che gli fa spendere solo 26.000 lire.

10.3. Franca e i cioccolatini (F. Ferri)

" Franca vuole acquistare per i bambini della sua classe, che sonol9, due cioccolatini a testa. Entra in un negozio dove hanno soltanto confezioni da 5 e 12 cioccolatini. Può comprare esattamente il numero di cioccolatini che le servono?"

Indicando con x il numero delle confezioni da 12 cioccolatini e con y quella delle confezioni da 5 cioccolatini, il problema si traduce nell'equazione:

12x9-5y=38 $\boxed{1}$

Quali informazioni possiamo ricavare?

- Il numero massimo di soluzioni è 39, tante quante sono le coppie di numeri amici di 38. In realtà sono di meno per via dei coefficienti di x e di y.
- Deve essere x .0 e y 0 perché 38 non è multiplo di 5 e y>0 perché 38 non è multiplo di 12.
- Deve anche essere x 0 e y 0 interi dato il loro significato.
- In realtà x>0 perché 38 non è multiplo di 5 e y>0 perché 38 non è multiplo di 12.
- Deve anche essere: x<3 perché per x=3 con il contributo di 5y si supera 38; y<6 perché per y=6 con il contributo di 12x si supera 38.

  Quindi x può assumere i valori 1,2 e y può assumere i valori 1,2,3,4,5
- y deve essere pari perché la somma di un pari e di un dispari non può fare 38. Quindi y=2n. I valori che può assumere sono solo 2(n=1) e 4(n=2).
- Le eventuali soluzioni della $\boxed{1}$ sono: (x,2) e (x,4)
- Ricaviamo la x dalla $\boxed{1}$
- Il numero 19 -5n deve essere intero e quindi il numeratore deve essere multiplo di 6.

I valori ammissibili per n sono solo 1 e 2. Ma per n=1, non intero. Per n=2, non intero.

- Conclusione: l'equazione non ha soluzione e il problema è impossibile.

11.Problemi di geometria

I sussidiari sono ricchi di "problemi" di aritmetica, meno di problemi di geometria e, per lo più, sono problemi di perimetri ed aree.

Propongo alcuni problemi di geometria forse poco usuali, ma certamente significativi.

11.1. A me piacerebbe dividere un rettangolo in due parti congruenti e ottenere due quadrati congruenti. Come devono essere i lati del rettangolo? (Grandangolo, pag. 107 problema 2)

I prerequisiti sono semplici: conoscere il significato delle parole: rettangolo, quadrato, congruente (o uguale).

Obiettivi possono essere il ripasso di questi concetti e l'individuazione di una strategia intelligente per aggredire il problema.

Questa strategia, nota fin dall'antichità e chiamata "analisi", consiste nel supporre risolto il problema e nel ricercare le condizioni che lo rendono risolubile.

Supponiamo, quindi, di aver risolto il problema, cioè di avere due quadrati congruenti. Se li uniamo per un lato otteniamo un rettangolo che ha un lato congruente a quello dei due quadrati e l'altro che è il doppio.

Questa è la condizione che rende risolubile il problema: il rettangolo di partenza deve avere un lato doppio dell'altro.

Difficilmente i bambini seguiranno questa strategia; bisognerà, quindi, illustrarla nella discussione finale.

I bambini, probabilmente, seguiranno una strategia diretta, di tentativi, con misurazioni.

11.2. Un poliedro ha 12 spigoli. Quanti vertici e quante facce può avere? Come prerequisiti ci sono le più semplici nozioni sui prismi e sulle piramidi e la conoscenza della formula di Eulero per i poliedri convessi:

F + V = S + 2
Dove F = numero delle facce
V = numero dei vertici
S = numero degli spigoli

È una formula molto importante che può essere intuita dagli alunni con un po' di attività di conteggio sui soliti poliedri.

Anche senza conoscere la formula di Eulero, si può trovare una soluzione: ogni parallelepipedo ha 12 spigoli, ma è noto che ha anche 6 facce e 8 vertici.

Con la formula di Eulero si può trovare anche la seconda soluzione: una piramide a base esagonale che ha 12 spigoli, 7 vertici, e 7 facce.

Il problema può servire a ripassare la formula di Eulero e a farne vedere le potenzialità applicative: dalla conoscenza di un solo elemento (numero degli spigoli), si ricava la conoscenza degli altri due.

11.3. Mario e il prisma

Mario sta giocherellando con un modello in legno di un prisma. Ad un tratto si fa serio e dice a Luca: " Luca: per conoscere tutti i numeri di un prisma basta conoscere una base. Sei d'accordo anche tu?"

Non ci sono requisiti speciali se non la capacità di "leggere" una figura solida o un suo modello.

I "numeri" del prisma sono quelli che entrano nella formula di Eulero. Ogni prisma ha due basi che sono le facce opposte, parallele e congruenti.

Conoscere una base significa saper quanti vertici e quanti lati ha.

- Il numero dei vertici del prisma è doppio del numero dei vertici di una base.

  I vertici di un prisma, infatti, si distribuiscono, in numero uguale, sulle due basi. Il numero dei vertici, quindi, è sempre pari.

- Il numero delle facce di un prisma è uguale al numero dei lati di una base (le facce laterali) più 2 (le due basi).

Questo numero è pari se lo è il numero dei' lati di una base, altrimenti è dispari.

- Il numero degli spigoli di un prisma è triplo del numero dei lati di una base: spigoli di una base più spigoli dell'altra base, più spigoli che uniscono due vertici corrispondenti delle due basi. Questo numero è pari se tale è il numero dei lati di una base, dispari in caso contrario.

11.4. Secondo te, può esistere un quadrato nel quale la misura del perimetro è uguale alla misura dell'area?

Due sono i prerequisiti fondamentali: saper leggere attentamente il problema per accorgersi che non si parla di perimetro e di area, ma delle loro misure e sapere che la misura di una grandezza è un numero.

Una soluzione "adulta" può essere questa. Con x si indica la misura della lunghezza del lato di un quadrato e si scrive l'equazione: $4x = x^2$ $\boxed{1}$

Una soluzione immediata è x=0. Il quadrato è ridotto ad un punto perché un segmento di misura 0 ha gli estremi coincidenti.

Perimetro ed area di tale quadrato hanno misura 0. Se x   0 dalla $\boxed{1}$, dividendo per x, si ottiene: 4=x

E la seconda soluzione: un quadrato il cui lato misura 4. Perimetro ed area hanno misura 16. I bambini possono procedere per tentativi, magari costruendo questa tabella:

Misura		
Lato	Perimetro	Area
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25

Prima vince la misura del perimetro, poi pareggiano e poi vince la misura dell'area.

11.5. Su carta quadrettata

Su carta quadrettata disegna con cura un quadrato e poi costruiscine uno di area doppia.

Il segreto del problema sta nel verbo "costruire" che dovrebbe sconsigliare i bambini dal tentativo di disegnare il quadrato di area doppia e avviarli verso altri tipi di attività come taglia e incolla.

Per risolvere il problema un adulto ricorre al teorema di Pitagora e costruisce, con riga e compasso, un quadrato con il lato lungo come la diagonale del primo triangolo.

Come può procedere un bambino?

Il punto di arrivo è un quadrato di area doppia del primo. Il primo passo è quello di disegnare due quadrati congruenti al primo e ritagliarli. Se li unisco per un lato ottengo sì una figura di area doppia, ma non è un quadrato.

L'idea intelligente è, allora, di ritagliare i due quadrati lungo le diagonali ottenendo 4 triangoli rettangoli. Poi si tratta di unirli in modo da ottenere un quadrato. Basta, per questo, mettere al centro i 4 angoli retti.

Il problema non è semplice e potrebbe essere risolto collettivamente.

11.6. Un quadrato ha una diagonale lunga 15 cm. Quanto vale la sua area?

Un bambino che ha visto solo, come formula dell'area di un quadrato, $A=l^2$ può pensare che le informazioni sono sufficienti.

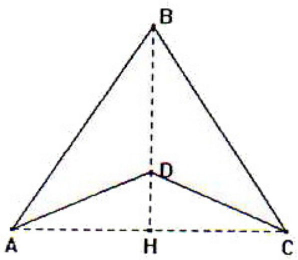
Le cose da tenere presenti sono due:

- Il quadrato ha le diagonali perpendicolari
- La formula dell'area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è quella del rombo: d_1*d_2.

Obiettivo del problema è quello di rompere gli stereotipi, se si sono formati, o di evitare che si formino.

11.7. Il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari.

Quanto vale la sua area?



Davanti a questo problema ho visto reazioni diverse da parte degli insegnanti:

- *Il quadrilatero non ha diagonali.*

  Bisogna riprendere il concetto di diagonale di un poligono: segmento che unisce due vertici non consecutivi. Nel nostro quadrilatero le diagonali sono due: AC e BD. Non si tagliano in un punto interno perché il quadrilatero non è convesso.
- *Non si può calcolare l'area perché fra i dati non ci sono numeri.*

  Per calcolare l'area basta trovare una formula che la esprima. I "numeri" servono per calcolare la misura dell'area.

Siccome il quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, basta ricorrere alla formula del rombo A= AC*BD

Ci sono, però, due altre strade per arrivare alla stessa conclusione:

- Calcolare l'area di ABCD come somma delle aree dei triangoli ABD e BDC. Essi hanno la base comune BD e l'altezza relativa è CH.AH. —1 AC.

- Calcolare l'area di ABCD come differenza delle aree del triangolo ABC e del triangolo ADC. Questa strada però è più per la scuola media.

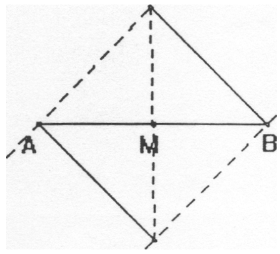
11.8. Con riga non graduata

Usando solo una riga <u>non</u> graduata a bordi paralleli sei capace di trovare il punto medio di un segmento-più lungo dell'altezza della striscia della riga?

È chiaro che con la riga <u>non</u> graduata, non posso riportare misure; posso però tracciare parallele distanti come l'altezza della striscia e unire due punti qualunque.

Un altro concetto matematico richiesto è che intersecando due strisce di uguale altezza si ottiene un rombo.

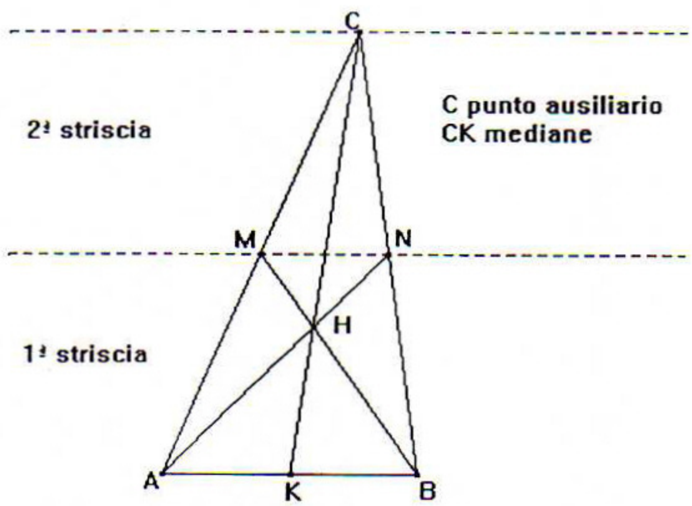
Ecco i vari necessari per la soluzione.



- Tracciare il segmento AB
- Disporre la riga in modo che i suoi bordi passino per A e B (righe continue)
- Ripetere l'operazione in modo da ottenere l'altra striscia (righe tratteggiate)
- AB è una diagonale del rombo ottenuto. L'altra diagonale lo taglia nel punto medio M.

È un problema di costruzione per risolvere il quale è anche importante sapere che cosa si può fare e che cosa non si può fare con lo strumento a disposizione.

Nella scuola media si può affrontare il problema generale la cui soluzione affido al disegno.



11.9. Un triangolo su carta bianca

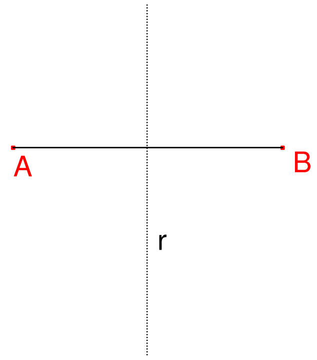
Disegna su carta bianca un triangolo isoscele con un lato obliquo lungo 12 cm. Spiega come hai fatto.

Si possono seguire due strade.

- La prima, forse quella più spontanea, ma più difficile, consiste nel prendere il segmento di 12 cm come base e poi trovare l'asse del segmento, magari con una piegatura, e prendere su di esso un qualunque punto come terzo vertice. E necessario, però, sapere che il triangolo isoscele ha un asse di simmetria.
- La seconda consiste nel prendere il segmento di 12 cm come uno dei due lati congruenti e, partendo da uno dei suoi estremi, disegnare un altro segmento di 12 cm. Basta, poi, unire i due vertici liberi per ottenere il triangolo isoscele.

  È una strada più semplice e non fa intervenire l'asse di simmetria.

11.10. Il segmento e la circonferenza



Nella figura vedi disegnato un segmento AB e il suo asse r.

Ricordando che cosa è una circonferenza, puoi dire quante ne passano per la coppia di punti AB e che stanno tutte nello stesso piano?

Quando proponevo questo problema agli insegnanti, senza l'intervento dell'asse, ottenevo le risposte più diverse: 1 circonferenza (la più gettonata), 2,3, infinite (raramente e senza giustificazione).

Il motivo è semplice: il segmento AB veniva pensato come diametro.

Il disegno dell'asse del segmento dovrebbe indirizzare verso la risposta esatta: infinite. Ogni punto dell'asse è centro di una circonferenza che passa per i punti A e B. Basta ricordare la definizione di asse di un segmento e di circonferenza.

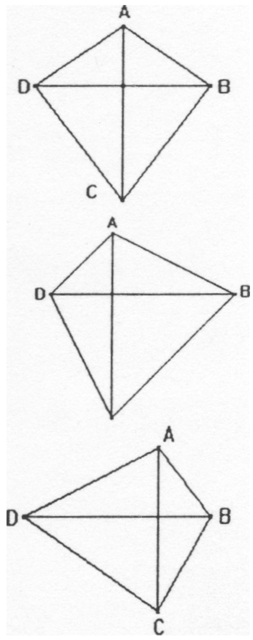
11.11. Disegna i vari tipi di quadrilateri con le diagonali perpendicolari

Spesso ci si limita alla risposta più ovvia: quando è quadrato e rombo. Se queste fossero le uniche soluzioni si tratterebbe di un banale esercizio e non di un problema. Tuttavia una riflessione sulle diagonali di quadrato e rombo può suggerire la strategia per affrontare il problema.

Il quadrato ha le diagonali uguali che si tagliano nel rispettivo punto medio; anche le diagonali del rombo si tagliano nel loro punto medio, ma non sono uguali.

La strategia, quindi, è quella di:

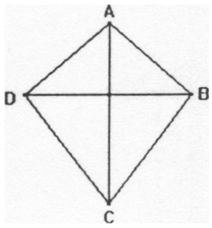
- Considerare le varie possibilità tenendo presenti le proprietà: essere uguali, essere diverse, tagliarsi nel punto medio, non tagliarsi nel punto medio.
- Disegnare prima le diagonali e poi il quadrilatero.



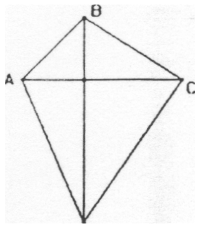
❑ Diagonali uguali:

- Si tagliano nel rispettivo punto medio: quadrato
- Una sola è tagliata nel punto medio: deltoide con asse di simmetria.
- Non si tagliano nel punto medio, ma in parti rispettivamente uguali: trapezio isoscele.
- Non si tagliano nel punto medio e neppure in parti uguali: deltoide senza assi di simmetria.

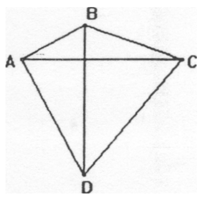
- Diagonali diverse
  - Si tagliano nel rispettivo punto medio: rombo.
  - Una sola è tagliata nel punto medio: deltoide con un asse simmetria.



  - Non si tagliano nel punto medio, ma due parti sono uguali: deltoide senza asse di simmetria

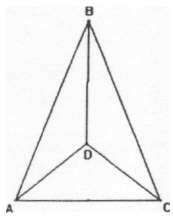


  - Non si tagliano nel punto medio e i 4 “pezzi” sono diversi: deltoide senza assi di simmetria



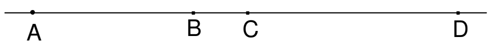
Si può estendere la ricerca anche ai quadrilateri concavi:

- Diagonali uguali
  - Il prolungamento di una taglia l'altra nel punto medio: coda rondine con asse di simmetria.
  - Il prolungamento di una non taglia l'altra nel punto medio: coda di rondine senza simmetria
  - Diagonali diverse: si ripetono le due situazioni precedenti.



11.12. Segmenti e rette

Su questa semiretta quanti segmenti e quante semirette vedi?



Il problema sembra banale, ma le risposte, anche di adulti, sono spesso errate.

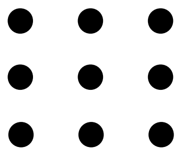
Il guaio è che nella prassi didattica siamo troppo spesso abituati a considerare solo semirette disgiunte e, magari, un solo segmento. Per questo sovente le risposte sono: 2 semirette (quelle di origine A) e 1 solo segmento (quello di estremi A e D).

Basterebbe ricordare che ogni coppia di punti determina un segmento e ogni puntó è origine di due semirette per dare la risposta esatta:

- 6 segmenti AB, AC, AD, BC, BD, CD.
- 8 semirette.

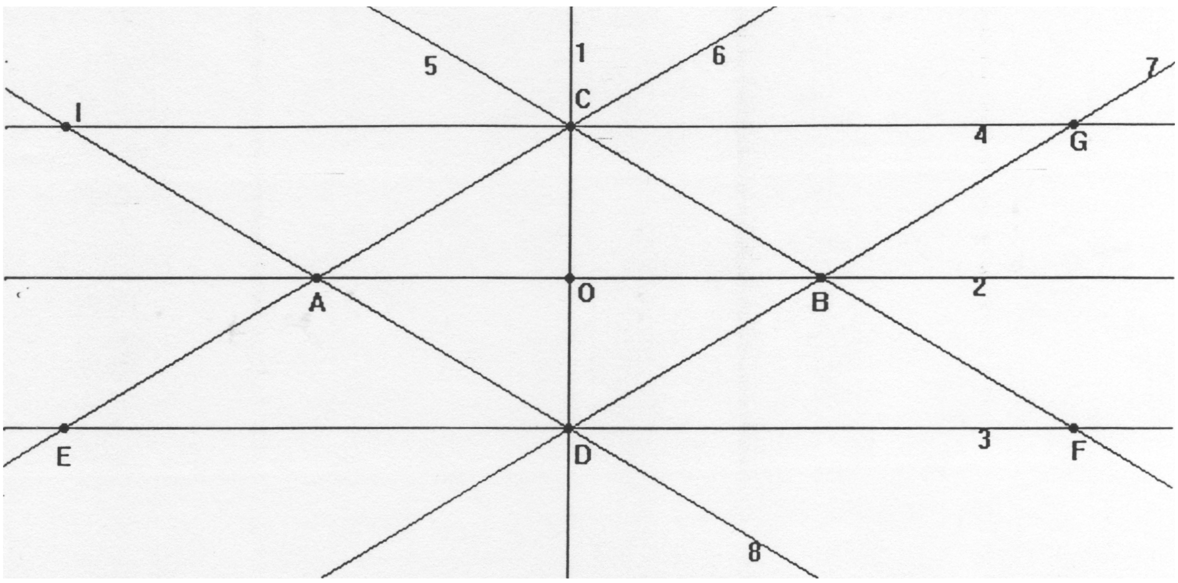
11.13. Il giardino di Boboli

Il capo giardiniere di Boboli ha molto gusto estetico. Un giorno è riuscito a piantare:
9 rose su 10 file mettendo 3 rose su ogni fila facendo in modo che due file (rette) fossero assi di simmetria della configurazione ottenuta. Prova anche tu.
Di solito si attacca il problema disegnando 9 punti a forma di quadrato.



I due assi di simmetria ci sono, ma le rette non sono 10.

Conviene, invece, incominciare dagli assi di simmetria che essendo solo 2 sono perpendicolari.



Sulle rette 1 e 2 che fanno parte della configurazione ci devono essere 3 rose. Una è nel punto di intersezione, le altre stanno sulle rette da parti opposte rispetto ad O d equidistanti da O. Si ottengono i punti simmetrici A e B e C e D.

Da D mandiamo la parallela a 2 e troviamo le intersezioni di 3 con AC e CB: E ed F. La simmetrica di 3 rispetto a 2 è la parallela a 2 passante per C.

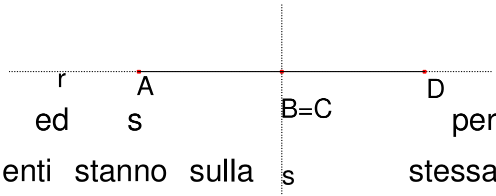
La simmetrica di CB rispetto a 2 è DB e la sua intersezione con 4 (G) è simmetrico di F. Analogamente la simmetria di CA è DA e la sua intersezione con 4 (I) è il simmetrico di E. Abbiamo così 9 punti e 8 rette. Le due restanti sono I0F e GOE.

11.14. Due segmenti congruenti

La figura formata da due segmenti congruenti quanti assi di simmetria può avere?

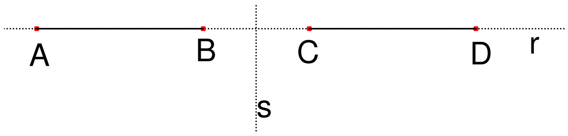
Per rispondere conviene esaminare le possibili configurazioni.

- I due segmenti AB e CD stanno sulla stessa retta e sono consecutivi.

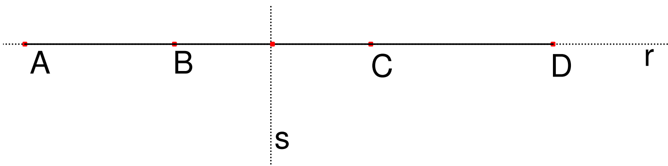


Due assi: r ed s perpendicolare in B=C.

- I due segmenti stanno sulla stessa retta e sono disgiunti:



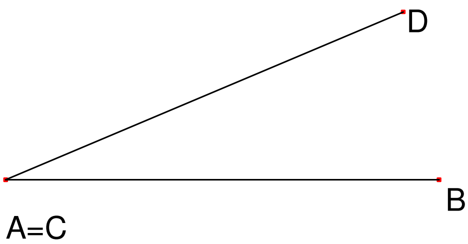
- Due assi: r ed s perpendicolare nel punto medio del segmento BC.



I due segmenti stanno sulla stessa retta, ma non sono disgiunti.

Ancora due assi r e s.

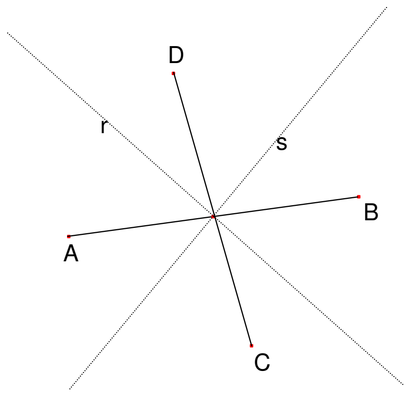
- I due segmenti non stanno sulla stessa retta, ma hanno un estremo in comune:



Un asse: la bisettrice dell'angolo.

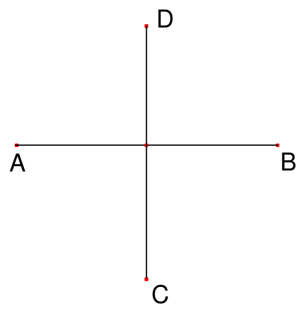
I due segmenti si tagliano nei punti medi, ma non sono perpendicolari

- I due segmenti si tagliano nei punti medi, ma non sono perpendicolari.



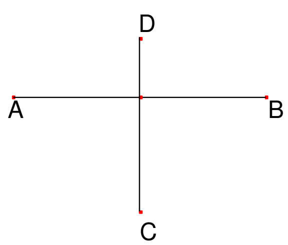
Due assi: le due bisettrici r e s.

- I due segmenti si tagliano nel punto medio e sono perpendicolari



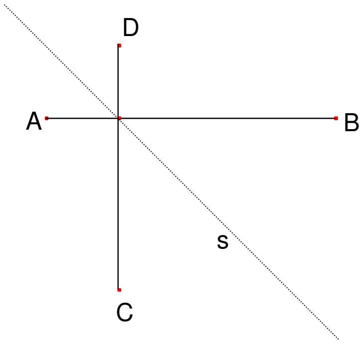
Quattro assi: le rette AB e BD e le due bisettrici.

- I due segmenti sono perpendicolari, ma nel punto medio di uno solo



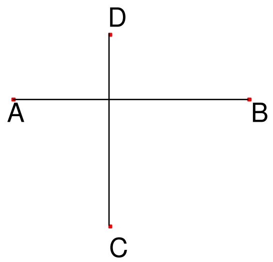
Un solo asse: la retta CD.

- I due segmenti sono perpendicolari, non si tagliano nel punto medio, ma in parti rispettivamente uguali

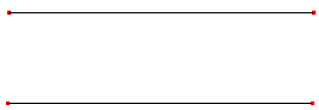


Un asse di simmetria: la bisettrice s.

- Negli altri casi di perpendicolarità: nessun asse.



- I due segmenti sono paralleli e formano i lati opposti di un rettangolo:

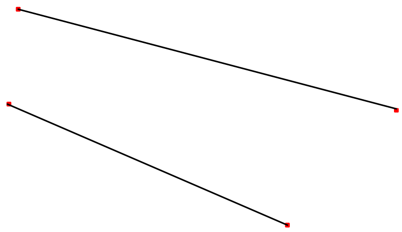


Due assi di simmetria: quelli del rettangolo.

- I due segmenti sono paralleli e formano i lati opposti di un romboide.

Nessun asse di simmetria.

- I due segmenti non sono paralleli, non sono incidenti



Nessun asse di simmetria.

Problema ricco, un po' noioso, da studiare a tappe.