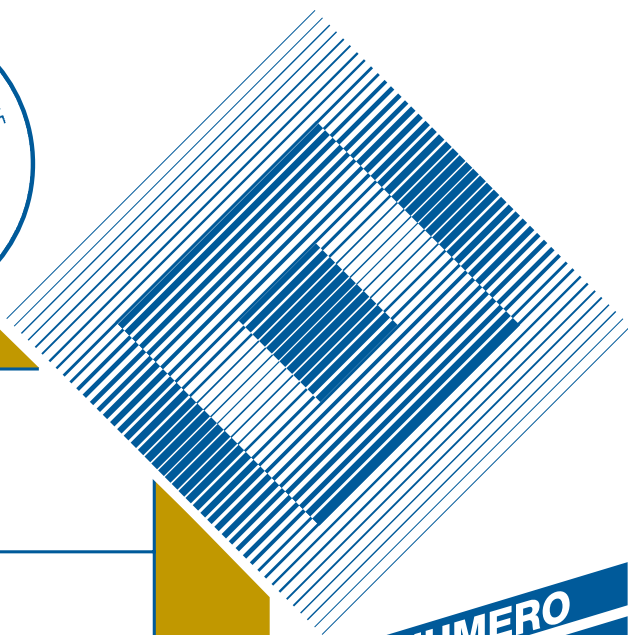


# L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

**VOL. 43 A-B N. 3**  
**MAGGIO-GIUGNO 2020**

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale  
D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)  
art. 1, comma 1, NE/PD  
Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue

**50** 1970  
2020  
**ANNI**  
DI SERVIZIO  
TESTIMONIANZA  
LIBERTÀ



**NUMERO  
DOPPIO**

***L'Insegnamento della  
Matematica e delle  
Scienze Integrate***  
*è un servizio  
che il C.R.D. "U.MORIN"  
vuole rendere agli  
insegnanti della scuola  
italiana per il miglioramento  
dell'insegnamento  
della matematica  
e, in senso  
interdisciplinare,  
delle altre scienze.*  
La rivista è distribuita  
gratuitamente ai Soci.



*Questa rivista viene  
pubblicata con l'aiuto degli  
Istituti Filippin dei Fratelli  
delle Scuole Cristiane.*

# ***L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE***

**VOL. 43A-B N.3  
MAGGIO-GIUGNO 2020**

ISSN 1123-7570

Reg. Bassano del Grappa  
N. 4/78 r.p. 21-7-78

Spedizione in abb. postale  
P.T. - Padova / 50 %

Stampa:  
Tipografia Battagin  
San Zenone degli Ezzelini

# CENTRO RICERCHE DIDATTICHE "UGO MORIN"

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA  
E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Fondati da Fratel Roberto Sitia

VOLUME 43A-B N.3

MAGGIO-GIUGNO 2020

## CONSIGLIO DI PRESIDENZA

**Mario Ferrari**

**Presidente Onorario**

mario.ferrari@unipv.it

**Cinzia Bonotto**

**Presidente**

bonotto@math.unipd.it

**Pierluigi Ferrari**

pierluigi.ferrari@uniupo.it

**Alessandra Gamba**

ale.gamba3@libero.it

**Luca Nascardi**

lunascardi@virgilio.it

**Silvano Rossetto**

rossetto49@gmail.com

**Luigi Tomasi**

luigi.tomasi@libero.it

**Sergio Zoccante**

sergiozoccante@gmail.com

## COMMISSIONE SCIENTIFICA

Bonotto C., Ferrari PL.,

Bartolini Bussi M., Marchi M.,

Paola D., Racugno W.

## COLLABORATORI AT LARGE

Boieri P., Castagnola E., Dané C.,

Dematté A., Ferri F., Garuti R.,

Pellerey M., Pertichino M.

## PROPRIETÀ

C.R.D. "U. MORIN"

31017 Paderno Del Grappa TV

## DIRETTORE RESPONSABILE

Mario Ferrari, Dip. Matematica

Università, di Pavia

## DIRETTORE ESECUTIVO

**Sez.A:** Cinzia Bonotto

Dip. Matematica, Università di Padova

**Sez.B:** Pier Luigi Ferrari

Dip. Scienze e Innovazione Tec.,

Università, Alessandria

## REDAZIONE

**Cinzia Bonotto**

**Gabriella Cimenti**

gabriella@cimenti.it

**Mariangela Chimetto**

mariangela.ch@libero.it

**Maria Alessandra Mariotti**

mariotti21@unisi.it

**Giampietro Zanon**

zanon@filippin.it

## CASA EDITRICE

Giovanni Battagin, Editore

Via dell'Artigianato, 2

31020 S. Zenone Degli Ezzelini TV

Tel. 0423 96 82 34(r.a.)

Telefax 0423 96 82 50

## SEGRETERIA MORIN

via S. Giacomo, 4

31017 Paderno del Grappa TV

cell. 371 377 80 32

crdm@filippin.it

## **BIBLIOTECA DEL CENTRO MORIN**

Responsabile della Biblioteca, che conta più di 8000 volumi e circa 70 riviste, è la professoressa Mariangela Chimetto ([mariangela.ch@libero.it](mailto:mariangela.ch@libero.it)) coadiuvata dai prof. Giuliano Testa ([nonno.giuli.44@gmail.com](mailto:nonno.giuli.44@gmail.com)) e Luigi Tomasi, dalle insegnanti Maria Teresa Cecco ([lvdallacorte@gmail.com](mailto:lvdallacorte@gmail.com)) e Maria Luisa Bizzotto ([marialuisabizzotto@tiscali.it](mailto:marialuisabizzotto@tiscali.it)), e da Livio dalla Corte ([lvdallacorte@gmail.com](mailto:lvdallacorte@gmail.com)). La Biblioteca è aperta al mattino delle domeniche nelle quali si svolge il corso di aggiornamento e per **appuntamento** con uno dei responsabili. I libri possono essere consultati in loco oppure chiesti in prestito, non più di due contemporaneamente, con restituzione entro 30 giorni. Il prestito è gratuito per i Soci. Vengono naturalmente addebitate le spese postali. **Le riviste sono escluse dal prestito.**

È attivo anche un servizio di fotocopie (10 centesimi a pagina).

Il catalogo della Biblioteca può essere consultato anche visitando il sito: [www.filippin.it/morin/biblioteca/default.htm](http://www.filippin.it/morin/biblioteca/default.htm)

## **AGGIORNAMENTO**

Responsabili delle attività di aggiornamento: Domenica Baggio ([domenica.baggio@tin.it](mailto:domenica.baggio@tin.it)), Mariangela Chimetto, Alessandra Gamba, Silvano Rossetto, Luigi Tomasi, Sergio Zoccante.

Per richieste al Centro (anche per la pubblicazione di brevi articoli su attività nelle classi o approfondimenti elaborati da studenti) gli indirizzi di riferimento si trovano alla pagina

<http://www.centromorin.it/info/organigramma.htm>

## **SITO WEB DEL CENTRO MORIN**

<http://www.centromorin.it/>

Giovanni Artico ([polarprof@libero.it](mailto:polarprof@libero.it)) e Silvano Rossetto

## **ORGANIZZAZIONE DEL CENTRO**

Gabriella Cimenti ([gabriella@cimenti.it](mailto:gabriella@cimenti.it))

Centro Morin: 371 377 80 32; [crdm@filippin.it](mailto:crdm@filippin.it)

**INDICE**  
**SEZ. A-B**

Pag.

- 206 Editoriale  
*Cinzia Bonotto*
- 208 La rivista del Centro Morin. Cenni di storia  
*Mario Ferrari*
- 245 Il gioco della vita  
*Candido Sitia*
- 261 Le piramidi di mattoni  
*Clara Bozzolo, Elisabetta Bracchi*
- 277 Elogio della geometria descrittiva  
*Modesto Dedò*
- 291 Applicazioni pratiche dell'insegnamento della matematica  
*Arthur Engel*
- 313 L'aritmetica nel mondo greco  
*Pierluigi Pizzamiglio*
- 327 Riflessioni sull'insegnamento dell'analisi matematica  
*Giovanni Prodi*
- 338 Vedere da punti di vista diversi la geometria  
*Francesco Speranza*
- 352 Dal concreto della scuola dell'obbligo all'astratto della scuola superiore. Conquista di sapere o perdita di significato?  
*Vinicio Villani*
- 390 Informazioni – Recensioni  
*La Presidenza*

## EDITORIALE

50 anni sono tanti per una rivista anche perché, come già scriveva Candido Sitia nell'editoriale del numero di gennaio del 1994 (in occasione dell'entrata della rivista nel venticinquesimo anno di vita) *“la rivista non è espressione di una casa editoriale che ha strutture e mezzi per garantire una vita tranquilla. Sono tanti perché nella vita della rivista tutto è basato sul volontariato”*.

E affermava che la nostra rivista *“ha rispecchiato l'evoluzione della ricerca in didattica della matematica in Italia, pubblicando significativi contributi dei ricercatori italiani ... Nello stesso tempo, però, essa continua ad essere una rivista per insegnanti. Non sempre è facile conciliare le esigenze e le attese di ricercatori e di insegnanti, ma confidiamo di esserci più volte riusciti... Il 1994 potrebbe essere un anno importante per la scuola italiana perché potrebbe vedere l'avvio della scuola biennale di specializzazione post-lauream per insegnanti, e potrebbe dare inizio alla riforma della scuola secondaria superiore. Per noi, invece, il 1994 sarà ancora, e di più, un anno di servizio agli insegnanti e, quindi, alla scuola italiana”*.

Purtroppo sono passati più di 25 anni senza che si sia visto l'avvio della scuola biennale di specializzazione post-lauream per insegnanti e neppure quello della riforma della scuola secondaria superiore.

Resta per noi la costante di essere sempre a servizio degli insegnanti, e quindi della scuola italiana, mai come ora alle prese con notevoli cambiamenti repentini e complessi e, come chiudeva l'editoriale Sitia, *“...questo servizio è la vera nostra molla, è la ragione dell'esistenza del Centro Morin. E ne siamo orgogliosi.”*. Ed è questo che ci spinge ad andare avanti, nonostante le difficoltà sempre maggiori, anche perché tutto è ancora basato sul volontariato.

Abbiamo deciso di ricordare questo importante “doppio” anniversario con questo numero “doppio” (al quale ne seguirà un altro alla fine dell'anno); la scelta dei contributi da ripubblicare non è stata

facile, molti i criteri da poter utilizzare, dato il ricco materiale a disposizione. Alla fine abbiamo pensato, in particolar modo ma non solo, ai fruitori più giovani, a quelli che non hanno avuto modo di conoscere di persona, e molto probabilmente neanche attraverso i loro scritti, alcuni grandi colleghi che si sono prodigati con dedizione nell'affrontare i vari aspetti legati dell'insegnamento della matematica a livello scuola preuniversitaria. Un grazie particolare va ai membri del Centro che hanno riscritto i vari articoli.

Dei contributi che troverete, segnalo in particolare “*La rivista del Centro Morin. Cenni di storia*” scritto per l’occasione da Mario Ferrari (pilastro insostituibile per il Centro Morin), che ripercorre, con grande ricchezza di informazioni, il lungo cammino percorso dalla rivista in questi 50 anni, e “*Il Gioco della Vita*” di Candido Sitia, il fondatore della nostra rivista, come ci ricorda Ferrari nel suo articolo.

Lo scorso 11 aprile ci ha lasciato John Horton Conway, geniale e poliedrico matematico inglese noto per i suoi contributi in numerosi settori della matematica, in particolare nella teoria dei gruppi finiti, nella teoria dei nodi, nella teoria dei numeri e nella teoria dei giochi combinatori. L’articolo di Sitia è dedicato a quel gioco della vita che rese famoso Conway anche presso il grande pubblico. Nel contributo troverete la descrizione di un adattamento del gioco rivolto a bambini della scuola primaria, progettato da Sitia assieme a Vittorio Checucci, e sperimentato con successo da insegnanti del Centro Morin.

Buona lettura

La Presidenza

# LA RIVISTA DEL CENTRO MORIN

## CENNI DI STORIA

Mario Ferrari

### 1 - INTRODUZIONE

Il Centro Morin nasce ufficialmente nelle vacanze natalizie del 1968, precisamente il 27 dicembre, presso l'Istituto Filippin di Paderno del Grappa (Treviso). La denominazione ufficiale allora adottata fu di "*Gruppo di Pedagogia della matematica*". L'intestazione del Gruppo a Ugo Morin avviene all'inizio del 1970. Con il 1975 il Gruppo assume l'attuale nome di "Centro Ricerche didattiche UGO MORIN".

Durante l'assemblea fondativa i Soci si preoccuparono di fissare gli scopi del Gruppo e di elencarli nello "Statuto provvisorio". Eccoli:

- a) l'aggiornamento sistematico degli insegnanti che intendono collaborare;
- b) l'informazione bibliografica e dei sussidi didattici;
- c) la conoscenza di convegni e di ogni iniziativa italiana e straniera;
- d) lo scambio di esperienze realmente effettuate;
- e) la stesura di progetti di programma da sperimentare nell'insegnamento della matematica;
- f) il controllo psico-pedagogico delle esperienze fatte e dei risultati raggiunti.

Nessuno dei "padri fondatori" propose di dar vita ad una rivista per favorire il raggiungimento di questi scopi. Il collegamento tra i soci

e con i nuovi aderenti fu tenuto con “Circolari” scritte da frater Roberto Sitia dei Fratelli delle Scuole Cristiane, chiamati anche, dal nome del fondatore, “Lassalliani”. Roberto era il nome di religioso di Sitia; il suo nome di battesimo era “Candido” (Dino per amici e familiari). L’esistenza di queste “Circolari” è ricordata da frater Roberto nel primo numero della Rivista del 1970. Nella rubrica “Notizie e Informazioni”, a pagina 21, egli scrive: “Come fu comunicato nella circolare di gennaio 1970, punto 5°...”. A pagina 23 troviamo scritto: “Abbiamo già pubblicato nelle nostre circolari precedenti...”. Dopo qualche mese le “Circolari” furono rimpiazzate dalla rivista. La sua “nascita” fu un atto di estremo coraggio, forse anche di incoscienza, certo di grande speranza nel futuro. A questa speranza il Centro Morin ha creduto ed ora con soddisfazione celebra i primi 50 anni della sua rivista.

## 2 - I PRIMI CINQUE ANNI

La rivista nasce nel 1970 con il titolo “L’Insegnamento della Matematica”. Non so documentare chi abbia deciso la nascita e chi abbia inventato il titolo. Penso sia stato frater Roberto Sitia, il quale, nei primi due numeri della rivista, figura come “Editore” e non fa parte del Comitato redazionale. Nel numero 3 del Vol. 1 (Ottobre - Dicembre 1970) come Editore compare anche Alberto Cignetti. I due editori e Renato Rossi costituiscono anche il Comitato redazionale.

Nel 1970 sono usciti tre numeri della rivista, i primi due ciclostilati ed il terzo stampato con una decorosa veste tipografica.

L’editoriale del primo numero, firmato da “La Redazione”, enunciava i principi cui si sarebbe ispirata la rivista, anzi il “Giornale” come viene chiamato nell’Editoriale:

**il servizio:** del Consiglio di Presidenza del “Gruppo Ugo Morin” ai soci, dei soci fra di loro e, “*sia pur consapevolmente umile*”, un servizio alla scuola italiana;

**la testimonianza** di una presenza: “*la nostra presenza nel mondo della scuola in un momento tanto critico, delicato e importante qual è quello che stiamo attraversando [...] nel tentativo sempre rinnovato di far nuova la scuola per i nuovi giovani che dovranno affrontare un mondo nuovo*”;

**la libertà:** una rivista aperta “*a tutti, senza idee preconcepite, senza pretese di esclusivismi d’ogni genere. [...] Le loro [dei soci] esperienze, le loro ricerche, le loro illusioni e, perché no?, anche le loro delusioni, i loro fallimenti e le loro divergenze di opinioni troveranno qui eco fedele.*”

Per la conoscenza che ho della storia della rivista, credo di poter affermare che questi principi siano sempre stati rispettati nelle svariate attività del Centro Morin e non solo nella rivista.

Per il **servizio** vorrei sottolineare la totale gratuità di tutti quanti partecipano alle attività del Centro, articolisti compresi. La **libertà** è sempre stata totale: al Centro non si è mai chiesto l’appartenenza religiosa, le simpatie politiche, le scelte sociali.

La rivista esce come: Organo interno del Gruppo di Pedagogia della matematica “Ugo Morin” fino al 1974 compreso.

Quando è uscito il primo numero? La rivista non riporta i mesi di riferimento (lo farà dal numero 3 in poi), ma certamente il numero è uscito dopo il mese di febbraio, dato che si annuncia la pubblicazione italiana dei “Fondamenti della geometria” di Hilbert (Feltrinelli, febbraio 1970), e prima del mese di maggio, dato che si annuncia al futuro il convegno di Knokke in Belgio (5 - 7 maggio 1970).

Mi sembra che il primo numero, anche senza dirlo esplicitamente, dia un po' il "la" alla strutturazione della rivista, meglio dei singoli numeri. In esso compaiono tre articoli, preceduti da una presentazione (AI NOSTRI LETTORI) ed una serie di rubriche (recensioni, notizie bibliografiche e notizie di convegni), scritte tutte da FROSI (Fratel Roberto Sitia).

I tre articoli, o meglio la loro prima parte (la seconda apparirà nel numero 2) sono dovuti a due stranieri (R. Gauthier, francese, e T. Varga, ungherese) e ad un italiano, Traber (Tranquillo Bertamini, preside del Liceo Brocchi di Bassano del Grappa, morto a 95 anni nel 2017). Il numero 3, oltre alle rubriche, contiene un solo articolo del prof. statunitense H.F. Fehr.

L'avvio della rivista è stato un po' faticoso e affidato sostanzialmente ad amici stranieri di Sitia. È da sottolineare, però, il fatto che la rivista ha contribuito a far conoscere in Italia T. Varga, che avrà un notevole influsso sul rinnovamento dell'insegnamento della matematica almeno a livello elementare (si ricordi il progetto RICME); inoltre, vorrei sottolineare il valore anticipatorio dell'articolo di Varga: "Una lezione di logica", resoconto di una lezione di Dienes in una classe elementare. Nozioni di logica nella scuola primaria compariranno nella scuola italiana solo con il tema "Logica" dei programmi del 1985.

Con il 1971 la rivista si arricchisce di un corposo "Comitato consultivo" costituito prevalentemente da stranieri fra cui Papy, Freudenthal, Varga. Fra gli italiani ricordo Checcucci, Ciampa, Ferrero e Pescarini.

In quest'anno escono solo due numeri della rivista, ma sono numeri doppi: 1-2 gennaio - aprile e 3-4 maggio - ottobre.

Il numero 1-2 riporta gli atti del "Il Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica" organizzato dal Gruppo Ugo Morin e tenutosi a Paderno il 26 - 27 settembre 1970 (il primo

convegno nazionale è stato quello della assemblea fondativa). Iniziava, così, la scelta, in realtà non sempre mantenuta, di dedicare un numero della rivista agli Atti del Seminario nazionale del Centro Morin. Questa scelta diventerà definitiva con il numero di novembre - dicembre del 1991.

Uno dei relatori fu Varga con un intervento su “Logica e probabilità nella scuola elementare”. Mi pare importante riportare quanto scrive all’inizio della sua relazione: *“Non si tratta, inserendo la logica e la probabilità nell’insegnamento elementare, di fornire un anticipato insegnamento sistematico delle discipline “LOGICA” e “TEORIA DELLE PROBABILITÀ”, ma di aiutare coscientemente a pensare in certi modi che potrebbero essere definiti “logici” e “probabilistici”.*” La probabilità nella scuola elementare sarà inserita nei programmi del 1985.

Nel numero 3 - 4 compare per la prima volta un articolo di Checcucci (e Venturi) su “La trigonometria del triangolo”. Checcucci diventerà un “habitué” del Centro con diversi interventi anche sulla rivista.

Nella seconda pagina di copertina del numero 1-2, tra le AVVERTENZE, ne compare una un po’ strana. Vi si dice che *“L’INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA assume con questo numero una nuova veste: [...] cessa di essere una rivista e diventa una COLLANA di quaderni [...] che saranno distribuiti gratuitamente ai Soci regolarmente iscritti.*” Nella realtà, però, nulla cambia esteriormente: i numeri continuano ad avere il formato dell’ultimo numero del 1970, la numerazione dei volumi è progressiva a partire dal 1970 (vol. 1). Queste avvertenze compaiono anche nel 1972, ma vengono abbandonate nel 1973. Forse si parla di collana per evitare questioni burocratiche: per una rivista si paga un abbonamento mentre i quaderni della collana sono distribuiti ai Soci che hanno versato la quota di associazione.

La cosa più interessante di queste avvertenze è che si cerca di delineare, in modo esplicito, i possibili contenuti dei quaderni. Riassumendo: ci saranno articoli di carattere culturale, articoli di didattica e di metodologia e la rubrica “Abbiamo letto per voi” per presentare articoli di riviste straniere ed italiane. Questa rubrica, senza mantenerne il nome, viene estesa presto anche ai libri e continuerà ad essere sviluppata fino a diventare un numero autonomo della rivista col titolo “Supplemento bibliografico” (nel 1982) e poi “Bollettino Bibliografico” (nel 1986).

L'annata 1972 è, quasi, un mondo a sé. Anzitutto, caso unico, per il formato “enorme” della rivista: formato A 4, che sarà subito abbandonato nel 1973. Inoltre escono solo due numeri sproporzionati fra loro: numero 1 (gennaio - marzo) di 74 pagine e numero 2-3-4 (aprile - dicembre) di 172 pagine. Le pagine 23 - 110 sono occupate da tre articoli di Arthur Engel: *Applicazioni pratiche dell'insegnamento della matematica*; *L'importanza di certi campi moderni della matematica*; articoli tradotti da Sitia da *Educational Studies in Mathematics*, rivista alla quale il Centro Morin è abbonato dal primo numero. Il terzo articolo è dedicato a “*L'insegnamento della probabilità nelle scuole medie*” tradotto da Sitia da *International Journal of Mathematical Education*. Inutile sottolineare la forte anticipazione temporale della rivista del Centro Morin su questo argomento, dato che i primi elementi di probabilità per la scuola media italiana appaiono solo nei programmi del 1979.

Il 1973 possiamo considerarlo l'anno della normalizzazione. Anzitutto si ritorna al formato del 1971 della rivista, formato che, con qualche leggera modifica, è rimasto fino ai nostri giorni. Scompaiono i termini “Giornale” e “Collana”. Quest'ultimo termine sarà usato più tardi per indicare pubblicazioni del Centro, indipendenti dalla rivista, come COLLANA “QUADERNI DIDATTICI”, COLLANA “QUADERNI DI LAVORO”, ecc. Trionfa il termine RIVISTA per

indicare “L’Insegnamento della Matematica”. Il termine viene usato nella PRESENTAZIONE del numero 1 (gennaio - marzo) dovuta a Sitia: “Questo numero della rivista si presenta...). Soprattutto viene pubblicato uno STATUTO DELLA RIVISTA. La giustificazione dello Statuto viene fornita nell’Editoriale 1973 firmato dalla Redazione: *“Abbiamo voluto elaborare uno statuto della rivista che ci permettesse di fare una scelta precisa degli articoli da stampare, che ci desse gli argomenti per opporre dei rifiuti agli articoli non corrispondenti alle finalità della rivista; uno statuto infine che delineasse anche un chiaro orientamento della rivista, ossia una presa di posizione autonoma e precisa nei confronti dell’azione da esercitare per il rinnovamento della scuola italiana.”* Lo Statuto si ispira ad alcuni “documenti” scelti dalla Redazione e premessi allo Statuto vero e proprio che si compone di 9 articoli. Mi piace riportare alcune espressioni di R. Godement tratte dalla prefazione del suo *Cours d’Algèbre*: *“Il primo dovere dei matematici, e di molti altri, dovrebbe essere quello di fornire una cosa di cui non vengono mai richiesti, cioè uomini capaci di riflettere da se stessi, di smascherare gli argomenti falsi e le frasi ambigue, e agli occhi dei quali la diffusione della verità fosse infinitamente più importante che, ad esempio, la televisione planetaria a colori e a rilievo; degli uomini liberi e non dei robot ad uso dei tecnocrati... Anche insegnando matematica, si può almeno tentare di dare alle persone il gusto della libertà e della critica, abituandole a vedersi trattate da esseri umani dotati della facoltà di comprendere”*.

Questi “documenti” sono confluiti, insieme a parecchi altri, nel Quaderno Didattico N. 6 (Supplemento al Vol. 3 - N. 3, luglio 1980 della rivista “L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate” che d’ora in avanti indicherò con la sigla IMSI). Forse è più interessante notare che tutti questi “documenti”, ampiamente commentati, si trovano anche nell’opuscolo di Vittorio Checcucci,

*La matematica oggi: i suoi fini e il suo apprendimento*, Casa Editrice G. D'Anna, 1974.

Sono pagine introduttive, per i docenti, al libro di testo per la scuola media "Matematica e realtà".

Nel 1973 sono usciti tre numeri della rivista: N. 1 (gennaio - marzo), N. 2-3 (aprile - ottobre), N. 4 (ottobre - dicembre). Le indicazioni relative ai mesi sono poco attendibili. Nel numero 1, per esempio, a pagina 13 si trova una foto di Salvatore Ciampa ed un breve ricordo. È da notare che Ciampa, come riportato nella rivista, è morto il 18 luglio 1973. Nel numero 4, alle pagine 7 - 8, Sitia pubblica un breve ricordo di fratel Paul Burgraeve, morto a Ostenda l'11 maggio 1974. Questi fatti, secondo me, sono una spia delle difficoltà che i responsabili della rivista avevano nel confezionare i singoli numeri. Difficoltà, che in parte si sperimentano anche ai nostri giorni, dovute al ritardo nella consegna degli articoli, magari alla sbobinatura ed alla traduzione, alla battitura e ribattitura a macchina.

Un altro aspetto che si rileva guardando all'annata nel suo complesso è la sproporzione fra gli articoli dovuti a stranieri e quelli firmati da italiani: su 13 articoli complessivi ben 8 sono firmati da stranieri. Questo fatto è dovuto certamente alla rete di conoscenze di stranieri di Sitia, ma anche, forse, allo scarso impegno degli italiani nel settore della didattica.

Fra gli articoli del N. 1 vorrei segnalare quello di F. Papy su "Libertà creativa". Di questo articolo, insieme ad altri tradotti dalla rivista "Mathematics Teaching" (marzo 1973) e non pubblicati sulla nostra rivista, Sitia ha curato una edizione a parte, in formato A4, come "Supplemento per gli insegnanti della scuola elementare" con l'indicazione "Aprile 1973". Siccome questo supplemento non è stato inserito nel sito del Centro, riporto alcune espressioni contenute nella presentazione di Sitia: *"Due aspetti sottolineerei in questa relazione:*

a) *l'accentuazione costante della libertà creativa del fanciullo, quella della sua iniziativa e della sua spontaneità sempre riguardosamente salvaguardate;*

b) *la coerenza dell'edificio matematico che, in questo contesto di libertà (che comprende come fattore essenziale la libertà dell'INSEGNANTE), è stato edificato.*

*Vorrei ricordare a tutti gli Amici quanto ebbe a ripetermi più volte Mme Frédérique: "Quello che è essenziale è sempre la pedagogia e la didattica sottogiacente: il contenuto matematico è importante solo in quanto è in funzione dello sviluppo del bambino".*

Del numero 1 vorrei segnalare, perché ormai difficilmente reperibili, i "Documenti della 2° Settimana Internazionale della Scuola sul tema "Aspetti e problemi della Scuola in Europa" concernenti l'insegnamento della matematica". Questi documenti sono stati presentati da Varga (*Quale matematica insegnare*), Freudenthal (*Matematica per tutti*) e Ciampa (*Perché insegnare matematica?*).

Nel numero 2-3 vi è un breve articolo di Checcucci su "Le basi psicopedagogiche per la conquista del linguaggio" che fa da sfondo a "Una mostra di matematica" illustrata sinteticamente da Sitia nel numero 4; inoltre un lungo articolo di carattere didattico di Engel su "Attività geometriche per la scuola media inferiore" tradotto da Sitia da "Educational Studies in Mathematics". Segnalo anche la comunicazione di Piaget al congresso internazionale di Exeter del 1972 su "Alcune considerazioni sull'educazione matematica". Queste considerazioni sono state pubblicate anche nel Quaderno 10 dell'UMI: *La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche, orientamenti* (Pitagora 1979), curato da C. Sitia.

Le difficoltà messe prima in risalto sono, forse, la causa della "scarsa produzione" della rivista nel 1974. Solo due numeri, ufficialmente

doppi: numero 1-2 (gennaio - settembre) e numero 3-4 (settembre - dicembre), ma ciascuno con un numero di pagine come i numeri singoli. Inoltre, complessivamente, solo tre articoli, due di italiani (Speranza e M. Ferrari) ed uno di Engel.

L'articolo di Speranza "Il linguaggio delle espressioni" ha carattere generale; quello di M. Ferrari "La teoria della misura nella scuola media inferiore. Resoconto di una esperienza" ha carattere didattico; quello di Engel: "Una panoramica per un corso di matematica per la scuola media superiore orientato sui problemi, sul calcolatore e sulle applicazioni" è una proposta per la scuola media superiore. Nel titolo compaiono tre parole: "Problemi", "Calcolatore", "Applicazioni" che, anni dopo, appariranno anche nei programmi di matematica della scuola italiana.

Nel numero 1-2 troviamo il resoconto del "III Seminario Residenziale per l'aggiornamento degli insegnanti elementari". Tutto il seminario è stato quasi esclusivamente incentrato sullo studio di due mostre di materiale didattico:

**IL NUMERO QUANDO SERVE PER RAGIONARE**, allestita dal gruppo di Pisa sotto la direzione di Checcucci;

**LA GEOMETRIA DELLE TRASFORMAZIONI**, allestita dal gruppo di Pavia sotto la direzione di M. Ferrari.

La mostra di Checcucci, purtroppo, non è mai stata pubblicata in un volume, come avrebbe meritato. Sulla rivista è apparso un breve intervento, a firma di Giuliana Pistelli, nel resoconto del Seminario. Essa, però, è stata "risuscitata" da Silvano Rossetto in occasione del XLV Seminario Nazionale (2016). Le informazioni sulla mostra si trovano nel suo intervento "La mostra di Checcucci: i numeri quando servono per ragionare" (IMSI, nov - dic 2016, pag. 681 - 704).

Alla mostra sulle isometrie la rivista ha dedicato due articoli:

M. Ferrari, Le isometrie piane: una mostra di materiale didattico. Discorso introduttivo (giugno - agosto 1975, serie rossa);

M. Ferrari - L. Bazzini - A. Pesci - M. Reggiani, Le isometrie piane: una mostra di materiale didattico, (settembre 1976, serie verde).

Dopo varie peregrinazioni nelle città italiane, ricordate nel secondo articolo, i 182 cartelloni della mostra, abbondantemente commentati, sono stati stampati nel volume

M. Ferrari - L. Bazzini - A. Pesci - M. Reggiani, **LE ISOMETRIE PIANE. Mostra di materiale didattico.**

Il volume, stampato nel 1988, fa parte del “Progetto Strategico del C.N.R.: Tecnologie e innovazioni didattiche, sezione “Innovazioni didattiche per la matematica”

L’editoriale del numero 3 - 4 contiene un “addio” ed un nuovo “inizio”. L’addio è al Gruppo “UGO MORIN”, alla sua rivista come “Organo interno” e a Paderno del Grappa per la redazione e segreteria della rivista.

Il nuovo inizio è per il CENTRO RICERCHE DIDATTICHE “UGO MORIN” (è la denominazione definitiva assunta dal Gruppo); per la rivista che continua le pubblicazioni, ma non più come organo interno; per il trasferimento a Bassano del Grappa della Direzione e Amministrazione del Centro. Soprattutto è l’inizio di una collaborazione con il CNR e con l’UMI. Qui riporto le parole dell’Editoriale: *“Un ringraziamento vorremmo porgere al Consiglio Nazionale delle Ricerche che, riconoscendo validità al nostro lavoro, ha voluto contribuire con una generosa partecipazione alle nostre spese; all’Unione Matematica Italiana per il contributo fornitoci a sostegno delle spese affrontate nell’ultimo seminario residenziale di Paderno.”*

Il trasferimento a Bassano avverrà verso la fine del 1975; il sostegno dell'UMI si limiterà al 1976 mentre quello del CNR continuerà per parecchi anni, fino al 2001.

### **3 - DAL 1975 AL 1977**

Nel triennio 1975 - 1977 si registrano, nella vita della rivista, diverse novità.

**Anzitutto** vi è un cambiamento nella proprietà della rivista. Questo cambiamento è annunciato nella quarta di copertina del numero 3 (serie rossa), maggio 1976: “A causa della legalizzazione della rivista, la proprietà della testata è passata alla società: ESTA SpA, via Paradisi 15, Trento, che diventa anche l'Editore della rivista.” La registrazione della rivista presso il Tribunale di Bassano del Grappa, comporta la presenza di un Direttore responsabile, che viene individuato in Antonio Scremin, mentre Sitia continua ad essere il direttore redazionale (o denominazione equivalente). Questi cambiamenti che durano fino a tutto il 1977, non “modificano per nulla la politica editoriale della rivista che continua ad essere redatta dal Centro Ricerche Didattiche U. Morin” come è scritto nella stessa quarta di copertina.

**Una seconda** novità è costituita da una “new entry” negli argomenti della rivista: appaiono i primi articoli di scienze. Il primo è quello di M. Rigutti: “Un progetto di esperienza per l'insegnamento dell'Astronomia nel secondo ciclo della scuola elementare” (serie rossa, N. 2. giugno - agosto 1975).

Inoltre il numero 9-10-11-12 (settembre - dicembre 1977,) contiene gli Atti del Seminario residenziale sul tema “L'Insegnamento di Scienze Matematiche, Fisiche, Chimiche e Naturali” (Paderno 15-17

settembre 1977) con articoli di professori del Seminario didattico della Facoltà di Scienze dell'Università di Pavia e di C. D'Argenzio.

**La terza** novità è rappresentata dal fatto che gli autori italiani sono in netta maggioranza rispetto agli stranieri.

E veniamo alla **novità più visibile**: lo sdoppiamento della rivista in due serie (che descriveremo successivamente): serie con la copertina **verde** (si pensa di arrivare presto, ma non subito, a otto numeri all'anno; serie con la copertina **rossa** (si pensa a quattro numeri all'anno). La periodicità, quindi, dovrebbe diventare mensile. Tutto ciò viene annunciato da Sitia nell'EDITORIALE del Vol. 6 N. 1 (gennaio - marzo 1975).

Nonostante l'immane impegno di Sitia che allora lavorava quasi in totale solitudine alla costruzione della rivista, gli esiti non sempre corrisposero ai desideri.

Nel 1975 uscirono quattro numeri della serie rossa e quattro della serie verde.

Nel 1976 furono pubblicati tre numeri della serie rossa ed altrettanti di quella verde. Sul numero 1-2 (marzo - aprile) compare per la prima volta sulla copertina, la dicitura "Rivista mensile".

Nel 1977 se contiamo un numero doppio (4 - 5, aprile - maggio), un numero triplo (1-2-3, gennaio - marzo) e un numero quadruplo (9 - 10 - 11- 12, settembre - dicembre) i numeri pubblicati sono dodici e si raggiunge, per la prima volta, la periodicità mensile, periodicità che durerà poco perché con il 1978 la rivista diventerà bimestrale.

Le caratteristiche delle due serie, rossa e verde, sono delineate da Sitia nell'Editoriale prima ricordato.

I numeri della **serie rossa** *"conservando la copertina della rivista precedente, intendono anche conservarne la sostanza: saranno*

*numeri dedicati alla informazione di carattere internazionale, con articoli monografici dei nostri Collaboratori italiani e stranieri, su questioni di contenuto matematico, di didattica della matematica, di didattica generale, di pedagogia e, progressivamente, di contenuto interdisciplinare.*

*L'edizione, con la copertina di **color verde**, è dedicata sostanzialmente agli insegnanti in servizio attivo e vuole servire più direttamente al loro aggiornamento permanente, fornendo nel contempo delle idee e degli spunti per la sperimentazione in classe. Sia ben chiaro che noi non intendiamo con queste pubblicazioni presentare ai Lettori delle "lezioni predigerite" da riportare sic et simpliciter in classe! Ogni insegnante ha la sua personalità che va rispettata; ogni classe, ogni allievo ha la sua personalità a cui bisogna adattare il lavoro che si fa in classe. Quindi ognuno dovrà necessariamente rielaborare quanto verremo pubblicando, adattandolo alla sua personalità e alle necessità della classe, pena il tradimento delle nostre intenzioni e il tradimento della propria missione di insegnante."*

Mi sembra che la rivista, nel triennio, si sia mantenuta sostanzialmente fedele a queste indicazioni.

Per la serie verde del 1975, la "Avvertenza" iniziale contenuta nel Vol. 6 N. 1. A (aprile 1975) afferma che gli "argomenti verranno svolti a diversi livelli e saranno, generalmente, preceduti da una breve introduzione rivolta all'insegnante al fine di chiarire gli obiettivi che ci si propone di raggiungere, i concetti teorici che vi sottostanno, la bibliografia essenziale e i suggerimenti concreti per la realizzazione didattica. Questi argomenti saranno sviluppati sotto forma di unità didattiche e presentati in diversi numeri successivi della rivista."

Obbediscono a questi criteri gli articoli di C. Sitia (*Alla scoperta del cerchio*) e di M. Rossi e C. Scarlati (*Alla scoperta della simmetria*) pubblicati nei quattro numeri della serie verde (aprile, maggio, ottobre, novembre).

Nei due anni seguenti questi criteri non vengono esplicitamente abbandonati, ma non sono più fedelmente seguiti.

Nella serie rossa, insieme ad articoli di stranieri come R. Holvoet, J.C. Matthys, T. Varga, vengono pubblicati due articoli di G. Prodi.

Il primo: *“Un nuovo programma di matematica per il biennio”* (Vol. 6, N. 2, giugno - agosto 1975) illustra e riporta un programma di matematica per il biennio del liceo scientifico e la sperimentazione personalmente condotta per il primo anno. Da qui nascerà, negli anni seguenti, il *“Progetto: Matematica come scoperta”* ben noto agli insegnanti italiani.

Il secondo: *“La teoria degli insiemi nella introduzione alla matematica di base”* (Vol. 6, N. 3, settembre 1975) è, come si scrive nell'Editoriale, *“un lucido articolo sulla “insiemistica” che chiarisce una serie di problemi e dà indicazioni di carattere didattico, soprattutto adatti agli insegnanti elementari.”*

Vi sono anche due articoli di F. Speranza.

Il primo riguarda uno dei cavalli di battaglia di Speranza: *“Vedere da punti di vista diversi la geometria”* (Vol.6, N.3, settembre 1975). Il secondo tratta un argomento insolito per la rivista e per la scuola italiana: *“Introduzione alle categorie - I”* (Vol 6, N.4, dicembre 1975. La soluzione degli esercizi appare nella serie verde (settembre 1976). La seconda parte dell'articolo sarà pubblicata nel Vol. 1, N. 1, I Bimestre 1978.

Merita di essere ricordato, per la serietà, l'equilibrio e l'ampio respiro, l'articolo di Varga: *“La riforma dell'insegnamento della matematica”* ripreso dal Bollettino del Centro Didattico Nazionale per l'Istruzione Tecnica e Professionale.

Nella serie rossa del 1977 compaiono due corposi interventi, di carattere esclusivamente didattico, del Nucleo di ricerca in didattica della matematica della Università di Pavia, coordinato da M. Ferrari. Del Nucleo faceva parte la dottoressa Daniela Brandalise, Borsista del CNR, deceduta, con il marito e la madre, in un incidente stradale il 24 agosto 1977 e ricordata dalla nostra rivista nel numero di settembre - dicembre 1977.

La giustificazione di questi due interventi si trova nella *“Presentazione”* del numero di gennaio - marzo: *“Il Comitato Redazionale, d'accordo colla Commissione Scientifica, ha deciso che, a partire da quest'anno, venga ulteriormente accentuato l'aspetto, la finalità didattica della rivista al servizio dell'aggiornamento permanente degli insegnanti. Per realizzare queste finalità, la rivista sarà soprattutto la voce delle attività che al Centro Ricerche Didattiche Morin vengono attuate, direttamente o indirettamente, al servizio degli insegnanti.”*

Il primo intervento, firmato da M. Ferrari e D. Brandalise, occupa tutto il numero 1-2-3 (gennaio - marzo) ed ha come titolo: *“Il mondo delle figure geometriche piane: resoconto di un'esperienza”*. Si tratta di un centinaio di schede, con diverse finalità, precedute da alcune pagine di spiegazione. Forse la cosa più innovativa è la presenza di *“Schede stop”* nelle quali vengono sintetizzate e fissate le principali idee scoperte dai ragazzi.

Il secondo intervento: *“La teoria della misura nella scuola media inferiore”* (N. 8, agosto) contiene poco più di 90 schede ampiamente sperimentate in diverse scuole medie. Queste schede, in parte

rielaborate e risistemate, hanno dato origine a due quaderni didattici del Centro: il Quaderno Didattico N. 4 del luglio 1979 ed il Quaderno Didattico N. 5 del settembre 1979, usciti come Supplemento della rivista L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.

Le due serie, rossa e verde, sono sempre state molto attente nel fornire informazioni e bibliografia.

#### **4 - DAL 1978 AL 1985**

Per la rivista, questo è un periodo di novità, di cambiamenti e di stabilizzazione.

La prima novità è la cessazione della duplice serie rossa e verde. Non se ne annuncia formalmente la “morte”, ma non viene più continuata. Viene annunciato ufficialmente, ed è la seconda novità, il cambio del titolo della rivista alla pagina 140 del numero di settembre - dicembre 1977: *“Il Consiglio di Presidenza in riunione con il Comitato Redazionale e con la Commissione Scientifica, preso atto dello sviluppo attuale del Centro, decide di pubblicare, a partire dal corrente anno, la rivista col seguente titolo:*

#### **L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE**

*e di assumersene in proprio il carico di stampa. La nuova rivista continuerà nella stessa linea della precedente, ma aggiungerà alle sue rubriche anche argomenti di scienze fisiche, chimiche e naturali, conformemente al desiderio espresso da molti soci.”*

Con il 1978 Direttore responsabile della rivista ridiventa Candido Sitia, Editore il Centro Morin e Proprietà e Amministrazione ritornano a Paderno del Grappa. Tutto ciò si è stabilizzato fino ai nostri giorni nei limiti dell'umano (Sitia è morto nel 2002).

Nel documento citato si aggiunge che la rivista uscirà in sei numeri/anno di 72 pagine ciascuno. Anche questa è una novità.

A parte qualche incertezza per il 1978 (i primi due numeri hanno solo l'indicazione I Bimestre, II Bimestre senza indicazione di mesi; i numeri 3, 4, 5 sono "targati" settembre, novembre, dicembre) negli anni successivi tutto si stabilizza come indicato ed ogni numero viene "targato" con il nome di un mese "pari". Conviene tener presenti questi aspetti della rivista cartacea perché c'è qualche discrepanza con quanto appare sul Sito del Centro.

Siccome la rivista è nuova, nuova sarà anche la numerazione dei volumi. Quest'anno, 2020, siamo al volume 43.

Nel 1985 la stampa della rivista è affidata alla Tipolitografia Battagin che diventa la tipolitografia storica per tutte le attività editoriali del Centro Morin fino ai nostri giorni.

Una novità è la nascita, nel 1982, del "Supplemento Bibliografico", curato sempre da Candido Sitia e Franco Blezza e destinato a recensire articoli di riviste e libri. Nel 1982 escono tre fascicoli autonomi, staccati dalla rivista, ma in relazione ai numeri della rivista. I Supplementi hanno i numeri 1, 2/3, 4 e non si trovano sul Sito del Centro. Negli anni 1983 e 1984 i "Supplementi Bibliografici", che vanno dal numero 5 al numero 12, sono pubblicati all'interno dei normali fascicoli e si trovano, quindi, sul Sito del Centro. I numeri 13, 14, 15 sono fascicoli autonomi del 1985. Questi tre "Supplementi bibliografici" come pure i "Bollettini bibliografici" 16 e 17 che usciranno nel 1986, sono inseriti "nell'ambito del Contratto CNR-Università Cattolica di Milano, essendo Direttore il prof. Carlo Banfi e Responsabile della Ricerca il prof. Giovanni Melzi". Con il Bollettino N. 18 questa dicitura scompare.

In questo periodo vengono pubblicati, in stretto collegamento con la rivista, alcuni Quaderni Didattici. Lo stretto collegamento è rappresentato dal fatto che questi Quaderni didattici sono costruiti con articoli pubblicati prima sulla rivista. Si tratta del

**Quaderno Didattico N. 8:** “Scienza e tecnica per l’educazione nella scuola primaria” di F. Blezza, edito nel 1984; e del

**Quaderno Didattico N. 9:** “La geometria in 2<sup>a</sup> elementare” di G. Crivelli e M. Ferrari, edito nel 1985. Contiene sette articoli con lo stesso titolo pubblicati fra il 1979 ed il 1980.

Un notevole aspetto di novità è rappresentato dal fatto che gli autori degli articoli pubblicati sono, nella stragrande maggioranza, italiani. Su circa 200 articoli pubblicati, meno del 10 per cento è dovuto ad autori stranieri. Non credo sia stato un fenomeno di provincializzazione; penso, piuttosto ad un aumento di consapevolezza di docenti universitari e di scuole elementari e secondarie ed alla decisione coraggiosa di scrivere e di pubblicare per confrontarsi con altri colleghi.

Non è il caso di riportare tanti nomi. Dirò solo che tra gli universitari ci sono matematici, didattici della matematica, storici della matematica, filosofi della matematica, fisici, chimici, biologi, informatici, pedagogisti.

Credo sia interessante elencare gli argomenti nuovi nel panorama italiano o nella storia della rivista, più presenti in questo periodo.

Molti sono gli articoli dedicati all’informatica sia nei suoi aspetti teorici sia nelle sue applicazioni didattiche nel senso di uso scolastico delle calcolatrici tascabili. Mi limito a ricordarne qualcuno. Credo che quella del Centro sia stata l’unica rivista italiana che ha pubblicato, tradotto da Sitia, il “*Rapporto ICMI su INFORMATICA E INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA*” del 1984. Questo

rapporto è seguito da due interventi, uno di Sitia e l'altro di Prodi, sul collocamento scolastico dell'Informatica: disciplina a sé (Sitia) o inserita nei programmi di matematica (Prodi)? (Febbraio 1985).

Sitia era già intervenuto nel 1983 (numero 1 e numero 2) su "I computers nella didattica della matematica"; Prodi farà sentire la sua voce sul numero 1 del 1984 con un contributo su "I problemi della matematica di fronte all'Informatica". Altri interventi hanno preoccupazioni più direttamente didattiche. Ricordo i tre articoli di C.F. Manara e R. Tardini su "I piccoli calcolatori tascabili nella scuola: spunti didattici" (numeri 3, 4/5, 6 del 1983) e l'articolo di P. Forcheri, E. Lemut, M.T. Molfino su "Microcomputer nella scuola secondaria. Esperienze" (numero 3 del 1984).

Oggi nell'insegnamento della matematica si parla molto di "problemi" e di "insegnamento per problemi".

Preceduto da un articolo di M. Pellerey: "Ruolo dei problemi nell'apprendimento della Matematica" (Numero 1 del 1979), l'argomento è stato affrontato dalla rivista soprattutto negli anni 1984 e 1985.

Nel 1984 spiccano due articoli:

R. Borasi: *"Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulla sua utilizzazione nella didattica della matematica"* (numero 2, aprile);

F. Blezza: *"Il ruolo dei problemi nell'insegnamento della matematica e delle scienze"* (numero 6, dicembre).

Nel 1985 appare sulla scena un Filosofo della scienza, Dario Antiseri:

*"Insegnare per problemi"* (numero 1 febbraio e numero 2 aprile)  
*"Didattica per problemi. Dalla teoria alla pratica: esempi del*

*passato e pratiche recenti nell'insegnamento di Scienze nella scuola elementare"* (numero 3, giugno).

Segnalo anche l'articolo di B. Spotorno, autore, insieme a V. Villani, di un progetto per la scuola secondaria superiore: B. Spotorno: *"Insegnare per problemi nel biennio della scuola media superiore"* (numero 2, aprile).

Un notevole aspetto di novità è l'argomento **"Scienze"**. Abbiamo già ricordato il numero quadruplo 9 -10 -11- 12 del 1977 contenente tre proposte di scienze da sperimentare in classe.

Nel periodo ora considerato gli articoli di Scienze sono più di venti. Il numero 3 (settembre 1978) è tutto occupato dagli **"Atti del Convegno dell'Università Cattolica sul tema "Il ruolo dell'insegnamento delle Scienze nella scuola dell'obbligo", Brescia, 21 gennaio 1978"**. In esso compaiono articoli, necessariamente di carattere generale, di C.F. Manara (Il ruolo dell'insegnamento delle scienze nella scuola dell'obbligo), A. Agazzi (Nuovi programmi per l'insegnamento delle scienze nella scuola dell'obbligo), G. Prodi (Prospettive generali dell'insegnamento delle Scienze Matematiche), G. Fabbri (Prospettive generali dell'insegnamento delle Scienze Chimiche), C. Succi (Prospettive generali dell'insegnamento delle Scienze Fisiche), V.G. Leoni (Prospettive generali dell'insegnamento delle Scienze Naturali).

C'è tutta una serie di articoli di Franco Blezza, alcuni *centrati* *"Sui fondamenti teorici dell'insegnamento scientifico"* (ottobre 1981, agosto 1982, ottobre 1982), altri di argomenti vari. Questi lavori sono confluiti, almeno in parte, nel Quaderno Didattico N. 8 (già ricordato).

Diversi articoli, dovuti prevalentemente al Gruppo di Scienze dell'Università di Pavia descrivono esperienze realizzate nella scuola dell'obbligo.

Agli articoli di Scienze possiamo aggiungere

*“Un progetto di educazione matematico - scientifica per il primo ciclo elementare”* elaborato da un gruppo del Centro Studi per la Didattica della Facoltà di Scienze di Pavia composto da matematici, fisici, zoologi e botanici. Sono undici articoli pubblicati fra il 1982 ed il 1984.

Certamente nuovo per la rivista è il discorso sulla storia della matematica che inizia con una ricerca di tipo archivistico: A. Capelo - M. Ferrari - M. Podavini, *“Un manoscritto inedito di Lorenzo Mascheroni sulle ovali policentriche”* (numero 4-5, agosto - ottobre 1983). La ricerca d'archivio proseguirà con A. Capelo - M. Ferrari - T. Scapolla, *“Un manoscritto inedito di Lorenzo Mascheroni sulla composizione delle forze”* (numero 1 febbraio 1985).

Di carattere storico sono anche due articoli degli Atti del XIV Seminario Residenziale del Centro Morin celebrato nel 1984 pubblicati sul numero 6 (dicembre 1984):

G. Tabarroni, *“I grandi problemi della storia della scienza: criteri, metodologia, periodizzazione”*;

S. Maracchia, *“La risoluzione delle equazioni di secondo grado nelle antiche civiltà”*.

Il Seminario Residenziale del 1985 mette la Storia anche nel titolo: **“I numeri: Storia e Didattica”**. Gli Atti, pubblicati nel numero 6 (dicembre 1985) contengono tre articoli di storia:

P.L. Pizzamiglio, *“L'aritmetica nel mondo greco”*;

S. Maracchia, *“Simbolismo algebrico e scrittura”*;

P. Dupont, “Una fase cruciale nella storia dell’Analisi infinitesimale: il passaggio dal continuo al discreto”.

Nel 1979 entrano in vigore i nuovi programmi per la scuola secondaria di primo grado. Il terzo tema (Matematica del certo e matematica del probabile) prevede nozioni di statistica e di probabilità. In questo periodo la rivista pubblica diversi articoli riguardanti la statistica e la probabilità nella scuola media con proposte di lavoro e resoconti di esperienze. Ci sono contributi di Pintacuda, Pesci, Reggiani, M.P. D’Argenzio, Dupont, Boffa.

Per la geometria voglio segnalare il numero 6 (dicembre 1981) dove si trova la trattazione forse più estesa in italiano della geometria del geopiano, preceduta, sulla rivista, dal resoconto di due esperienze da parte di G. Cimenti e di M. Rigon Grandesso:

Mario Marchi, “*Geometria elementare nel geopiano*”;

Raffaella Borasi, *Contributo sperimentale per l’introduzione di alcuni concetti metrici nella scuola media inferiore*”.

Nel 1985 escono i nuovi programmi per la scuola primaria e la rivista inizia a pubblicare i primi commenti firmati da M. Ferrari. Su questi nuovi programmi inizia la collaborazione che continuerà per molti anni, di Clara Colombo Bozzolo con due articoli:

C. Colombo Bozzolo, “*I Nuovi programmi per la Scuola elementare: problemi di aritmetica*” (giugno 1985 e ottobre 1985). Questi articoli sono poi confluiti nel **Quaderno Didattico N. 10** pubblicato nel 1986.

## 5 - DAL 1986 AL 1994

Perché queste due date? È presto detto. Il 1986 è l’anno di nascita della rivista come è adesso. Nel 1994 un numero speciale doppio, il

numero 5 di settembre - ottobre, è stato dedicato al 25° di fondazione della rivista.

Con il 1986 la rivista diventa MENSILE, caratteristica che si è mantenuta inalterata fino al 2010 e, con un piccolo cambiamento estivo, fino ai nostri giorni. Inoltre la rivista si sdoppia: **una Sezione A** per la scuola elementare (in seguito, si interesserà anche alla scuola secondaria di primo grado), e una **Sezione B** per la scuola secondaria di secondo grado. La nascita della Sezione A è stata suggerita dal fatto che con il 1987 sarebbero entrati in vigore i nuovi programmi per la scuola elementare, programmi molto innovativi ed impegnativi per i docenti. Come scrive la Presidenza nel numero di gennaio 1986, *“Il Centro Morin vuole offrire occasioni agli insegnanti per conquistare la richiesta nuova professionalità nel settore delle matematiche e delle scienze”*. Per questo saranno affrontati soprattutto i temi dei nuovi programmi. Di questa sezione si occuperà in modo particolare, ma non esclusivo, Mario Ferrari dell’Università di Pavia, nominato, all’inizio del 1989, vice presidente del Centro.

La Sezione B continuerà nella tradizione degli anni precedenti cercando anche di sollecitare *“i fermenti di rinnovamento dei programmi della scuola superiore che speriamo di vedere presto pubblicati.”*

Il fatto che la rivista sia diventata mensile ha portato ad un notevolissimo aumento del numero degli articoli pubblicati. Nei nove anni considerati gli articoli sono poco più di 500.

Un’altra novità, è la “nascita” del **Bollettino Bibliografico**, nuova denominazione del “supplemento bibliografico”. Tutti questi Bollettini, dal numero 16 al numero 27, curati sempre da Candido Sitia e Franco Blezza, sono apparsi come fascicoli separati dai numeri della rivista, ma come supplemento di numeri della rivista.

Una menzione particolare merita il Bollettino Bibliografico N. 28 pubblicato come supplemento al numero 5, settembre-ottobre 1994. Ecco come viene presentato nell'Editoriale. In questo Bollettino *“troverete tutti gli indici (di rivista, di autori, analitici) di tutti i numeri della rivista pubblicati dall'inizio (1970) a tutto il 1993. Si tratta di un lavoro veramente monumentale, integrato anche dagli indici dei quaderni speciali e di tutte le altre attività del Centro. È quindi un lavoro scientificamente condotto che permetterà finalmente di avere accesso a tutto quanto in questi 25 anni è stato prodotto nel Centro.*

*Questo quaderno è il frutto del lavoro intelligente, appassionato, accurato del prof. Consolato Pellegrino e della dr.ssa Anna Borrelli del Gruppo di Ricerca sull'Educazione Matematica (G.R.E.M.) dell'Università di Modena. E ciò che più lo rende prezioso è il fatto che è anch'esso frutto di amicizia e di dedizione “a tutti coloro che lavorano per la matematica”.*

Nella Presentazione del numero di gennaio 1987 (Sezione A) la Presidenza annuncia l'apertura di una nuova rubrica: NELLE NOSTRE CLASSI *“nella quale ospiteremo molto volentieri contributi di didattica della matematica e delle scienze di singoli insegnanti”.* La rubrica rimane attiva fino al 1989, ma senza una fisionomia ben definita. Poi scompare, ma riappare parecchi anni dopo in modo un po' random.

Sul numero di giugno 1991 (Vol. 14, N. 6) appare per la prima volta, è, quindi, una novità assoluta, la rubrica **“I problemi del Centro Morin”**. È una rubrica per la Sezione B curata da Sitia. Di solito la rubrica è divisa in due parti: “Problemi proposti” e “Problemi risolti. Il curatore Sitia nel numero di agosto del 1991, scrive che questa rubrica *“propone dei problemi scelti per l'originalità del loro carattere, estetico, sottile, ingegnoso, anche ricreativo, la cui*

*soluzione richiede iniziativa, procedimenti inventivi, ricerca, sforzo intellettuale* (Bulletin de l'APMEP)".

Per il resto, la rubrica è "aperta": i problemi possono essere proposti da soci, da non soci, ripresi da libri e riviste; le soluzioni possono essere fatte dai proponenti, da soci e da non soci, docenti o studenti.

La rubrica appare in tre numeri del 1991 (giugno, agosto, ottobre) e in quattro del 1992 (febbraio, aprile, giugno e ottobre). Poi va in letargo, per gli aumentati impegni scolastici di Sitia, per tre anni. Riprenderà, con una rafforzata "redazione", nel 1996.

Mi sembra doveroso segnalare, per la sua novità nel panorama italiano di allora e, forse, anche di oggi, il "**Forum: Informatica e Insegnamento della Matematica**", sviluppatosi negli USA, pubblicato su "The College Journal" (della MAA), tradotto da Sitia e pubblicato sulla rivista nei numeri 6 e 8 (giugno e agosto) del 1986. Riporto autori e titoli pubblicati nel numero 8 perché credo che siano molto interessanti anche adesso per i docenti di matematica:

Roberts F.S., *Il curriculum propedeutico di Matematica: fuorviante, obsoleto e scorretto*;

Lucas W.F., *I corsi di matematica discreta contengono assai di più degli argomenti di informatica*;

Hamming H.W., *Il calcolo e la matematica discreta*;

Tall D., *La matematica del continuo e la computazione discreta sono complementari non alternative*;

Davis R.B., *Non si tratta di ciò che fate, ma di come lo fate*;

Ellis W., *Anche insegnare è matematica*.

Ritengo importante segnalare il Vol. 16, N 5/6, maggio/giugno 1993 tutto dedicato a due grandi amici del Centro Morin, cioè Vittorio Checcucci e Modesto Dedò. In questo numero che, in un certo senso, ha aperto la strada alla fortunata ed interessante rubrica "Per non Dimenticare" curata, anni dopo, da Gabriele Lucchini vi sono ricordi

di Checcucci e Dedò scritti da Sitia, Prodi e Manara, ed una selezione di inediti di Dedò e di Checcucci.

Dato che vogliamo celebrare il cinquantesimo anno di vita della rivista, mi sembra interessante proporre l'indice del numero del venticinquesimo anno (settembre - ottobre 1994) di cui, devo confessarlo, mi ero completamente dimenticato pur avendo scritto l'Editoriale. In esso dicevo *che* “*Gli articoli e gli Autori non hanno bisogno di presentazione. Gli Autori, impegnati da anni nella didattica della matematica, sono ben noti ai nostri lettori ed i loro articoli sono stati scritti appositamente per questo venticinquesimo*”.

Ecco l'indice.

C. Sitia, *Lo spirito del solaio*;

H-G Steiner, *Didattica della matematica: importanti anniversari e memorie italo-germaniche*;

V. Villani, *L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta*;

G.C. Barozzi, *Un esempio di utilizzo del sistema CABRI-Géomètre*;

R. Borasi, M. Siegel, *Un primo passo verso la caratterizzazione di un “inquiry approach” per la didattica della matematica*;

F. Speranza, *Epistemologia*;

C. Bernardi, *Problemi per la logica (ovvero la logica per problemi)*;

B. Scimemi, *Partizioni*;

F. Arzarello, *L'apprendistato al senso dei simboli in algebra*;

G. Papy - R. Kennes, *Categorie: coscienza di una educazione matematica*;

Fr. Papy, *Momento pedagogico*.

Sarebbero molte le “cose” interessanti da ricordare, ma non voglio esagerare. Voglio, però, segnalare che

- a) nella sezione A hanno incominciato a pubblicare diversi docenti di scuola primaria;
- b) la rivista ha sempre pubblicato, nell'ultimo numero dell'anno, gli Atti del Seminario Residenziale annuale;
- c) parecchi articoli della sezione A sono poi confluiti in Quaderni Didattici. Sono di questo tipo il **Quaderno Didattico N. 11-12** (I Numeri nella scuola elementare: un possibile cammino); il **Quaderno Didattico N. 13-14** (La geometria nel primo ciclo: antologia di proposte didattiche); il **Quaderno Didattico N. 15-16** (La geometria nel secondo ciclo: antologia di proposte didattiche).

## 6 - DAL 1995 AL 2002

Questo periodo è limitato superiormente dal 2002 perché il 22 maggio del 2002 moriva fratel Roberto Sitia, fondatore del Centro Morin ed animatore di tutte le sue attività a cominciare dalla rivista. Con il 2002 finisce "l'era Sitia" del Centro e della rivista, ma nel nome di Roberto e sotto lo sprone del suo esempio è continuata, fino ai nostri giorni, la vita del Centro e della sua Rivista.

Il periodo 1995 - 2002 è un periodo di conferme e di novità per la rivista.

Le conferme sono presto dette.

La periodicità della rivista continua ad essere mensile; sono mantenute le due sezioni: sezione A, che estende il suo raggio di azione alla scuola dell'obbligo e la sezione B per la scuola secondaria di secondo grado.

Tra le conferme c'è anche il **BOLLETTINO BIBLIOGRAFICO** curato dalla coppia Sitia - Blezza dal numero 30 al numero 34. Nella

Presentazione del numero 35 (2001) Sitia scrive: *“Questo Bollettino si presenta con qualche novità, nel senso che, innanzitutto, manca l’apporto del prof. Franco Blezza [...]. Inoltre diverse recensioni, specialmente le più approfondite, sono dovute al prof. Giuliano Testa a cui devo i miei più cordiali ringraziamenti.”* Testa incomincerà ad essere il responsabile del Bollettino Bibliografico nel 2003.

Il Bollettino Bibliografico N. 36, supplemento del fascicolo di maggio 2002, ha solo la firma di Candido Sitia e “riporta tutti i libri ricevuti in recensione o acquistati [dal Centro] a partire da fine dicembre 2000 fino all’inizio di ottobre 2001.”

È sempre continuata la rubrica **“Informazioni”** nella quale, a partire dal fascicolo di maggio, sono state pubblicate anche alcune recensioni di libri.

Per ogni anno, l’ultimo fascicolo della rivista è stato dedicato alla pubblicazione degli Atti del Seminario annuale del Centro Morin.

In questo periodo la Rivista ha festeggiato due compleanni importanti. Il primo è quello dei settanta anni di Giovanni Prodi. A questo evento è stato dedicato il numero doppio di settembre - ottobre 1995 nel quale sono state “convocate”, per un contributo, le Università di Pisa, Pavia, Parma, Roma La Sapienza, Modena e Torino. Vorrei solo ricordare, perché è difficile trovarlo da altre parti, l’articolo di Prodi: “Tendenze attuali nell’insegnamento della matematica”.

Il secondo è quello dei settantacinque anni di Fratel Roberto Sitia, direttore della rivista (e molto altro). Anche a questo evento è stato dedicato un numero doppio: quello di settembre - ottobre 1997. In esso appaiono ricordi di amici di vecchia data (tra i cofondatori del Centro) ed altri, italiani e stranieri, di più recente “acquisizione”.

Fratel Roberto sarà ricordato, in forme diverse, anche nei numeri di giugno, luglio, agosto, settembre, novembre - dicembre del 2002 nei quali sono state pubblicate diverse lettere di amici italiani e stranieri giunte in redazione alla notizia della sua morte. Particolarmente interessante e appassionato il ricordo scritto da Fratel Gabriele Dalle Nogare sul numero di luglio.

Per tutto il 2002, per questioni burocratiche, Direttore Responsabile della rivista appare sempre Candido Sitia.

Elencare tutte le novità pescandole fra i più che 500 articoli pubblicati in questo periodo è impresa, per me, disperata. Mi accontento di qualche segnalazione.

Una prima novità è “**L’angolo dei problemi del CRDM**” per la sezione B. Questo è il nuovo nome della rubrica “I problemi del C.M.” iniziata nel 1991 e sospesa nel 1992.

Finalità della rubrica, come scrive Sitia nel numero di febbraio 1996, è di *“offrire un materiale che possa anche essere portato in classe e possa quindi servire da stimolante per ricerche e gare di allievi.[...] Il livello medio dei problemi sarà tra scuola superiore e primo biennio [universitario].”*

La redazione della rubrica è formata da Candido Sitia che si occuperà soprattutto di problemi di fisica, Gianni Artico che si occuperà di problemi generali di analisi, Silvano Rossetto che si occuperà di problemi di gare matematiche, Giuliano Testa che si occuperà di problemi di geometria.

La rubrica, da sola o accompagnata, vivrà con regolarità, con problemi proposti e soluzione di problemi già proposti, fino al fascicolo di ottobre 2001.

Accompagnata da chi? Nel numero di aprile 1997 appare una pagina intitolata “**Dr. Dubius**” che Sitia, prendendo una idea da APMEP,

vorrebbe trasformare in una rubrica *“gestita direttamente dai Lettori, che possono porre questioni di ogni tipo: richiesta di una dimostrazione, risoluzione di un problema, chiarimenti di un punto storico, richieste di documentazione bibliografica, domande imbarazzanti poste dagli allievi, ecc.”*

I primi dieci dubbi proposti sono presi dal “Bulletin de APMEP”. La rubrica, da sola o accompagnata dall’ Angolo dei problemi, esce regolarmente nel 1997 e nel 1998; tace nel 1999 ed esce una sola volta nel 2000. Cessa, insieme all’angolo dei problemi, con il numero di ottobre 2001.

Segno della grande generosità di Sitia e del suo desiderio di allargare gli orizzonti dei docenti di matematica e fisica delle scuole italiane, nel numero di aprile del 1997, egli lancia una nuova rubrica dal titolo un po’ misterioso: **“Et ab hic et ab hoc”** destinata a far conoscere agli insegnanti italiani articoli di importanti riviste straniere, articoli scritti in francese o in inglese.

La rubrica appare una seconda volta nel numero di agosto 1997 e poi muore definitivamente.

Assolutamente nuova è la rubrica **“L’angolo dei problemi”** della sezione A. Esso sarà curato dalla professoressa Clara Colombo Bozzolo. La rubrica esce fedelmente negli anni 1996, 1997, 1998, 1999.

Dal numero di maggio 1997 incominciano ad essere pubblicati gli articoli di problemi curati dal Nucleo di Pavia coordinato da M. Ferrari. Questi problemi, a differenza di quelli della Bozzolo, sono ordinati per anni a cominciare dalla prima elementare alla terza. Essi coprono gli anni 1997, 1998 e 1999.

Tutto questo materiale sui problemi è confluito in due quaderni didattici curati dalla Bozzolo e da M. Ferrari:

**QUADERNO DIDATTICO N. 17:** PROBLEMI DI MATEMATICA PER LA PRIMA E LA SECONDA ELEMENTARE, ottobre 2001;

**QUADERNO DIDATTICO N. 18:** PROBLEMI DI MATEMATICA PER LA TERZA - QUARTA E QUINTA ELEMENTARE, febbraio 2002.

Particolarmente numerosi, e questa è una novità, sono gli articoli di **Storia della matematica**, talvolta indirizzati anche alla didattica della matematica. In questo periodo compaiono i nomi, tanto per fare qualche esempio, di Palladino, Capelo, Bussotti, M. Ferrari, Maracchia. Da ricordare, però, è soprattutto Pierluigi Pizzamiglio che, oltre al resto, ha presentato dal 2000 in poi, la figura di molti grandi matematici fornendo di essi un inquadramento storico ed il contributo a idee matematiche così che quando uno studente incontra il personaggio nel suo curriculum di studi ne abbia una sia pur incompleta idea.

In questo periodo sono parecchi gli articoli che si possono ascrivere alla **“Ricerca in didattica della matematica”**. Sono convinto che è difficile stabilire se un articolo è di ricerca in didattica della matematica e valutarne il “peso” e l’originalità. Perciò mi limito a citare qualche autore che certamente fa parte della cerchia dei ricercatori in didattica della matematica: Bartolini Bussi, Boero, D’Amore, Borasi, Malara, Arzarello, Pesci, Bagni, Zan.

L’ultimo settore che vorrei ricordare è quello che riguarda **“Le Scienze”**.

Diversi articoli, soprattutto di fisica, sono stati pubblicati sulla sezione B, e il fatto è abbastanza nuovo. Di contenuto più vario la decina di articoli pubblicati sulla sezione A, articoli che riflettono le

attività dei corsi di aggiornamento domenicale dedicati, in quel periodo, anche all'insegnamento delle scienze.

## **7 - DALLA STORIA ALLA CRONACA, DAL 2003 AL 2017.**

Ormai per la vita della Rivista entriamo nella cronaca. Cercherò di dire qualcosa confidando nella voglia di ricerca dei lettori sui numeri della rivista.

Come nei periodi precedenti, anche in questo ci sono conferme e variazioni.

Nella Assemblea dei Soci del mese di agosto 2002, viene eletto un nuovo **Consiglio di Presidenza del Centro**. Presidente del Centro e Direttore della rivista viene eletto Mario Ferrari. Egli dura in carica per tre "legislature" quinquennali, fino al 2017, quando viene sostituito dalla professoressa Cinzia Bonotto. Mario Ferrari, per questioni burocratiche, compare ancora come Direttore Responsabile della rivista.

**Continuano le due sezioni A e B della rivista**, con la sezione A dedicata esplicitamente alla scuola primaria e secondaria di primo grado.

**La periodicità mensile** si mantiene fino al 2010. Con il 2011, seguendo l'esempio di altre riviste mensili, si sospendono i fascicoli di luglio e di agosto. In questo modo in ogni anno ci sono quattro fascicoli semplici della sezione A, quattro della sezione B ed un fascicolo doppio (quello di novembre - dicembre che contiene gli Atti del Seminario annuale) per le due sezioni. Eventuali altri numeri doppi saranno sempre per le due sezioni.

**Il Bollettino Bibliografico** uscirà, come fascicolo autonomo, fino al 2009. Il numero 37 (2003) è curato da Giuliano Testa e Candido

Sitia; dal numero 38 al numero 43 (2009) solo da Testa. Nei singoli fascicoli compaiono tutti i libri pervenuti al Centro nei mesi considerati; talvolta compaiono recensioni più o meno lunghe o rimandi al numero della rivista nel quale sono pubblicate le recensioni. Con il 2010 il Bollettino Bibliografico cessa e tutte le notizie relative ai libri pervenuti sono descritte nei fascicoli della rivista.

Con il 2008 il **Sito del Centro** incomincia ad assumere, sia pure gradualmente, la fisionomia attuale e quasi tutte le annate della rivista diventano consultabili on line. È necessaria, però, una password la cui conoscenza viene agganciata a dei “medaglioni” di personaggi matematici famosi. È un modo di far conoscere un pò di **storia della matematica**. Questi “medaglioni” sono dovuti a Giorgio Tomaso Bagni (marzo 2008 - maggio / giugno 2009) e poi a Giuliano Testa (da settembre 2009 a tutt’oggi).

Alla storia della matematica vengono dedicati, in questo periodo, molti articoli. Un breve cenno sugli autori.

Pierluigi Pizzamiglio è presente con una decina di articoli su argomenti vari. Riccardo Rosso traccia, in sei articoli, una lunga storia dei logaritmi e in due illustra la figura di Galois. Soprattutto è da ricordare Silvio Maracchia che traccia il profilo di una cinquantina di matematici celati, prima, ciascuno, sotto alcuni versi, con l’invito al lettore di “indovinare” il personaggio. Tutto il materiale di Maracchia sarà pubblicato in un volume dalla Pitagora.

Per le due sezioni nasce una nuova rubrica dal titolo: “**L’angolo delle tecnologie**”.

Nella sezione B la rubrica nasce nel 2003 e dura fino al 2007 e vengono presentate diverse tecnologie che si possono utilizzare nelle attività scolastiche.

Nella sezione A la rubrica nasce nel 2004 e dura fino al 2010. La tecnologia utilizzata per le attività scolastiche è, sostanzialmente, CABRI. Questo materiale, insieme ad altro non catalogato in questa rubrica, confluirà nel **Quaderno Didattico N. 19**.

Per la sola sezione B rinasce la rubrica **“I problemi del Centro Morin”**.

La sua vita, però, è breve. Nasce nel 2003 e cessa nel 2004.

Per la sezione A non vi è, come nel periodo precedente, una specifica rubrica dedicata ai problemi, ma sono parecchi gli articoli dedicati ai problemi, sia articoli di carattere generale, sia articoli di proposte di problemi abbondantemente commentati. Qui basterà ricordare tre nomi: Bonotto, M Ferrari, Zan.

Nel 2008, dopo vent'anni, rinasce nella sezione A la rubrica **“Nelle nostre classi”**. Essa esce regolarmente negli anni 2008, 2009 e 2010. Appare una sola volta negli anni 2013, 2015 e 2016. Quasi sempre sono docenti di scuola primaria che descrivono interessanti esperienze fatte in classe.

Completamente nuova e distribuita fra le due sezioni, è la rubrica **“Per non Dimenticare”** (pnd), affidata completamente a Gabriele Lucchini. L'idea di fondo della rubrica è di far conoscere l'apporto di valenti matematici italiani e stranieri alla didattica della matematica e alla formazione degli insegnanti, apporto spesso ignorato dai giovani ricercatori in didattica della matematica.

La rubrica è iniziata nel 2011 e fino al 2019 sono state pubblicate 25 schede di cui 21 nel periodo che stiamo considerando. Ogni scheda contiene una presentazione del personaggio ed un suo scritto significativo riguardante la didattica della matematica. Solo per fare un esempio. La scheda numero 1 del febbraio 2011 è dedicata ad

Enriques e riporta il suo famoso articolo “Insegnamento dinamico” pubblicato nel 1921 sul “Periodico di Matematiche”.

Sono certamente da segnalare “Le conferenze tenute al Convegno Internazionale **“Omaggio a Emma e Lina”**, Accademia dei Lincei, Roma, 1979” la cui pubblicazione sulla rivista, ed è una prima assoluta, è stata curata da Cannizzaro, Lanciano e Menghini. Nel periodo che stiamo considerando sono state pubblicate le conferenze di Anna Sophia Krigowska (2015), di Albert Geoffrey Howson, Hans Freudenthal, Jean Sauvy (tutte nel 2016), di Paul Libois (2017).

Ogni annata di questo periodo ha un **numero doppio**, quello di novembre - dicembre che riporta gli Atti del Seminario Nazionale del Centro. Se si eccettuano gli anni 2005 e 2008, in ogni annata è stato pubblicato un altro numero doppio di contenuti diversi.

Quelli del 2011 e del 2012 contengono gli Atti dei due convegni che il Centro ha organizzato in ricordo di Giorgio Tomaso Bagni, membro del Consiglio di Presidenza del Centro e generoso autore di “Medaglioni storici”, di recensioni di libri e di articoli per la rivista.

Quello del 2007 riporta i contenuti di un progetto di Lauree scientifiche.

Quello del 2016 contiene gli Atti della giornata di studio “Sulla formazione dei docenti di matematica: iniziative, proposte e riflessioni per i vari ordini scolastici” organizzata all’Università di Padova da Cinzia Bonotto.

Tutti gli altri, confezionati direttamente dalla Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica (AIRDM) o da singoli ricercatori senza l’intervento diretto del Comitato di redazione della rivista, contengono, sostanzialmente, **articoli di ricerca in didattica della matematica**.

Tra i molti e svariati argomenti trattati, in questo periodo, anche in più articoli mi limito a ricordare quelli di Maria Pia Perelli dedicati alla statistica nella scuola dell'obbligo. Sono 12 articoli, distribuiti fra il 2005 ed il 2008, aventi il titolo generale **“La statistica nella società e nella scuola”** seguito ognuno da una specificazione adeguata.

Il periodo che stiamo considerando è stato, per il Centro e per la rivista, **un periodo di lutti**. Voglio ricordare le persone lasciando ai lettori interessati il compito di trovare i ricordi ad esse dedicati sulla rivista:

Coniugi Papy; Franco Conti; Alberto Cignetti; Benedetto Manzone; Gianni Battagin; Giorgio Tomaso Bagni; Giovanni Prodi; Enrico Magenes; Carlo Felice Manara; Clara Colombo Bozzolo; Franca Busulini; Lucia Ciarrapico; Liliana Chini Artusi; Vinicio Villani (morto nel 2018).

Per non terminare questi cenni storici con un ricordo di lutti, aggiungo che in questo periodo sono stati pubblicati alcuni articoli sulla matematica come disciplina gioiosa perché disciplina giocosa e che il primo giorno del Seminario nazionale 2017 del Centro Morin è stato dedicato a **“HOMO LUDENS”**. La lettura degli Atti sul numero di novembre - dicembre 2017 potrebbe rallegrarci un po' lo spirito e farci entrare nella lettura diretta delle ultime due annate della rivista che fanno parte, ormai, della contemporaneità.

## IL GIOCO DELLA VITA

a cura di Candido Sitia  
Paderno Grappa

### INTRODUZIONE

Anche questo gioco si ispira alle riflessioni presentate nel Quaderno n. 4/5-Vol. 8 della rivista "L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA" (1977) e intende continuare il discorso avviato colla presentazione del gioco 007 ("L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE" Vol.1-N/1 (1978)). Questo gioco, nella elaborazione qui presentata, è stato tratto da un quaderno informale e da una tesi di laurea proposta del Prof. V. Checcucci al Seminario di Matematica dell'Università di Pisa: "L'arte della fantastica".

Esso è stato presentato e discusso dal prof. Sitia durante un corso di aggiornamento sull' "Animazione Didattica" tenuto a Vicenza nel corso del 1977. Il risultato conseguito in questo corso e le numerose esperienze fatte in classe, di cui diamo una breve esposizione alla fine, hanno confermato la validità del metodo e delle ipotesi psicopedagogiche a cui questa animazione si ispira.

Mi auguro che l'aver tratto questo discorso didattico dall'ambito ristretto in cui fu primariamente eseguito, per esporlo prima in un corso di aggiornamento e poi al pubblico dei nostri Lettori, possa essere utile ai tanti insegnanti che intendono motivare e animare il lavoro in classe in maniera nuova e, nello stesso tempo, a rendere noto ad un più vasto pubblico il prezioso lavoro didattico-pedagogico-matematico che viene svolto presso l'Università di Pisa.

Conclude la presentazione di questo gioco la relazione di un'insegnante, la Sign.a Anna Maria Cuminatti Pasinato, su un'esperienza da lei eseguita nella sua classe 1<sup>a</sup> Elementare della scuola di Carpané (S. Nazario) della direzione didattica di Valstagna nei primi mesi del 1977. Si tratta della relazione concernente la 1<sup>a</sup> fase della presentazione del gioco. Di un'altra esperienza eseguita a Lugo Vicentino esiste una relazione filmata (2 filmine a colori super8).

“Il mondo sta facendosi sempre più complicato. Ci stiamo avvicinando rapidamente ad una situazione insopportabile e anche pericolosa; solo una piccola parte del genere umano saprà cosa sta succedendo; la grande maggioranza sarà condannata al ruolo di semplice spettatore passivo. L'unico campo sufficientemente ampio per impedire tutto ciò è quello della matematica. Non la matematica che si insegna oggi, bensì una nuova matematica ispirata a tutti i campi dell'applicazione. Essa deve essere insegnata come una scienza fondamentale, capace di fornire dei modi di pensare indispensabili e degli strumenti per far fronte al mondo reale: il mondo fisico e il mondo fatto dall'uomo...

... Il mondo intero è una vasta raccolta di sistemi: economici, sociali, ingegneristici, fisici, militari, biologici, medici, ecc.; sono sistemi di uomini, macchine, materiale, denaro. Per capire, controllare o progettare un sistema, si deve anzitutto costruire un modello del sistema stesso. È qui che la matematica fa la sua comparsa; la matematica applicata è l'arte di costruire sistemi.”

ARTHUR ENGEL

“...John Conway è un matematico del Gonville e Cains College dell'Università di Cambridge ... Una sua trovata è un fantastico solitario che egli ha battezzato “La vita”. È uno di quei giochi che per le sue analogie con la nascita, la trasformazione e il declino di una società di organismi viventi, rientra nella classe sempre più ampie dei "giochi di simulazione", giochi cioè che intendono imitare processi della vita reale.”

MARTIN GARDNER

## § 1 - Il gioco della vita: si muore, si sopravvive, si nasce.

È un tema affascinante e suggestivo; è una proposta per stimolare con questo tema l'interesse a tutto ciò che si evolve nel mondo in cui viviamo; è un tema noto e sviluppatosi in un mondo moderno, il mondo dei calcolatori<sup>1</sup> è un tema che si è sviluppato, senza alcun interesse al mondo della scuola<sup>2</sup>.

---

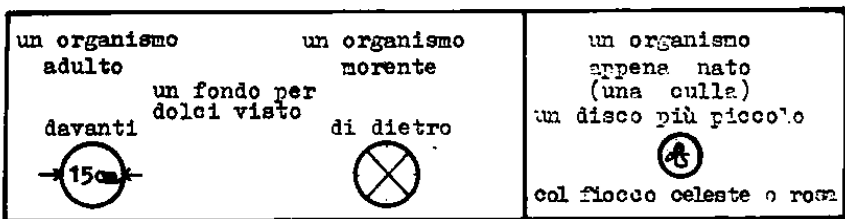
<sup>1</sup> Vedi “Le Scienze” n. 33, 34, 35; 1979

<sup>2</sup> basti l'affermazione seguente: ‘Giocato a mano è abbastanza lungo e noioso. Ma se si adopera un computer...’ (da *Panorama*, 14 marzo 1974, n. 412: “Il gioco della vita”)

Come è proposto da noi, provatelo coi vostri ragazzi, ritornando via via che è il caso, ai punti di Gianni Rodari coi quali abbiamo caratterizzato "la libertà di essere dominati da un oggetto"<sup>3</sup>. Approfittate di questa libertà perché voi e i vostri ragazzi conquistiate un linguaggio che vi aiuti a capire i rapporti tra noi e l'ambiente.

## 1. La presentazione del giocattolo e del gioco

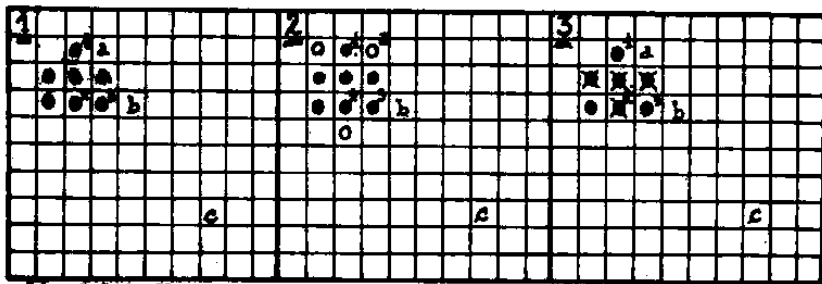
- a) Il giocattolo: a livello scuola elementare vi consigliamo la scacchiera costituita da un pavimento di mattonelle quadrate, che potete costruire seduta stante con nastro adesivo di 1 cm da carrozzieri (fate una scacchiera 10 x 16 con le caselle, di cm 20 di lato). Si gioca con fondi di cartone per dolci, segnati come in figura, e con altri dischi di cartone più piccoli:



- b) i nomi dei pezzi: per i "gettoni", ossia per i dischi di cartone, sono i nomi detti sopra. Le mattonelle, invece, sono le celle dell'ambiente; le celle che interessano hanno però un nome (una lettera come a, b, c, oppure un numero, come 1, 2, 3; qualcosa di analogo al nome sul campanello, o al numero di casa).
- c) la grande favola: il gioco della vita. Ve la presentiamo così come l'abbiamo provata più di una volta coi bimbi delle elementari.
- (1) Si parte con una decina di bimbi in piedi attorno a una scacchiera, come quella che si vede in 1 (disegnata su carta a quadretti come si fa quando si gioca con carta e matita, o si registra ciò che accade sul pavimento)

<sup>3</sup> *I giochi matematici e la didattica nella scuola dell'obbligo* di C. Sitia in *L'insegnamento della Matematica* Vol. 8 n. 4/5 (1977)

### Sulla carta a quadretti



gli adulti alla partenza      quelli che nascono      i morenti

**Leggenda:** ○ è una cella; ● è un adulto; ■ è un morente

(2) i sette organismi • in 1 sono. ... i quartieri di una città (potrebbero anche essere gli individui di una comunità come gli inquilini di un casamento, o gli alunni di una scuola, o gli operai di una fabbrica)

(3) l'ambiente, ossia la scacchiera, è ripartito in celle; le celle, qui, sono le zone occupate da un quartiere, oppure dove potrebbe nascere un nuovo quartiere

(4) Una cella può essere:

- vuota, come le celle a, b, c
- occupata, come le celle 1, 2, 3

(gettoni, come tappi da birra, marcati a, b, c; 1, 2, 3, possono servire per dare un nome alle celle che interessano del pavimento)

Avvertenza - Andando avanti nella favola, si punti sempre ai quartieri di una città, parlando anche di piani regolatori e di speculazione edilizia, ma ragionando sempre, come se si trattasse dei componenti di una famiglia.

(5) Che cosa può accadere ad una cella vuota? (vedi 2)

- resta vuota, come b
- vi nasce un nuovo ... quartiere, come in a

(6) che cosa può accadere ad un ... quartiere? (vedi 3)

- sopravvive come 1
- sta morendo, come 2 e 3

(non sottovalutate l'Avvertenza che è in (4))

(7) il grande problema della vita:

quand'è che si muore? Quand'è che si sopravvive? quand'è che si nasce?

Portate i ragazzi a cercare le risposte a queste domande del contesto sociale: la nostra vita (di un inquilino, di un alunno, di un operaio, di un quartiere)

si evolve in un ambiente (rispettivamente è il casamento, la scuola, la fabbrica, la città); la nostra vita, però, dipende essenzialmente da quelli che ci sono vicini.

Così nasce un linguaggio:

- un casamento è diviso in appartamenti ed io abito al 3° piano a destra; i miei vicini sono i miei familiari;

- la mia scuola è divisa in classi; i miei vicini sono...

- il mio babbo lavora al reparto ... della Fiat di Marina; i suoi vicini sono ...

- la mia città è divisa in quartieri, ed io abito nel quartiere ... quali sono i quartieri che interagiscono direttamente col mio?

Nascono così tanti linguaggi, coi quali costruire altrettante favole alla Rodari, giocando al gioco della vita. Non è però detto che si debba portare tutto quanto sul tappeto in una volta! Tutt'altro!

#### 8) Nel nostro giocattolo: chi sono i vicini?

Arricchiamo l'ambiente come in 4, parlando delle città x, y, z.

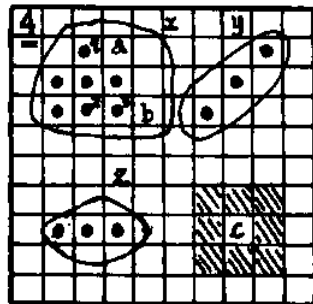
Le otto celle  sono il vicinato della cella c.

Fioccano le domande - quanti sono i vicini delle celle a, b, c?

- quanti sono i vicini dei ... quartieri 1, 2, 3?

Moltiplicate domande come queste per ogni quartiere od ogni cella vuota attorno alle città y e z. Non tutti risponderanno nello stesso modo; lasciateli soli a cavarsela, senza lodare chi ha risposto giusto, e comprenderete con quali tecniche si conquista il linguaggio;

com'è che spontaneamente gli alunni sappiano scambiarsi le parti di docente e discente.



9) Torniamo alla prima delle domande che sono in (7): quand'è che si muore? Una risposta convincente (sul piano sociale):

si muore

- quando i vicini sono troppo pochi (per isolamento)

- quando i vicini sono troppi (per soffocamento)

## La prima regola del gioco della vita

### si muore

- per isolamento: quando i vicini sono meno di due (ossia sono ...)
- per soffocamento: quando i vicini sono più di tre (ossia sono ...)

Chi muore in  $y$ ? Chi muore in  $z$ ?

Chi sopravvive in  $y$ ? Chi sopravvive in  $z$ ?

### Qual è la seconda regola del gioco della vita ?

Si sopravvive quando i vicini sono ... (due o tre, ma i dieci ragazzi ci arriveranno da soli).

10) Se tutto, fino a questo punto, si è sviluppato in clima di suspense, i nostri 10 ragazzi saranno impazienti di scoprire com'è che si evolvono nel tempo le città come  $x$ ,  $y$ ,  $z$  che hanno lì sotto il naso, e di avvertire che c'è ancora una domanda a cui occorre rispondere: quand'è che si nasce? o, meglio:

"quand'è che in una cella vuota ci sono condizioni favorevoli perché vi nasca un nuovo organismo"?

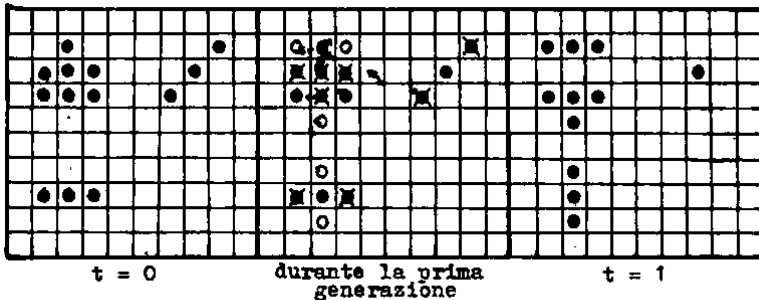
Lasciateli discutere nel contesto familiare, coscienti che non si nasce "sotto un cavolo", e che si sopravvive se i familiari sono due o tre. Non avranno allora nessuna difficoltà ad escludere che si nasca in una cella vuota, se poi si è destinati a morire, e ad accettare che per nascere ci voglia qualcosa di più che per sopravvivere; se suggerite loro che a babbo e mamma, quando nasce un figlio, fa comodo la presenza di una nonna o una zia per andare ogni tanto al cinema insieme, apprezzeranno la terza regola del gioco della vita:

### In una cella vuota nasce un nuovo organismo?

- se i vicini sono esattamente tre

Per ognuna delle città  $x$ ,  $y$ , stimolateli a mettere prima le culle di quelli che nascono (come si vede in 2 per  $x$ ) e poi a ribaltare i dischi di quelli destinati a morire (come si vede in 3 per  $x$ ). Se si lascia passare il tempo (nelle favole è così breve!) in cui i nati divengono adulti e i vecchi muoiono, non c'è da fare altro che sostituire le culle con altrettanti adulti, e fare il "funerale" ai morti.

Spontaneamente i ragazzi passeranno dalla "configurazione" al tempo  $t = 0$ , alla configurazione al tempo  $t = 1$ . Semmai dovranno discutere quant'è lungo in ogni favola l'intervallo di tempo da  $t = 0$  a  $t = 1$  e che nome debba avere, e non avranno nessuna difficoltà a riportare su carta a quadretti un disegno come questo, in cui è registrato il lavoro fatto finora.



Che cosa succederà alla fine della seconda generazione

## § 2. Seguitiamo a giocare, per inventare favole; per essere un po' per volta coscienti dei problemi dell'ambiente in cui viviamo

Premessa - Con l'attività del § 1, i vostri alunni avranno acquistato una certa familiarità col gioco della vita. È il momento adatto per favorire che il gioco si spanda a macchia d'olio fuori della classe, nelle famiglie e in ogni ambiente che interagisce coi vostri alunni. Allora comprenderete quanto sia determinante nei processi di apprendimento la possibilità, la capacità e la gioia di comunicare agli altri ciò che interessa fuori della propria classe, nella scuola e nell'ambiente esterno alla scuola; vi familiarizzerete allora col ruolo che ha il problema della comunicazione nel vostro lavoro in classe.

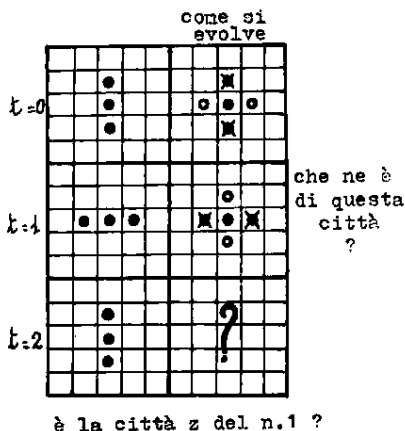
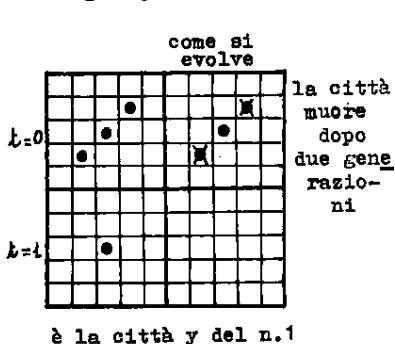
Per raggiungere questo obiettivo occorre per ogni alunno un giocattolo personale. Una versione economica, alla portata di ogni classe scolastica è la scacchiera di carta, in appendice al paragrafo; gli adulti sono fondelli bianchi per cartucce calibro 12, le culle sono fondelli per cartucce di calibro più piccolo. È un giocattolo che potrebbe essere distribuito a quelli che non partecipano direttamente all'attività del n.1 (Un'idea! Cambiare ogni tanto quelli impegnati sul pavimento).

Per il trasferimento fuori della classe (e anche per l'attività in classe) può essere opportuna una versione da "salotto" del giocattolo: una tovaglietta con motivo a quadretti di cm. 4-5 di lato; per gli adulti noi usiamo tappi di metallo per bottiglie di birra; i morenti si capovolgono (finiscono a gambe all'aria); le culle sono i soliti fondelli. Non è una brutta ricerca (non sempre è facile), per gli alunni e le loro famiglie il compito di procurarsele; serviranno del resto per tanti altri giochi.

Con tutto questo materiale e con l'esperienza già fatta, occorre dare ai ragazzi quei mezzi e quegli spunti per operare in modo autonomo sapendo destare negli altri curiosità e interesse; occorrerà ancora un po' di lavoro in classe, tutto riuscirà bene, se programmiamo con cura questa seconda parte.

a) Non sarà male, a questo punto, insegnare l'arte e la capacità di registrare ogni storia (o, il che è lo stesso, di giocare con carta a matita); a questo livello sarebbe comoda la carta a quadretti di 1 cm.

Usata in verticale, come in questi due esempi, resta agli alunni il margine per scrivere a fianco le favole che stanno inventando.

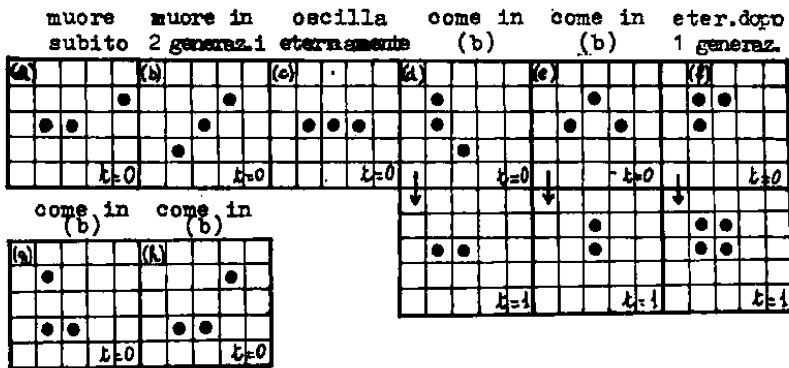


Dopo la situazione piuttosto complicata del n. 1 (che abbiamo indicato con x) prendiamo fiato con situazioni più semplici, come y e z; interessiamoci cioè delle piccole comunità, partendo con configurazioni formate da tre oppure da quattro organismi.

Con tre organismi potremmo tentare una grande avventura; programmare una specie di "lavoro di gruppo" di massa: ossia far raggiungere a tutti gli alunni, attraverso un lavoro personale, la conquista collettiva del fatto che tutte le possibili configurazioni con tre organismi sono soltanto quelle da (b) ad (h) del quadro seguente

I matematici sanno esprimere molto bene che cosa significhi tutto ciò; l'ambiente è il foglio di carta a quadretti, prolungato all'infinito; ed allora essi parlano del gruppo di simmetria di questa reticolazione e della relazione di equivalenza che il gruppo induce sulle configurazioni che ci interessano.

A. quando si parte in tre



Non è però un obbiettivo del genere quello che ci proponiamo; semmai per ora il nostro obbiettivo è quello di mettere un po' d'ordine ad interrogativi come questi:

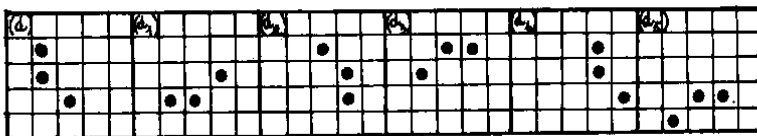
“entrando in classe gli alunni ridono e protestano perché trovano la carta geografica dell'Italia appesa al muro capovolta. Cos'ha a che fare col nord la loro protesta?”

“Un marziano gira attorno alla terra e osserva di tanto in tanto l'Italia. Gli capiterà di vederla capovolta?”

Il bello è che è proprio partendo così che il discorso dei matematici potrà avere un senso anche per l'uomo comune!

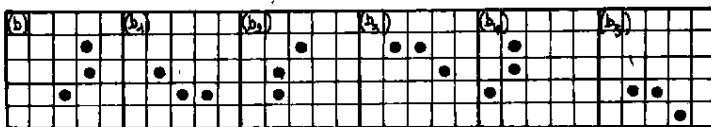
Ogni ragazzo ha il suo giocattolo personale e si sente sollecitato a scoprire via via qualche configurazione “diversa”, ed a comunicare la sua scoperta ai compagni; su un cartellone con tante scacchiere vuote come quelle del quadro A (noi usiamo la lavagna luminosa) potrà comunicare la sua scoperta ai compagni, e loro la rifiuteranno, se è già stata fatta.

Ognuno si alza per poi tornare al proprio posto; in tal modo si comporta come il marziano astronauta; con l'aiuto degli altri, gli sarà allora facile accettare che figure come (d)-(d<sub>5</sub>)



rappresentino “la stessa configurazione”; ciò che cambia è la direzione da cui spunta il sole e non l’evoluzione della comunità.

Semmai è più difficile scoprire che “la stessa configurazione” la rappresentano anche le figure (b)-(b<sub>5</sub>); però si tratta dell'uovo di Colombo se ci si comporta come “Alice dietro lo specchio”, ossia se si guarda ognuna delle figure (d)-(d<sub>5</sub>) in uno specchio posto lungo il lato ovest di ognuna di queste scacchiere.

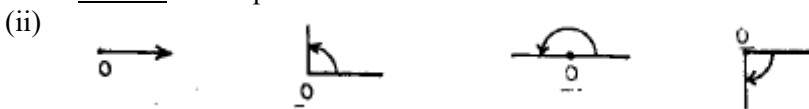


(b) non è altro che (d) letto sullo specchio

- b) In a) ci siamo trovati di fronte all’opportunità, o, se volete, all’esigenza, di considerare come “la stessa cosa” due configurazioni che potevano apparire diverse, come quelle in (d) - (d<sub>5</sub>) e (b) - (b<sub>5</sub>). Possiamo considerare tutto ciò come un approccio a livello percettivo a quel modo di agire dei matematici, a base di gruppi e relazioni di equivalenza, detto sopra. Se vogliamo passare ad un livello più interiorizzato, possiamo ricorrere
- c) a istruzioni come queste:

(i)	attenti!	fianco sinistr...sinistr!	dietro...front!	fianco destr ...destr!
-----	----------	---------------------------	-----------------	------------------------

(anche se i riferimenti espliciti a manifestazioni “paramilitari” non sembra che oggi incontrino il favore dell’uomo della strada); ma anche a simboli come questi:



E a nomi come questi:

(iii)	tutto fermo!	un quarto di giro intorno ad O a sinistra	un mezzogiro intorno ad O	un quarto di giro intorno ad O a destra
-------	--------------	---	---------------------------	---

....

per passare dai movimenti del nostro corpo indicati in (i), ai movimenti corrispondenti della scacchiera (d) attorno al suo centro O. Si può

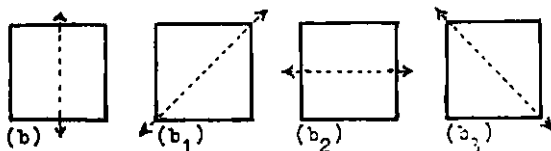
rendere “concreto” questo “passaggio” nel modo seguente: si sovrappone alla scacchiera (d) una mascherina su lastra per lavagna luminosa con lo stesso disegno e la si fa ruotare attorno ad O, tenendola fissa in O con la pressione di uno spillo.

Non vi sarà allora difficile portare prima voi stessi e dopo i vostri alunni a descrivere le relazioni che ci sono tra le configurazioni (d) - (d<sub>3</sub>); conquistando un po’ alla volta un linguaggio in cui nascono quelle rotazioni attorno a un punto che sono simbolizzate in (ii) ed hanno i nomi (iii).

Se agirete “isolati” può darsi che vi troviate di fronte a difficoltà insormontabili; se sarete capaci di interagire tra voi, forse apprezzerete l’importanza che ha nei processi di apprendimento l’interazione tra quanti sono impegnati in un lavoro di gruppo; se poi fosse necessaria la “presenza di un esperto”, questi agirà in modo corretto se sarà capace di farvi superare i “blocchi”, ed eviterà di spiegarvi ex-cathedra che cosa c’è sotto. Così dovrete comportarvi anche voi, quando “insegnate”.

Se poi “guarderete - come Alice - in uno specchio” (anche con la fantasia) tutto ciò che avete fatto finora, il vostro mondo abbraccerà anche le configurazioni (b) - (b<sub>3</sub>) e parlerete, allora, di riflessioni speculari; il discorso sarà più complicato se volete parlare di simmetrie rispetto alle “mediane” e alle “diagonali” della scacchiera, come è indicato in figura, e non avete sufficiente familiarità coi caleidoscopi; sarà bene che vi affidiate a un “esperto”.

Com’è che da (d) si ottengono (b) - (b<sub>3</sub>) (guardando (d) in uno specchietto di metallo, da entrambe le parti).

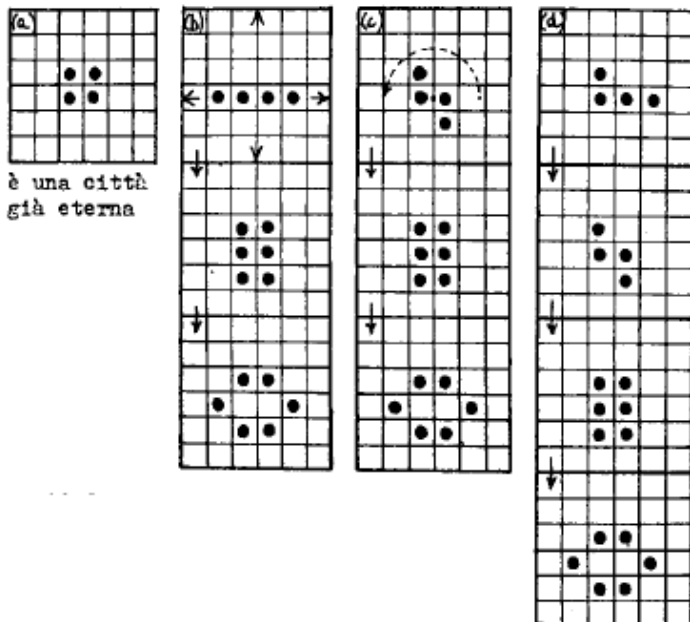


- d) Con quattro organismi potreste risparmiarvi l’analisi delle configurazioni possibili; ve le presentiamo senza tante discussioni nei quadri seguenti; se li confrontate col quadro di pag. 16,<sup>4</sup> servirà per convincervi che in quattro è più facile sopravvivere che in tre.

<sup>4</sup> Riferimento all’originale dell’articolo

B<sub>1</sub> - Quando si parte in quattro

(quattro casi più semplici, in cui presto si diventa eterni)



Sono rimasti dei casi in cui si muore? L'esperienza con tre insegna; pensate ai casi (a), (b), (g), (h), del quadro 4 a pag.17<sup>5</sup>. Quali favole nascono dal confronto tra (b), (c), (a)?

Osservazioni geometriche:

- in (b), di generazione in generazione, la configurazione conserva la stessa simmetria (due specchi a 90°), ossia non l'aumenta. Provate a guardarvi in due specchi a 90° (è un caleidoscopio), come si vede in figura; e domandatevi se ciò che “vedete” siete voi oppure è la vostra fotografia? (strizzate l'occhio destro). Domandatevi anche se la configurazione (b), e le successive, posseggono la simmetria di un mezzogiorno (attorno a chi?)
- in (c) si parte con la simmetria rispetto al centro della scacchiera (mezzogiorno). Che cosa succede nelle configurazioni successive? (La simmetria aumenta, diventa quella di (b)).

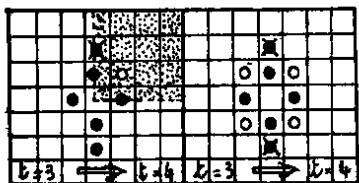


<sup>5</sup> Sempre dell'originale

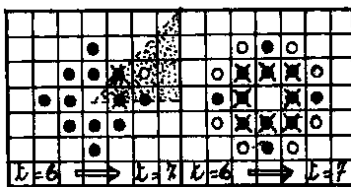
È vero o no che nel passaggio da una configurazione all'altra la simmetria della configurazione resta la stessa, oppure aumenta?

Servirà una scoperta come questa? (lo vedremo nel quadro B<sub>2</sub>)

- e) Il caso descritto nel quadro B<sub>2</sub> vi offrirà l'occasione di scoprire come il possesso di certi modi di pensare matematici (nel caso nostro la capacità di riconoscere la "simmetria" di una configurazione), aumenti enormemente le nostre capacità di penetrare nella realtà. Nel passare da una generazione all'altra è facile commettere errori, ed è facile scoprire questi errori, se siamo in grado di accorgerci che essi turbano la "simmetria" della configurazione ottenuta. Ma c'è ancora di più; saper passare da una generazione all'altra, cercando cosa succede nella parte che nei due esempi seguenti è punteggiata, e completando il tutto per "simmetria" (provare, per credere).

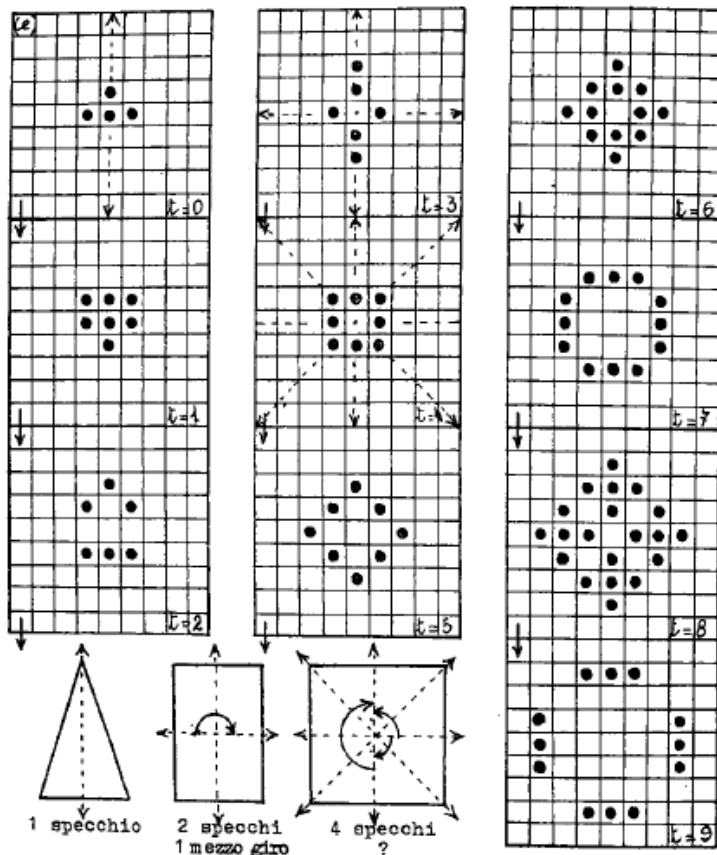


in un quarto      completando  
per simmetria      per simmetria



in un ottavo      completando  
per simmetria      per simmetria

B<sub>2</sub> - Quando si parte in quattro. Il caso a suspense.



Che simmetria c'è in  $t = 0, 1, 2$ ? (molti dicono che è la simmetria del triangolo isoscele)

Che simmetria c'è in  $t = 3$ ? (molti dicono che è la simmetria del rettangolo)

Che simmetria c'è in  $t = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ? (Molti dicono che è la simmetria del quadrato)

Come si evolve la nostra popolazione dopo  $t = 9$ ? (basta ricordare la configurazione (c) del quadro A a pag. 17).

**Relazione di un'esperienza col gioco della vita in una I° Elementare.**

Ins. Anna M. Cuminatti Pasinato

Sistemo i banchi in modo da formare una scacchiera. I bambini, intorno, seduti per terra.

Poi dico: -Guardate bene! In questo modo si comincia un gioco che si chiama "gioco della vita".

Abituati a creare favole "alla Rodari" (siamo ormai nel secondo trimestre), i bambini non si stupiscono e io continuo:

- Allora, secondo voi, i banchi messi in questo modo che cosa potrebbero rappresentare?

Una pausa, poi una bambina interviene:

- Milano.

- E Milano cos'è?

- Una città.

- Benissimo, allora questa è una città.

Sono ancora incerta sulla spiegazione da dare a questo esordio che potrei definire "fortunato"; forse è stato un caso, comunque ora posso proseguire tranquillamente.

Faccio salire un bimbo su una casella della scacchiera e chiacchierando dei vicini di casa faccio montare di volta in volta tutti i compagni che servono a circondare il primo.

Incidentalmente, viene fuori tutto un discorso sull'essere "in", "vicino", "esterno", "interno", ... che si ricollega ad altri discorsi fatti su figure geometriche e su situazioni di carattere topologico.

Da qui si continua la conversazione sui vicini di casa, sulle case vicine, sui vicini nell'aula, nella scuola, nel quartiere, nella città ... .

Segue la discussione-scoperta-definizione delle regole del gioco che i ragazzi accettano tranquillamente e si inizia a giocare con formazioni decise dai bambini stessi. Ci si mette d'accordo che i vivi stanno in piedi, i moribondi in ginocchio (!) ed i neonati seduti con la testa appoggiata alle ginocchia.

Gli alunni, nel proporre le formazioni di partenza intuiscono subito che se la scacchiera è troppo affollata c'è immediatamente una massiccia eliminazione e protestano quando troppi compagni vogliono salire sui banchi, ma scoprono altrettanto presto che troppo poche presenze rendono il gioco banale e quasi scontato.

Passiamo poi alla rappresentazione grafica sulla lavagna. I piccoli, con una rapidità ed una precisione che a stento riesco a seguire, non solo si

occupano del “destino” di ogni pedina, ma cominciano ad osservare alcune configurazioni finali come



della quale dicono dopo poche mosse: - Ma qui il gioco non finisce mai. Oppure la configurazione

Qui non si può continuare perché non muore nessuno!



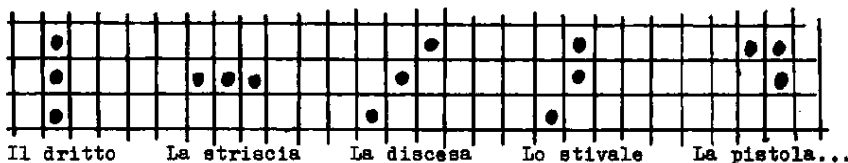
Nei giorni seguenti si vede tutto in chiave di “gioco della vita”. Se i bambini si affollano attorno alla cattedra, qualcuno grida: - Attenzione, fate morire la maestra!

Se c'è un momento libero molti disegnano velocemente una tabella sul primo spazio libero che trovano: un quaderno, un album o un pezzo di carta qualsiasi e, dopo aver giocato, corrono a mostrarmi lo svolgimento e il risultato finale.

Tutti partecipano, tutti si sentono coinvolti e tutti imparano le regole con sicurezza e precisione.

In una successiva fase, invito gli alunni a scoprire le possibili configurazioni di partenza a tre elementi ed a disegnarle su un cartellone appeso alla parete e precedentemente predisposto.

Con una velocità incredibile vengono registrate le seguenti configurazioni a cui si trova anche un nome:



Penso di concludere le osservazioni su questo gioco, facendo scoprire le simmetrie più semplici servendomi di uno specchio: per una prima elementare posso essere soddisfatta!

Bassano del Grappa 1.3.77

## LE PIRAMIDI DI MATTONI

**Clara Colombo Bozzolo - Elisabetta Bracchi**

N.R.D. Università Cattolica - Brescia

Questo problema è stato presentato al VI Incontro Internuclei Scuola Elementare che si è tenuto a Garda nel mese di Aprile 1991. L'idea per questo problema è stata presa dalla rivista Math Ecole n. 128, Maggio 1987. Da qualche anno il nucleo presta molta attenzione, all'interno dei campi specifici di cui si occupa, alla voce "problemi". Ultimamente l'attenzione è stata rivolta a situazioni problematiche relative a numeri e insiemi di punti cercando di abituare gli allievi a: **fare osservazioni, porre domande, formulare congetture** sulla situazione presentata.

In alcuni casi abbiamo tentato di mettere in evidenza quando una situazione da esercizio diventa problema (naturalmente il momento del passaggio di solito è diverso per ogni alunno o per gruppi di alunni).

Abbiamo anche tentato, con gli allievi più dotati, di **generalizzare** la situazione, scoprendo la **regola nascosta** che lega tra loro numeri o punti. Ci sembra di aver lavorato e di lavorare nella direzione del "problem posing". Precisiamo che, per noi, è

**problema** ogni situazione in cui si conoscono alcune informazioni e se ne devono trovare di nuove ricorrendo alle varie forme dell'intelligenza: ragionamento, intuizione, invenzione, creatività, strutturazione

**esercizio** ogni situazione che richiede: riproduzione di schemi noti, acquisizione di tecniche, memorizzazione.

La separazione tra **problema** ed **esercizio** non è però netta: come già detto una situazione può essere un problema per alcuni allievi e un esercizio per altri.

A nostro parere i problemi proposti (e possono anche essere proposti dagli stessi allievi) saranno tanto più validi quanto più **ampio sarà l'ambito della ricerca** che sapranno promuovere.

Esemplifichiamo quanto sopra detto presentando una delle ultime situazioni problematiche proposta ad alunni di seconda, terza, quarta e quinta elementare e a 15 allievi di scuola media.

**È un problema che non presenta difficoltà di comprensione del testo** e che quindi è stato affrontato con impegno anche dagli allievi meno dotati.

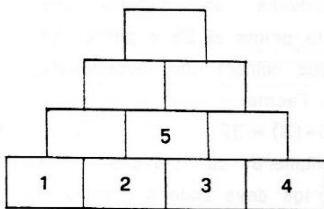
**Gli obiettivi erano:**

- Rafforzare la composizione additiva dei numeri
- Rivedere, in un contesto problematico, alcune proprietà dell'addizione, della sottrazione e della moltiplicazione
- Risolvere una situazione combinatoria
- Scoprire una legge nascosta usando materiale opportuno

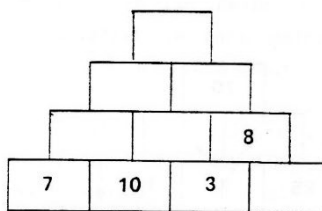
La regola di costruzione di queste piramidi è molto semplice:

**Ciascun mattone vale la somma dei due mattoni sui quali è posato.  
Nessun mattone vale "zero"  
I mattoni della prima riga hanno valore diverso**

1. La piramide è iniziata, completala.  
E' un problema?



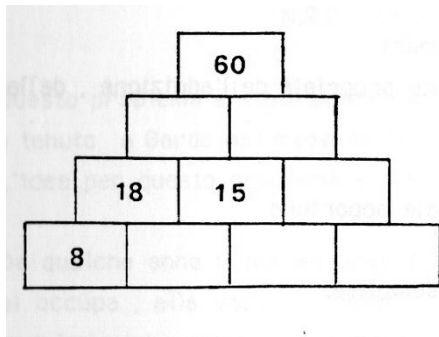
2. La piramide è iniziata, completala.  
E' un problema?



Tutti gli allievi hanno completato le due piramidi senza difficoltà. Capita la legge, la situazione è un esercizio di calcolo e non un problema.

### 3. un po' più difficile..... È un problema?

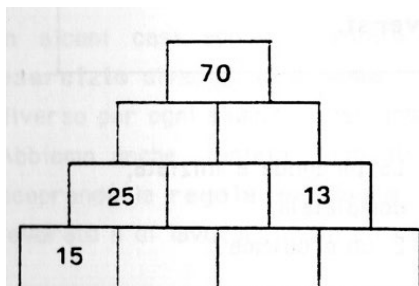
Questo problema è stato proposto alla terza classe.



Alcuni allievi, soprattutto di terza e quarta, una volta scritti nei mattoni giusti i tre numeri 10, 5, 33 tentavano di completare la prima fila di mattoni per poter procedere additivamente verso l'alto.

**La situazione comincia ad essere problematica.**

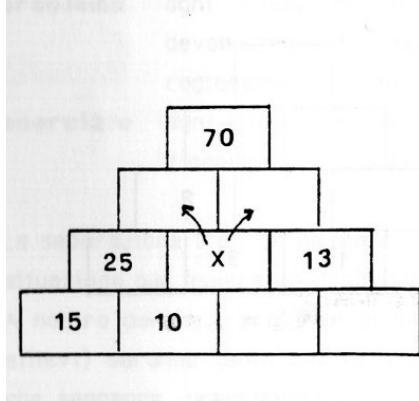
### 4. Completare questa piramide è ancora più difficile.... È un problema.



A livello adulto con un semplice ragionamento o introducendo una incognita, ad esempio  $x$ , si trova:  
 $(25 + x) + (x + 13) = 70$   
 $x = 16$

Gli allievi sono andati per tentativi, alcuni casuali, altri più pensati.

Un allievo di quinta ha scritto:  
 “devo trovare un numero che addizionato prima al 25 e poi al 13 mi dia due numeri che addizionati danno 70. Faccio:  $70 - (25 + 13) = 32$ , ma il numero da trovare nella seconda riga deve andare sotto il 70, sia nella casella di sinistra che in quella di destra, quindi **conta doppio**. Allora il numero è 16”

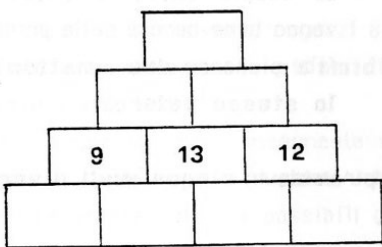


Un'altra allieva ha pensato casualmente a 70 come  $40 + 30$  e ha scritto " $40 = 25 + 15$ ,  $30 = 13 + 17$ , ma il 15 e il 17 devono essere uguali, cioè lo stesso numero, quindi il numero è 16." Al tentativo casuale è seguita una riflessione.

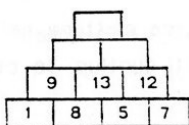
Qualche allievo, a questo punto, ha osservato:

**"le piramidi 3 e 4, soprattutto la 4 non sono più esercizi ma problemi. Per farli bisogna pensare molto."**

In questo modo abbiamo raggiunto uno degli scopi che ci eravamo prefissati: mettere in evidenza quando una situazione da esercizio diventa problema.

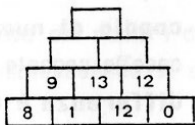


### Verifiche



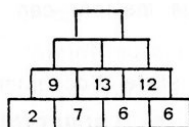
(1,8)

va bene



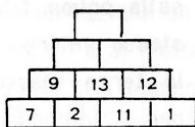
(8,1)

non va bene



(2,7)

non va bene



(7,2)

va bene

5. In quanti modi diversi, **al massimo**, puoi completare questa piramide rispettando le regole? Rispondi e poi completa la piramide in tutti i modi possibili.

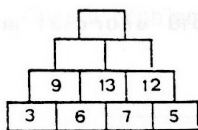
Alcuni allievi hanno osservato che muovendosi da sinistra verso destra, nelle prime due caselle vanno scritti **due numeri amici del 9 in addizione**, nella seconda e terza casella **due numeri amici del 13** e nella terza e quarta casella **due numeri amici del 12**, sempre in addizione.

Poiché le coppie di addendi che hanno somma **9** sono **dieci** e sono **meno numerose delle altre**, i tentativi da fare potrebbero essere **al massimo dieci**.

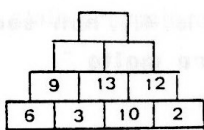
A questo punto un allievo ha osservato che però bisognava **verificare** se tali coppie rispettavano le regole di formazione delle piramidi.

Scritte le coppie

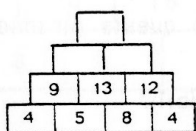
(0,9); (9,0); (1,8); (8,1); (2,7); (7,2); (6,3); (3,6); (4,5); (5,4)



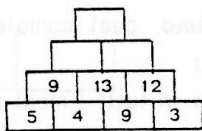
(3,6)  
va bene



(6,3)  
va bene



(4,5)  
non va bene



(5,4)  
va bene

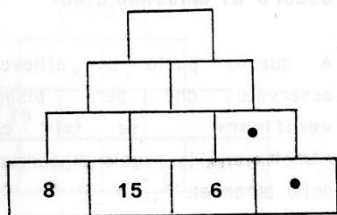
si iniziano le verifiche  
Scartate le prime due coppie  
perché **non rispettavano la seconda regola** (nessun mattone vale zero) gli allievi hanno tentato di completare le piramidi usando le otto coppie rimaste, come nelle figure accanto.

**Osservazioni:**

- La coppia (8,1) non va bene perché l'ultimo mattone della prima riga vale zero.
- Le coppie (2,7) e (4,5) non vanno bene perché nella prima fila si hanno due mattoni con lo stesso valore.

Con i dati iniziali si può quindi completare la piramide in **cinque modi diversi. Il problema ammette quindi 5 soluzioni**

6. In questo caso le soluzioni sono **tantissime....** Quante? Perché?



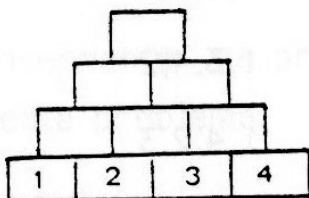
Il problema consiste nel trovare le **coppie di numeri** da mettere nelle caselle segnate con il puntino, **la cui differenza è 6.**  
(7,1) ; (8,2) ; (9,3) : ..... tenendo presente che si devono scartare **quelle il cui secondo termine è 8, oppure 15, oppure 6** per non avere nella prima fila due mattoni con lo stesso valore.

In terza classe è stata l'occasione per introdurre la **proprietà invariantiva della sottrazione**, nelle classi successive per rivederla.

### 7. Dati i primi 4 numeri, se li dispongo in modo diverso, cambia il valore del mattone posto in cima alla piramide?

La maggioranza degli allievi era sicura che non cambiasse:

“faccio solo addizioni e l'addizione è commutativa“ Altri erano perplessi, altri sicuri che cambiasse senza però saper motivare, se non a livello intuitivo, la loro affermazione. Si è allora deciso di provare.



Per i primi quattro mattoni sono stati presi i numeri **1, 2, 3, 4** e gli allievi hanno iniziato a provare senza un ordine prefissato.

Dopo alcune prove diversi ragazzi si sono posti il seguente problema:

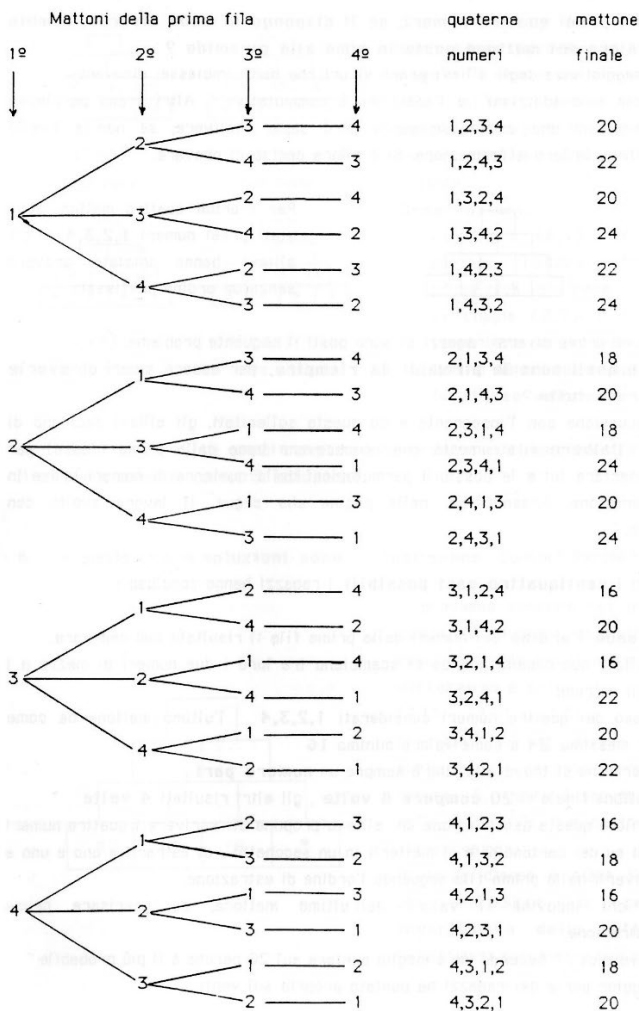
**quante e quali sono le piramidi da riempire, per essere sicuri di averle considerate tutte?**

Dopo discussione con l'insegnante e da questa sollecitati, gli allievi decidono di **usare l'albero** (strumento che conoscevano bene dalla prima classe) per rappresentare tutte le possibili permutazioni della quaterna di numeri prese in considerazione. Presentiamo, nella pagina che segue, il lavoro svolto con l'albero.

Esaminati i **24 casi possibili** i ragazzi hanno concluso:

- **Cambiando l'ordine** dei numeri della prima fila il risultato può cambiare. Il risultato non cambia quando si scambiano tra loro i due numeri di mezzo o i due agli estremi.
- Nel caso dei quattro numeri considerati **1,2,3,4** l'ultimo mattone ha come valore massimo **24** e come valore minimo **16**
- Il numero che si trova alla fine è sempre un numero pari
- Nel mattone finale il **20 compare 8 volte**, gli altri risultati **4 volte**. In merito a questa osservazione un allievo propone di scrivere i quattro numeri iniziali su dei cartoncini e di metterli in un sacchetto, di estrarli uno a uno e di scriverli nella prima fila

- seguendo l'ordine di estrazione. Vince chi indovina il valore dell'ultimo mattone, da precisare prima dell'estrazione. L'allievo dice: "è meglio puntare sul 20 perché è il più probabile."
- La maggior parte dei ragazzi ha puntato proprio sul 20.



Si sono fatte 20 estrazioni con i seguenti risultati:  
20, 20, 18, 18, 18, 18, 16, 24, 18, 20, 20, 22, 22, 20, 20, 24, 22, 16, 20, 18,  
18. Come si vede sia il 20 che il 18 sono usciti sette volte.

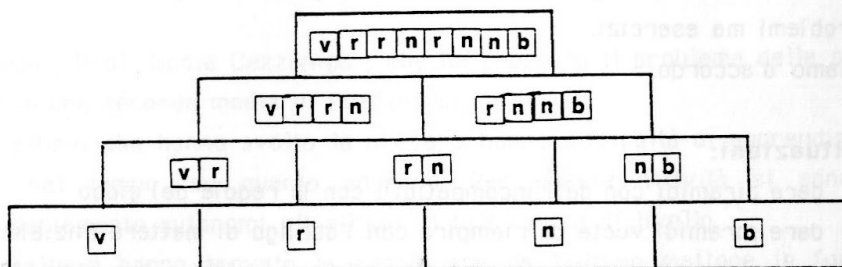
Sempre lo stesso allievo ha concluso: “venti estrazioni sono troppo poche; bisogna farne **tantissime** per vedere che il 20 esce più volte degli altri.”  
È un’occasione per rivedere con gli allievi l’argomento **probabilità**.

A questo punto l’insegnante ha proposto ai più dotati, che lavoravano per gruppi di quattro, il seguente problema:

**7. Conoscendo il valore dei mattoni della prima fila posso sapere quanto vale l’ultimo mattone senza fare tutti i calcoli?**

Cioè c’è una regola che lega i primi quattro mattoni all’ultimo?

L’insegnante dà ad ogni gruppo i cubetti incastrabili (gli allievi li conoscevano dalla prima elementare) e una tavola con il disegno, in grande, della piramide consigliando di mettere **quattro cubetti di colore diverso** nei quattro mattoni della prima fila. I ragazzi hanno discusso tra loro e in breve tempo sono arrivati a scoprire la legge nascosta, incastrando i cubetti come è indicato in figura.



Gli allievi hanno poi espresso, a parole, tale **legge**:

“il valore dell’ultimo mattone è dato dalla somma del primo con l’ultimo, più tre volte il secondo, più tre volte il terzo” oppure “... più tre volte la

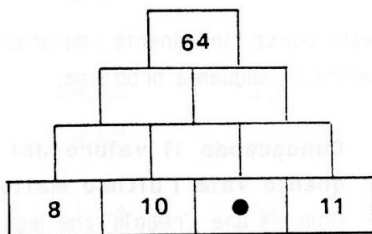
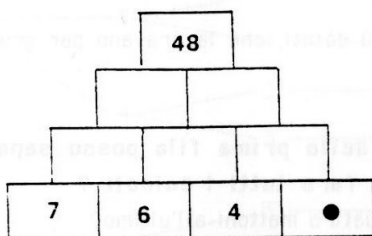
somma del secondo con il terzo.” (proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione)

Ad esempio se i primi quattro numeri sono **7, 8, 9, 10** il valore dell’ultimo mattone è :  $[(8 + 9) \times 3] + 10 + 7 = 68$

Per verificare che avessero capito bene la legge abbiamo proposto il seguente esercizio:

**8.** Ora che hai scoperto la regola che lega i primi quattro mattoni all’ultimo sai dire, senza completare la piramide, quanto vale il mattone della prima fila segnato con un punto?

Fai vedere il procedimento che segui.



Presentiamo il procedimento indicato da un gruppo di allievi

Primo caso:  $(6 + 4) \times 3 = 30$ ,  $48 - (7 + 30) = 11$

Secondo caso:  $(10 \times 3) + 8 + 11 = 49$ ,  $64 - 49 = 15$ ,  $15 : 3 = 5$

Un allievo ha fatto due osservazioni

Nel secondo caso se la differenza non era divisibile per 3 “il problema non avrebbe avuto soluzioni”.

Quando si usa la regola gli ultimi due problemi non sono più problemi ma esercizi.

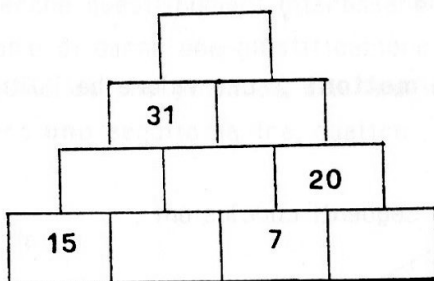
Siamo d’accordo.

Altre situazioni:

- Dare piramidi con dati incompatibili con le regole del gioco

- Dare piramidi vuote da riempire con l'obbligo di mettere inizialmente quattro numeri non tutti nella prima fila o con comandi di altro tipo.
- Quando nel mattone finale si trova un numero pari? Quando dispari? Possiamo prevederlo?

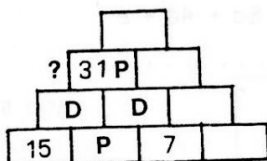
Abbiamo proposto a un gruppo di allievi di una quinta classe la seguente piramide:



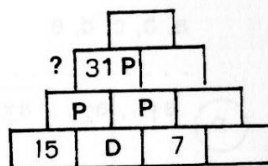
Dopo vari tentativi e lunghe discussioni tutti hanno concluso che il problema era impossibile. Ci interessa presentare la generalizzazione che ha fatto un allievo:

**Il numero che sta nel secondo mattone è pari o dispari**

Se è **pari** abbiamo:



Se è **dispari** abbiamo:



“In tutti e due i casi il mattone dove c'è scritto **31 non va bene**, quel mattone deve avere **un numero pari**”

L'allievo ha proseguito osservando che la situazione avrebbe una soluzione se si potessero utilizzare i **numeri decimali**. Il secondo mattone della prima fila varrebbe allora **4,5**

La collega, Prof. Sonia Cazzaniga, che ha proposto il problema delle piramidi di mattoni in una seconda media di Rozzano, ci ha detto:

Dei 15 allievi che hanno svolto la prova, 5 hanno difficoltà di apprendimento e di “tenuta” nel tempo, su quanto appreso. Per questa attività si sono rivelati sorprendentemente autonomi gli allievi di tale fascia di livello.

Quattro allievi hanno trovato la regola che dà l'ultimo mattone in funzione dei primi quattro, indicando questi mattoni con **a, b, c, d**

<b>Valore dell'ultimo mattone = <math>a + 3b + 3c + d = a + 3(b+c) + d</math></b>
---

Proponiamo ora agli adulti il seguente problema

**9.** Se la prima fila della piramide contiene **n** mattoni, che valore ha l'ultimo?

Scoprire la regola e giustificarla.

Provando e riprovando si può arrivare alle seguenti conclusioni:

Numero di mattoni nella prima fila	Valore del mattone finale
1 a	a
2 a, b	a + b
3 a, b, c	a + 2b + c
4 a, b, c, d	a + 3b + 3c + d
5 a, b, c, d, e	a + 4b + 6c + 4d + e
n a <sub>1</sub> , a <sub>2</sub> , a <sub>3</sub> ....., a <sub>n</sub>	

Mettiamo in evidenza i coefficienti delle lettere nel valore del mattone finale:

è una configurazione di numeri nota con uno dei seguenti nomi:

## Triangolo di Pascal Triangolo di Tartaglia

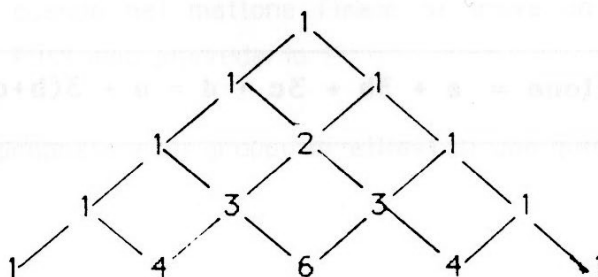
A scuola si studiano quando si devono calcolare le potenze di un binomio:

$$(a + b)^n$$

Il triangolo dà i coefficienti dello sviluppo

1  
1 1  
1 2 1  
1 3 3 1  
1 4 6 4 1

Scrivendo i numeri precedenti in forma di triangolo isoscele si vede meglio la legge che lega una riga all'altra



ma perché questi numeri interessano anche il problema che abbiamo presentato?

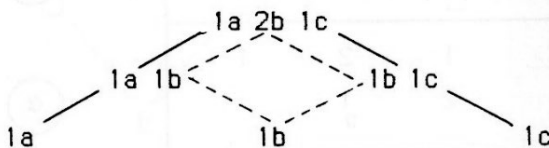
Vediamo di darne una giustificazione.

Partiamo da una piramide con tre mattoni. Non disponendo del colore, usiamo il numero **uno** seguito da tre, quattro,... lettere per distinguere i mattoni iniziali.

3<sup>a</sup> fila

2<sup>a</sup> fila

1<sup>a</sup> fila



Tralasciando le lettere abbiamo per i numeri, la seguente struttura:

3<sup>a</sup> fila

2<sup>a</sup> fila

1<sup>a</sup> fila

1	2	1	⊙ α
1	1	1	⊙ β
1	1	1	

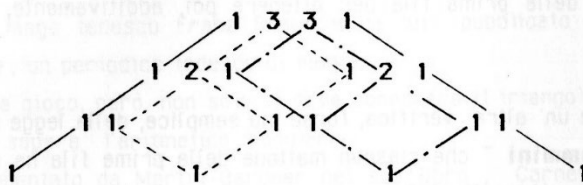
Con **quattro mattoni**, sempre tralasciando le lettere si ottiene:

4<sup>a</sup> fila

3<sup>a</sup> fila

2<sup>a</sup> fila

1<sup>a</sup> fila



Si osserva che:

la 2<sup>a</sup> fila è caratterizzata dalla coppia (1, 1)

la 3° fila è caratterizzata dalla terna (1,2 , 1)

la 4° fila è caratterizzata dalla quaterna (1, 3, 3, 1) che in questo caso compare una volta sola e rappresenta il mattone finale

La terza fila si ottiene dalla seconda con lo schema  $\beta$  ripetuto due volte, la quarta fila si ottiene dalla terza con lo schema:

<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>1</b>
	1	2	1
1	2	1	

$\omega$
$\alpha$

Aggiungendo un mattone alla fila iniziale la caratteristica di ciascuna fila aumenta di un **blocco** (coppia, terna, quaterna.....)

La quinta fila, per es. , si ottiene dall'incolonnamento di due schemi:  $\omega$

<b>1</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>1</b>
	1	3	3	1
1	3	3	1	

i numeri **1, 4, 6, 4, 1** indicano, nell'ordine, quante volte va moltiplicato ciascun mattone della prima fila per ottenere poi, additivamente, il valore del mattone finale.

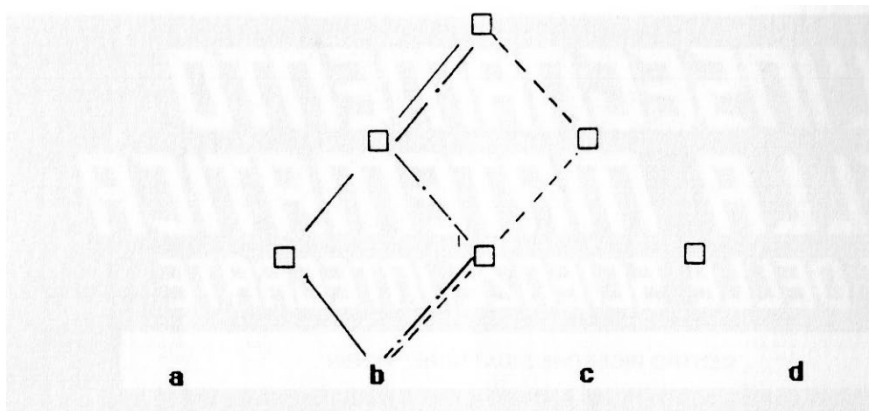
È anche possibile un'altra verifica, forse più semplice, della legge delle piramidi.

Quanti sono i “**cammini**” che ciascun mattone della prima fila ha a disposizione per arrivare nel mattone finale?

Ogni cammino indica una presenza del valore del mattone nella somma finale, quindi **tanti sono, per un mattone, i cammini diversi, tanto vale come addendo questo mattone alla fine del percorso**

Partiamo, per es., da quattro mattoni **a. b. c. d.**

Analizziamo i percorsi a disposizione di **b** e segniamo ognuno con un tratteggio diverso.



Il mattone **b** arriva in cima **attraverso tre strade diverse** quindi nella somma finale, il suo valore conta tre volte. È facile vedere che ciò capita anche per **c**, mentre per **a** e **d** il cammino per arrivare alla cima è **uno solo**. Lavorando con i colori il calcolo dei cammini può essere fatto anche alla scuola elementare.

Resta però sempre il problema di sapere quanti sono i cammini possibili: la risposta è data dal triangolo di Tartaglia.

## **Conclusione.**

È curioso vedere come Harry Lorraine, un mago di professione, usi la struttura della piramide di mattoni e il triangolo di Tartaglia, per stupire gli spettatori con un particolare gioco di prestigio con le carte. Tale gioco, detto “Apex”, è stato inventato dal mago tedesco Franz Braun e da lui pubblicato nel 1960 sulla rivista *Magie*, un periodico tedesco di magia.

Per capire tale gioco, però, non solo si deve conoscere il triangolo di Tartaglia, ma si deve anche sapere l’aritmetica modulare.

Il gioco è presentato da Martin Gardner nel suo libro, *Carnevale matematico*, edito da Zanichelli (1977) alla pagina 162.

Si può proporre questa magia alla scuola media dopo aver trattato l’aritmetica modulare.

## ELOGIO DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

Modesto Dedò, Mathesis, Milano, 30-09-1981 (<sup>1</sup>)

Sunto: Riproduce una conversazione tenuta alla Mathesis milanese; dopo aver segnalato frequenti errori grafici contenuti in testi di larga diffusione, si sottolineano i vantaggi del metodo grafico (analogico) rispetto all'invasivo metodo digitale.

Il titolo scherzoso vuole essere polemico contro il fatto che la geometria descrittiva - abolita dall'insegnamento universitario, mal coltivata nella scuola secondaria - è oggi del tutto ignorata in Italia (ma non in altri Paesi). Questa ignoranza è deplorabile sia perché il metodo grafico ha un alto valore formativo nella ricerca della soluzione e nella verifica dell'attendibilità dei risultati, sia perché le figure mal fatte traggono in inganno, sia perché - con buona pace di psicologi, sociologi, ecc. - l'ortografia va rispettata, e le figure geometriche di quasi tutti i nostri libri di testo - anche a livello universitario - peccano contro l'"ortografia".

Vorrei anche aggiungere che la rivalutazione dei metodi grafici, che sono metodi analogici, potrebbe - parzialmente - difenderci da tutto il "digitale" che ci ha elargito la rivoluzione elettronica: in questa sede ho già più volte denunciato i pericoli che sottostanno all'uso dei calcolatori nella scuola (o nell'azienda, o nella ricerca scientifica). Oggi voglio ribadire queste mie convinzioni senza allontanarmi dal nostro tema: l'informazione digitale è quasi sempre ridondante e fa perdere di vista l'essenziale che è sempre messo in chiara evidenza dall'informazione analogica. Sto constatando, con un certo sollievo, che il mercato si è stufato degli orologi digitali (anche se segnano il centesimo di secondo) e chiede ancora orologi analogici (sia pure al quarzo).

Ma voglio soffermarmi sui libri di testo con figure sbagliate: ciò che più mi sconcerta è la diffusa insensibilità: quasi nessuno le nota, tutti le accettano. Forse per la educazione avuta da Chisini, io sono quasi allergico

---

(<sup>1</sup>) Quaderno del Dipartimento di Matematica, Università di Milano, n°18/S(11), 1982.

a queste storture e ogni tanto sento il dovere di segnalarle ai colleghi autori di libri di testo; quasi sempre ho ricevuto in cambio ... tanta comprensione per le mie "fissazioni".

Ecco qualche esempio.

### Ellissi con punte.

La figura 1 è stata riprodotta dalla sesta edizione di un libro di testo universitario di Geometria. Figure analoghe, nelle quali le ellissi sono rappresentate da due archi di cerchio, si trovano spesso su libri di Geografia, nella rappresentazione di meridiani e paralleli.

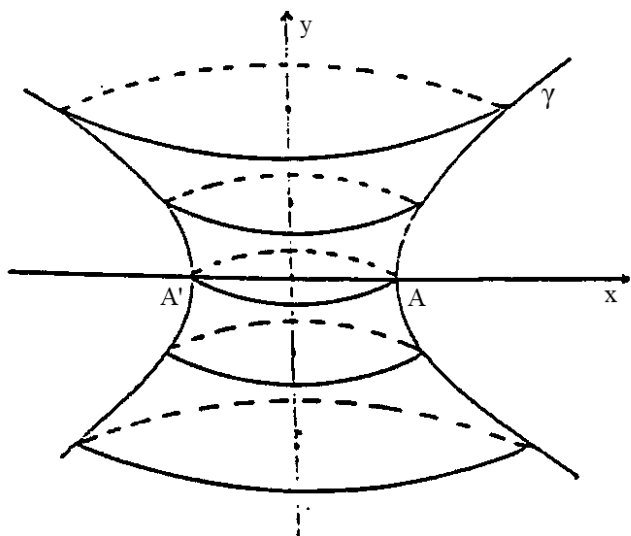
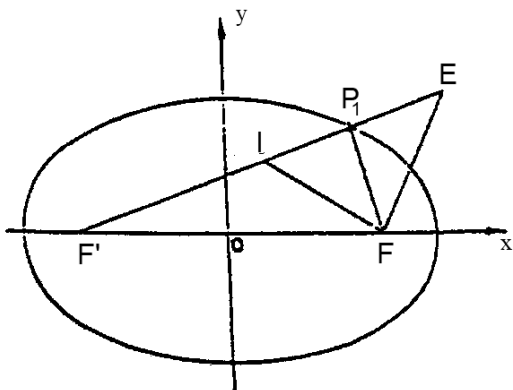


FIGURA 1

FIGURA 2



### Ellissi formate con archi di cerchio

La figura 2 è tratta dallo stesso libro: questa ellisse è, a mio avviso, peggiore della precedente, perché è anche pretenziosa. A chi ha un minimo di sensibilità salta subito agli occhi che si tratta di quattro archi di cerchio (che hanno centro nei vertici di un rombo) raccordati tra di loro.

Nei punti di raccordo la curvatura (cioè, in definitiva, la derivata seconda) ha una discontinuità fastidiosa. Spesso mi sono sentito dire che queste sono pignolerie: lo sarebbero se l'autore non avesse voluto perdere tempo per presentare un disegno accurato, ma questo disegno - oltre che essere sbagliato - è anche accurato.

### Parabola.

Mi è capitato anche di vedere (figura 3) una parabola ottenuta raccordando un arco di cerchio a due segmenti. Risparmio ogni commento!



FIGURA 3

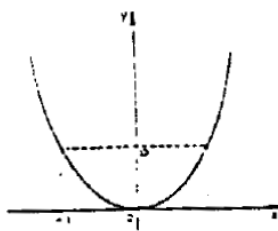


FIGURA 4

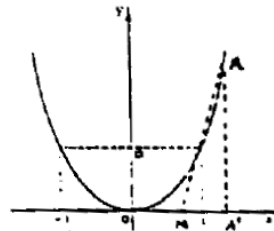


FIGURA 5

Risparmio anche di citare altre “amenità”, ma voglio segnalare un errore molto frequente, che è quello di divaricare troppo la parabola in prossimità del vertice. Troviamo infatti questo errore nella figura 4, che è riprodotta da un ottimo testo di analisi. Eppure questo errore dovrebbe saltare agli occhi almeno per una delle seguenti buone ragioni:

- il profilo di una parabola è più facile da ricordare del profilo di una persona (sia pure una persona amata) e tutte le parabole sono simili (in un testo per la scuola media, ritenuto altamente qualificato, si parla con insistenza di parabole “di forma diversa”: no, tutte le parabole hanno la stessa forma):
- Archimede ci ha insegnato che l'area del segmento parabolico è  $\frac{2}{3}$  di quella del rettangolo (parallelogrammo) di ugual base e uguale altezza;



## Sinusoide

Capita di vedere sinusoidi disegnate raccordando semicirconferenze, ma non voglio indugiarmi sugli “oltraggi al pudore”.

E' frequente il caso in cui il disegnatore si dimentichi che, se il riferimento cartesiano è monometrico, la sinusoide taglia l'asse delle  $x$  a  $45^\circ$ .

Ancora più frequente è il caso in cui si opera su un riferimento nel quale sono diverse le unità di misura sul due assi (come avviene quasi sempre in fisica). Anche in questo caso, però, l'angolo sotto cui la sinusoide taglia l'asse delle  $x$  è facilmente calcolabile. Infatti, per  $x = n/2$  la  $y$  del massimo è 1, mentre la  $y$  della tangente nell'origine è  $n/2$ ; cioè, qualunque sia la unità con cui si misurano le ordinate, il rapporto tra queste due ordinate è  $n/2 = 1,57\dots$  Ho voluto fare qualche verifica su molti libri italiani di matematica e di fisica e devo proprio dire di non averne trovato uno solo in cui questo rapporto non fosse sbagliato almeno del 50%.

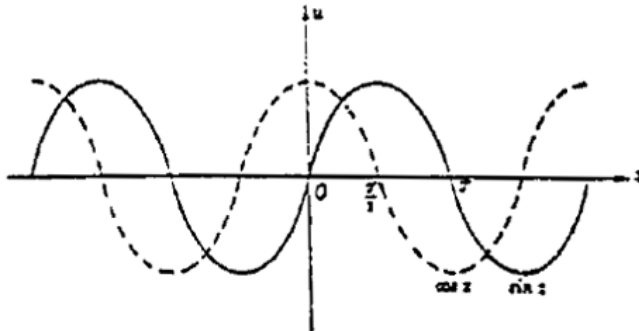


FIGURA 7

La figura 7 è presa dall'edizione italiana del magnifico libro “Che cos'è la matematica” di R. COURANT e H. ROBBINS e vi è l'errore ora segnalato. E devo dire che mi ha molto stupito di trovare questa stortura in un libro straniero, libro estremamente accurato, anche nelle figure; ho voluto consultare l'edizione originale e, infatti, questo errore non c'è.

Mi sono un po' dilungato sui disegni di figure piane sia perché anche queste erano spesso oggetto dei corsi di geometria descrittiva, sia perché tutti gli errori finora segnalati possono essere rilevati anche da uno studente

di scuola secondaria, purché qualcuno abbia educato la sua sensibilità al rigetto di queste storture.

Prima di passare all'esame dei disegni di figure tridimensionali (dove gli errori sono anche più frequenti), vorrei aggiungere una divagazione sulle fallacie geometriche che si presentano con figure disegnate male.

Sono molti i libri di matematica ricreativa che dedicano interi capitoli a queste fallacie: mi limiterò a riportarne due che, pur essendo molto note, mi sembrano significative (le relative figure 8, 9 e 10 sono riprodotte dal libro di ROUSE BALL e COXETER "Mathematical recreations and essays" - 12<sup>a</sup> edizione - libro veramente raccomandabile).

### **Tutti i triangoli sono isosceli.**

Sia O il punto comune alla bisettrice dell'angolo in A e all'asse del lato BC: O può essere interno o esterno al triangolo ABC (vedi figure 8 e 9).

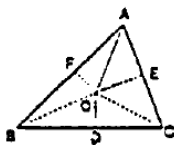


FIGURA 8

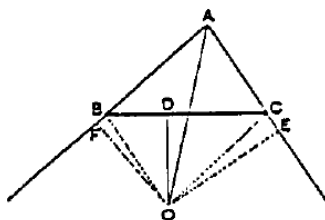


FIGURA 9

In entrambi i casi, dette E, F le proiezioni di O sui lati AC, AB o sui loro prolungamenti, si ha - per la congruenza tra ovvii triangoli - :  $AF = AE$ ,  $BF = CE$ . Per somma (o, rispettivamente, per differenza) risulta  $AB = AC$ .

### **Tutti i numeri sono uguali.**

La figura 10 mette in evidenza quattro triangoli rettangoli congruenti fra loro e quattro trapezi pure congruenti: il diverso accostamento dà (contando i quadretti)  $64 = 65$ ; da cui, ad esempio,  $63 = 64$  e così via.

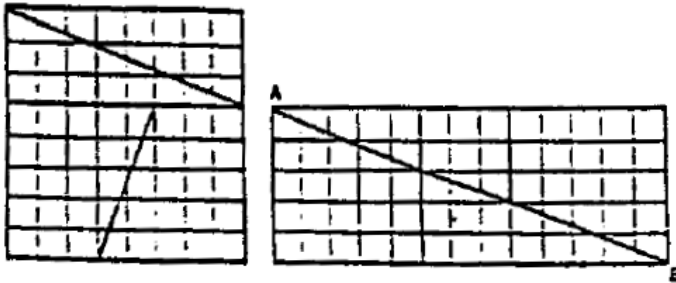


FIGURA 10

Le figure 8, 9, 10 sono volutamente sbagliate: quelle del primo esempio non mettono in evidenza che, in ciascuno dei due casi, si deve fare la somma e la differenza dei segmenti citati <sup>(2)</sup>: la somma è, in generale, diversa dalla differenza.

Nel secondo esempio è stato forzato l'accostamento lungo AB: in realtà sarebbe risultato un rombo (molto schiacciato) la cui area compensa il quadretto che cresce.

### Che cos'è la geometria descrittiva?

È giunto il momento di rispondere a questa domanda che, forse, qualcuno si sarà posto.

Grosso modo si può dire che si occupa dello studio di metodi per rappresentare figure geometriche (generalmente tridimensionali). Spesso la rappresentazione è anche un'immagine della figura e, in tal caso, la geometria descrittiva ha anche il compito di aiutare il disegno di immagini pittoriche.

Con la parola rappresentazione si intende qui un modello grafico bidimensionale, operando sul quale, sempre con procedimento grafico, si possono realizzare costruzioni che sarebbero impossibili senza disporre di modelli tridimensionali: intersecare linee o superfici, congiungere punti, problemi di parallelismo o di perpendicolarità, vera grandezza di segmenti o di angoli o di figure (piane).

Sulle immagini pittoriche voglio dire solo che la geometria descrittiva fornisce anche metodi per calcolare la intensità di illuminazione (cioè, del

---

<sup>(2)</sup> Nel senso che, se la figura fosse ben fatta, si avrebbe  $AB=AF-FB$  e  $AC=AE+EC$  (oppure viceversa).

chiaroscuro) e per disegnare anaglifi (coppie di disegni di diverso colore che, guardati con occhiali schermati con colori complementari, mostrano la figura in rilievo).

### L'assonometria.

È il metodo più usato per rappresentare, sulla lavagna, una figura tridimensionale: la figura è riferita ad una terna cartesiana trirettangolo (talvolta non disegnata esplicitamente) e se ne disegna la proiezione parallela, cioè la proiezione da un punto improprio  $I_{\infty}$ . Senza altre precisazioni non si tratta di una rappresentazione, ma soltanto di una immagine. Basti pensare che la proiezione da un punto improprio di un punto  $A$  è il punto  $A'$ , punto in cui la retta  $I_{\infty}A$  taglia il piano della lavagna, ma che ogni altro punto della retta  $I_{\infty}A$  ha la stessa immagine  $A'$ .

Senza poter entrare in dettagli, vorrei dare un'idea di certe convenzioni e di alcuni accorgimenti che permettono di calcolare come deve essere disegnata una rappresentazione assonometrica.

È fondamentale il teorema di Pohlke che dà una quasi completa arbitrarietà nel disegnare (sulla lavagna) i tre assi cartesiani e i tre relativi punti unità. Quattro punti arbitrari  $O'$ ,  $U'_x$ ,  $U'_y$ ,  $U'_z$  (con non più di un  $U'$  coincidente con  $O'$  e non più di due  $U'$  allineati con  $O'$ ) si possono sempre considerare proiezioni parallele di un triedro trirettangolo isoscele  $O U_x U_y U_z$  (vedi figura 11).

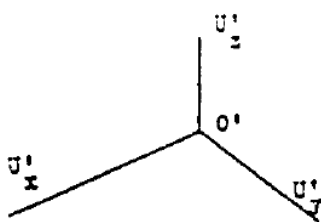


FIGURA 11

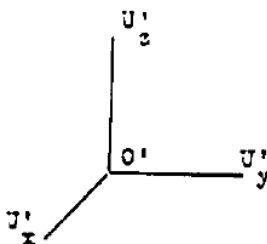


FIGURA 12

Più spesso però si disegnano  $O'U'_y$  e  $O'U'_z$  uguali e perpendicolari tra loro.  $O'U'_x$  di direzione arbitraria e, per avere immagini efficaci, più corto (vedi figura 12).

In questo caso l'assonometria si chiama assonometria cavaliera, il piano della lavagna è parallelo al piano  $U_xOU_z$  e si immagina facilmente la direzione di  $I_\infty$  pensando di congiungere  $U'_x$  con il punto situato a distanza  $OU_x$  sulla perpendicolare alla lavagna condotta per  $O'$ , L'immagine della figura è quale la vedrebbe un osservatore posto a distanza infinita in direzione  $I_\infty$ . È questa la ragione per cui l'assonometria riesce efficace per disegni fatti alla lavagna (non su libri), visti da osservatori collocati lontano, e non risulta ugualmente efficace per tutti gli osservatori: queste osservazioni andrebbero tenute presenti dall'insegnante che fa alla lavagna figure tridimensionali.

### La rappresentazione di un piano.

Molto spesso un piano è rappresentato da un parallelogrammo: quasi tutti ignorano la convenzione sottostante e cioè che il parallelogrammo è l'assonometria di un quadrato, situato su un piano (orizzontale) con i lati paralleli alle assonometrie degli assi  $OU_x$  e  $OU_y$ . In particolare, non è raro vedere che il lato obliquo del parallelogrammo è più lungo del lato orizzontale, contro le buone regole prima enunciate.

Ma c'è di più: supponendo (per convenzione) che si tratti di una assonometria cavaliera, il parallelogrammo ci fornisce tutto quanto occorre per fare un disegno esatto di qualunque figura tridimensionale. Infatti, possiamo innanzitutto disegnare l'assonometria di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico ( $OU_xOU_yOU_z$ ), pur di condurre per un punto  $O'$  due segmenti  $O'U'_x$  e  $O'U'_y$  uguali e paralleli a due lati consecutivi del parallelogrammo e segnare, in modo ovvio, il punto  $U'_z$  (vedi figura 13).

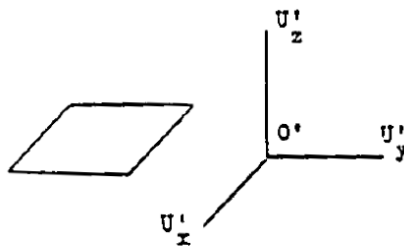


FIGURA 13

Con i metodi della geometria analitica si trovano poi le coordinate dei punti che interessano e si possono ormai rappresentare questi punti. È però

possibile, con i metodi della geometria descrittiva, risolvere graficamente vari problemi.

Per dare un'idea di questi metodi, facciamo qualche osservazione, sia pure limitata a figure situate su un piano orizzontale, cioè sul piano rappresentato dal nostro parallelogrammo.

### Rette perpendicolari.

Notiamo innanzitutto che il parallelogrammo mette già in evidenza due coppie di direzioni che rappresentano coppie di direzioni ortogonali: le direzioni dei lati e le direzioni delle diagonali.

Per chi ricorda che le direzioni ortogonali (di un piano) sono coniugate in una involuzione (l'involuzione assoluta) e che una involuzione è individuata da due coppie di elementi coniugati, è ormai facile costruire la rappresentazione di una direzione perpendicolare ad una direzione data, ossia, in particolare, costruire la rappresentazione della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data.

Ma possiamo anche fare a meno di questi ricordi facendo riferimento alla ellisse indicatrice, che è la rappresentazione della circonferenza di raggio uno, che ha centro nell'origine: ellisse che si disegna facilmente, perché sono noti due diametri coniugati. I raggi vettori di questa ellisse rappresentano raggi di una circonferenza i quali sono perpendicolari alle rispettive tangenti: la figura 14 dà una costruzione rigorosa della perpendicolare per P alla retta r (forse, non è del tutto inutile precisare che il rigore si riferisce alla costruzione, non al disegno, in cui incorrono gli inevitabili errori grafici).

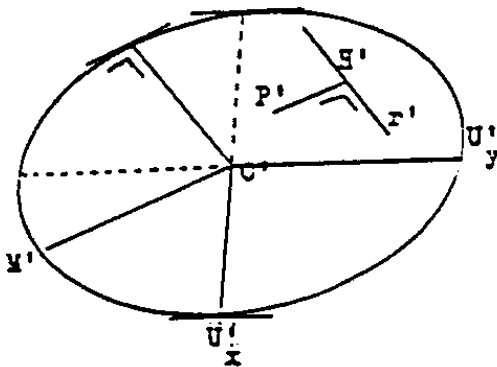


FIGURA 14

Ma la ellisse indicatrice ci consente anche di costruire un segmento la cui lunghezza  $d$  sia la vera grandezza della distanza di  $P$  dalla retta  $r$ . Infatti, la vera grandezza del raggio vettore  $O'H'$ , parallelo ad  $H'P'$ , è il raggio della circonferenza, cioè  $O'M'$  e sussiste quindi la proporzione

$$O'M' : H'P' = O'U'_y : d$$

che permette di costruire  $d$  come quarto proporzionale.

L'esame della ellisse indicatrice mi dà modo di segnalare un altro errore molto diffuso nella rappresentazione di circonferenze situate su piani orizzontali. La figura 15 è riprodotta dal già citato libro di testo per la scuola media; le due ellissi rappresentano due circonferenze situate su piani orizzontali: dovrebbero quindi risultare simili all'ellisse indicatrice (definita dal parallelogrammo) e invece sono del tutto dissimili.

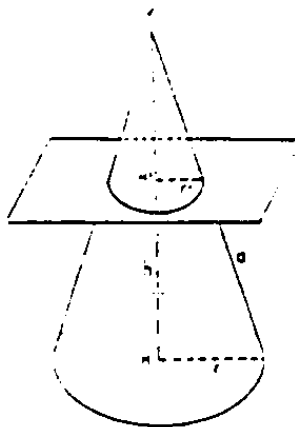


FIGURA 15

Vorrei anche segnalare un altro errore che si trova in questo libro di testo. Per arrivare alla determinazione del volume di un cilindro (o di un cono), si parte dal volume di un prisma (o di una piramide) e si asserisce che “all’aumentare del numero dei lati (del poligono non regolare inscritto nella base del cilindro o del cono) aumenterà il numero delle facce del prisma (piramide) ed è intuitivo che il volume di questa tenderà al volume del cilindro (del cono)”.

Ora mi piace pensare che questo errore grossolano sia dovuto soltanto alle difficoltà incontrate per disegnare l’assonometria di un poligono regolare.

### L'omologia in geometria descrittiva.

Per le costruzioni della geometria descrittiva è fondamentale la costruzione della omologia (la parola omologia è qui usata nel suo antico significato di omografia piana con una retta di punti uniti). Sussiste infatti il teorema:

“La proiezione di una figura piana si può sempre costruire come trasformata omologica di una figura congruente alla figura data”.

Conoscendo questo teorema (e la costruzione dell'omologia) si possono notevolmente semplificare le costruzioni precedenti.

Ecco, per esempio, la costruzione della rappresentazione di un triangolo equilatero situato sul piano  $\alpha$  rappresentato dal solito parallelogrammo (vedi figura 16). Possiamo pensare che il parallelogrammo  $ABC'D'$  sia il trasformato omologico del quadrato  $ABCD$ : la nostra omologia ha come asse la retta  $AB$  e ha il centro all'infinito nella direzione  $CC'$ ; inoltre  $C$  e  $C'$  sono punti corrispondenti. L'omologia è perfettamente caratterizzata.

Data la rappresentazione  $P'Q'$  di un lato del triangolo equilatero, si trovano le anti-immagini  $P, Q$ ; si costruisce il triangolo equilatero  $PQR$ ; si trova l'immagine  $R'$  di  $R$ .

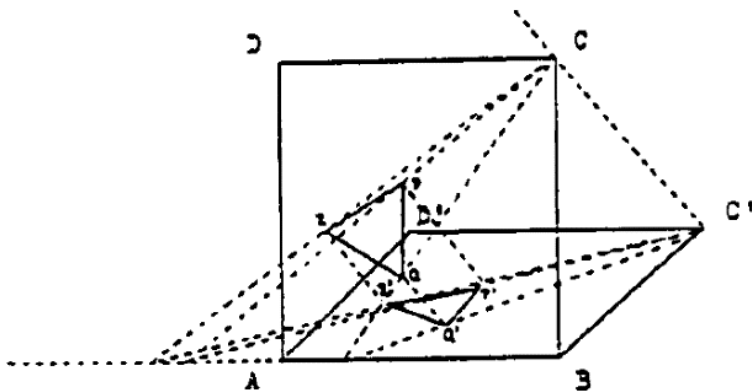


FIGURA 16

Per finire, voglio ripetere gli scopi di questa chiacchierata;

- I) Stimolare l'esigenza di figure ben fatte.
- II) Rivalutare i metodi grafici.

III) Imparare qualche costruzione fondamentale o, almeno, sapere che è possibile fare delle costruzioni rigorose anche per figure tridimensionali.

Voglio solo aggiungere che non è più necessario, per avere figure ben fatte, faticare in tediosi disegni con riga, squadra, compasso, inchiostro di China, ecc. I computers, anche quelli da tavolo, permettono - con il plotter - di ottenere in tempi brevi figure perfette. Credo che fra breve tempo in ogni scuola possa essere disponibile un plotter; certamente già oggi è disponibile a tutti gli autori di libri di testo.

Ad esempio, con il plotter del nostro HP 85 ho ottenuto i disegni riportati nelle figure 17, 18, 19, 20; si tratta, ovviamente, delle assonometrie di un dodecaedro, di un icosaedro, di una sfera, di un paraboloido iperbolico; ma è anche possibile, in tempi quasi uguali, avere disegni di rappresentazioni in prospettiva centrale, che, come ho già accennato, sarebbero più adatti, per un libro di testo, delle rappresentazioni assonometriche (che richiedono l'uso di astronavi per andare a guardarle dall'infinito).

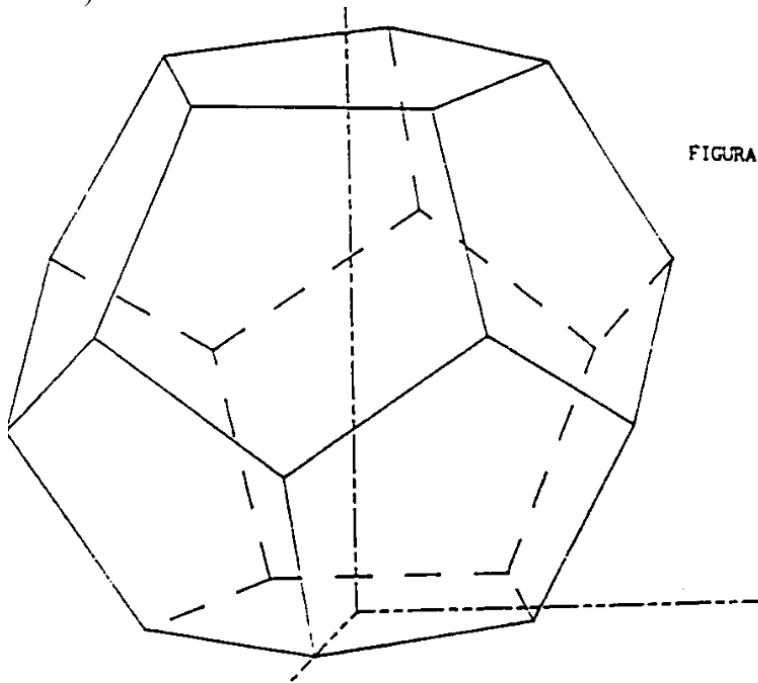


FIGURA 17

FIGURA 18

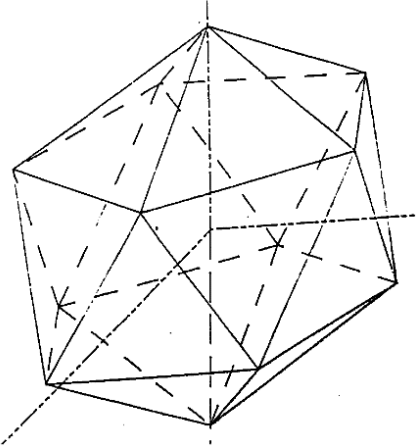


FIGURA 19

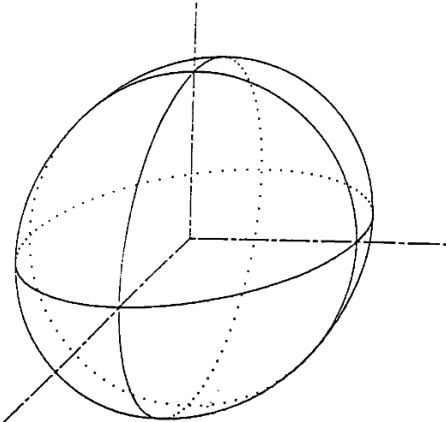
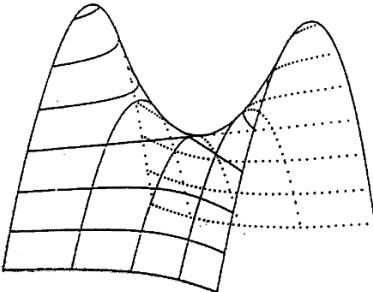


FIGURA 20



## APPLICAZIONI PRATICHE DELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA <sup>1</sup>

(Trad. Sitia Candido)

Arthur Engel

*Stuttgart, Germania Federale*

Non è possibile distinguere tra matematica pura e matematica applicata. Esiste soltanto la matematica e le sue applicazioni. Le applicazioni sono importanti per svariati motivi: a) lo studente ha bisogno di motivazioni e di sostegni intuitivi per apprendere le idee astratte; b) le applicazioni forniscono un criterio per la scelta degli argomenti che devono essere insegnati a scuola; c) la società accetta la matematica non perché è bella, ma perché è utile.

Noi insegnanti dimentichiamo molto facilmente che i nostri studenti, salvo pochissime eccezioni, non diventeranno dei matematici di professione. Molti di essi, invece, diventeranno dei tecnici o degli scienziati che avranno bisogno della matematica come strumento. Di conseguenza, gli argomenti che noi insegniamo devono avere delle vaste possibilità di applicazione. Non c'è posto per sterili teorie, a cui ci si dedica per la loro 'intrinseca bellezza'! Spesso noi siamo 'mangiatori di loto' e non possiamo credere che la maggior parte della gente condivida i nostri gusti. Possiamo danneggiare gravemente il futuro scienziato o il futuro tecnologo se vogliamo imitare pedissequamente Bourbaki. Al contrario di quanto spesso crediamo, noi dovremmo avere anche un po' di mentalità scientifica, altrimenti non sappiamo per nulla come applicare la matematica. Nella scuola non c'è tempo per sviluppare un ramo della matematica e poi, in seguito, darsi alle sue applicazioni. Lo studente d'altronde si aspetta dei risultati immediati e convincenti. Per questo motivo dobbiamo incominciare con un problema applicato. Questo problema deve avere un ampio campo di applicazioni di un certo rilievo. Nel tentativo di risolverlo si sviluppa un importante ramo della matematica. Se un argomento matematico non offre nessuna applicazione convincente, ebbene allora non dovrebbe costituire argomento di insegnamento.

---

<sup>1</sup> Tradotto da C. Sitia, su autorizzazione dell'Autore, dalla rivista «Educational Studies in Mathematics»

Gli argomenti più importanti dal punto di vista delle loro applicazioni sono: l'analisi, l'algebra lineare e la geometria, la probabilità e la statistica e i computers. Tutti questi argomenti dovrebbero essere trattati in maniera estesa. Essi dovrebbero far parte di un programma armonicamente organizzato e tutti dovrebbero essere insegnati al più presto possibile, evidentemente a differenti livelli di rigore. La probabilità e la statistica sono estremamente utili a moltissime persone più di qualsiasi altro ramo della matematica. Si dovrebbe insegnare questi argomenti durante tutto l'arco del tempo scolastico iniziando dall'età di 10-11 anni. In due precedenti seminari ICMI (Echternach 1965 e Vienna 1966) io ho fatto vedere come si poteva fare questo. L'analisi, esposta in maniera intuitiva, dovrebbe essere trattata non appena le capacità di calcolo degli allievi lo permettono, ossia all'età di circa 15-16 anni. Si tratta di un argomento ormai collaudato dal tempo e la cui didattica si è assai sviluppata ed è diventata assai efficiente, come tutti sanno. I due altri argomenti (specialmente i computers) richiedono uno sforzo speciale dell'intelligenza e una buona dose di sperimentazione.

Al momento attuale io sto cercando di sviluppare l'uso sistematico delle applicazioni della matematica in tutte le classi della scuola secondaria. Questo articolo è dedicato ad un'esposizione particolareggiata di un piccolo ma importante argomento matematico da un punto di vista radicalmente applicativo. Ciò significa che tutte le idee importanti sono suggerite dalle applicazioni.

La scuola secondaria tedesca (il Gymnasium) si estende dalla classe 5<sup>a</sup> alla classe 13<sup>a</sup> (da 10-11 anni a 18-19). Il numero di lezioni settimanali per queste classi è di 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3. Quando assumo l'insegnamento in una delle ultime tre classi della scuola secondaria, gli studenti hanno già appreso le potenze ad esponenti razionali. Il programma prescrive di continuare coi seguenti argomenti: le funzioni exp, log, le serie geometriche, il numero  $e$ , il limite:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

Per preparare il terreno a questi argomenti lo studente segue una serie di sei lezioni sul concetto di funzione e sulla notazione funzionale. Questo breve corso termina con la dimostrazione di un importante teorema:  $f(x) = c$  è la sola soluzione monotona dell'equazione funzionale

$$f(x + h) = f(x) + f(h)$$

Di questo teorema e della sua dimostrazione ci serviamo più tardi in diverse occasioni. Esso costituisce per di più il miglior antidoto contro errori stupidi del tipo  $\sqrt{4 + 9} = 2 + 3$ .

Le quattro lezioni seguenti sono dedicate ad un breve corso sulla probabilità nel quale si svolge la teoria matematica del lancio di una moneta. Ciò è sufficiente a permettere la costruzione di modelli stocastici. Sarebbe naturalmente possibile costruire modelli stocastici anche se lo studente non avesse mai sentito parlare di probabilità. È sufficiente conoscere le frazioni e le proporzioni per dedurne ciò che capita ad un gran numero di individui. Voglio ora fare un breve riassunto del corso di probabilità. Alle due facce di una moneta vengono assegnati i simboli 0 e 1. Il lancio della moneta genera stringhe di cifre binarie. Ai risultati 0 e 1 noi assegniamo i pesi  $q \geq 0$  e  $p \geq 0$  tali che  $p + q = 1$ .

L'assegnazione di pesi alle stringhe di cifre è realizzata sotto forma moltiplicativa: per esempio 01101001  $\rightarrow$   $qpqpqpqp$ . Se si interpreta:

0  $\rightarrow$  un passo a destra

1  $\rightarrow$  un passo in su

le stringhe di cifre binarie possono essere mappate su un reticolo piano graduato, cominciando dall'origine (fig. 1). Ci sono  $\binom{n}{x}$  cammini dall'origine al punto  $(n-x, x)$  ed ognuno di essi ha peso  $p^x q^{n-x}$ . Di qui deriva la distribuzione binominale:

$$b(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

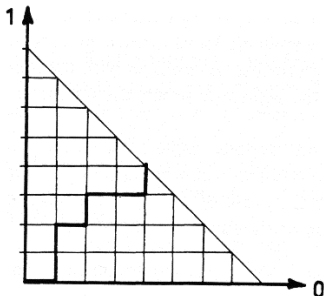


Fig. 1 Il cammino 01101001

Dopo questi preliminari, facciamo un esempio che presenta due pregi. Innanzitutto possiede un enorme numero di applicazioni significative. Esso apre poi la via alla scoperta di tutti gli argomenti menzionati più sopra e particolarmente permette la prima presentazione di una gran parte dei concetti e degli strumenti dell'analisi.

Un giovanotto si concede un giorno di vacanza e va a pescare. La pesca consiste sostanzialmente nell'attendere pazientemente che un pesce abbocchi. La durata dell'attesa può essere qualsiasi numero reale non negativo e dipende dal caso. Per ottenere un processo deterministico, prendiamo in considerazione un gran numero  $N$  di pescatori e facciamo l'ipotesi che un pescatore abbandoni il suo posto non appena ha catturato un pesce. Indichiamo con  $E(t)$  la frazione di pescatori che non hanno preso alcun pesce nell'intervallo di tempo  $[0, t)$ . E' chiaro che il numero dei pescatori sulla spiaggia va riducendosi col passare del tempo, e, dopo  $t$  secondi, rimangono soltanto più  $N \cdot E(t)$  pescatori. Vogliamo trovare la funzione  $E(t)$ . Per determinare  $E$  dobbiamo prima fare delle ipotesi (assiomi) plausibili per quanto riguarda la pesca. Evidentemente ipotesi diverse conducono in generale a diverse funzioni  $E$ .

Gli studenti così sollecitati fanno dozzine di proposte. Alcune buone, altre cattive. Alcune sono contraddittorie, altre dipendenti o anche equivalenti tra di loro. Citiamone alcune buone: nel lago si trovano molti pesci; i pescatori non si influenzano l'un l'altro; la possibilità di prendere un pesce non dipende dal numero di pesci già preso. L'attesa non è garanzia di successo. Un pescatore appena arrivato ha la stessa possibilità di catturare un pesce, nel secondo successivo al suo arrivo, di un altro pescatore che attende già da molte ore. Tra queste proposte noi scegliamo due sistemi alternativi di assiomi che risultano essere equivalenti.

<p><b>ASSIOMA 1: Indipendenza.</b>  <math>E(t)</math> non dipende da <math>N</math>.  <b>ASSIOMA 2: Stazionarietà.</b>  L'istante iniziale non ha importanza. In altre parole, i pescatori non si influenzano l'un l'altro e il processo della pesca non cambia al passar del tempo.  Confrontiamo le transizioni <math>O \rightarrow t \rightarrow t+h</math> con la transizione diretta <math>O \rightarrow t+h</math> (Fig. 2)  L'applicazione dei due assiomi conduce immediatamente all'equazione funzionale  <math>E(t+h) = E(t)E(h)</math></p>	<p>A. Il numero dei pescatori decresce di frazioni eguali in intervalli di tempo eguali  L'applicazione di questo singolo assioma agli intervalli eguali di tempo <math>[0, t]</math> e <math>[t, t+h]</math> in figura 3 conduce a</p> $\frac{N \cdot E(t)}{N} = \frac{N \cdot E(t+h)}{N \cdot E(h)}$ <p>ossia <math>E(t+h) = E(t)E(h)</math></p>
---	--

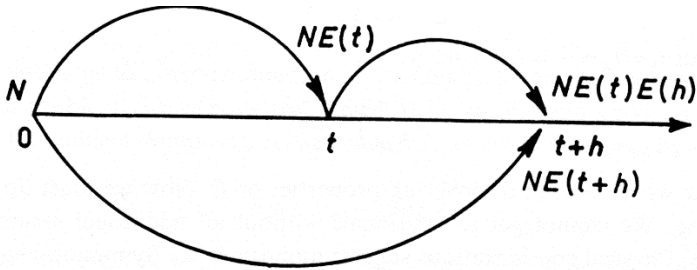


Fig. 2.

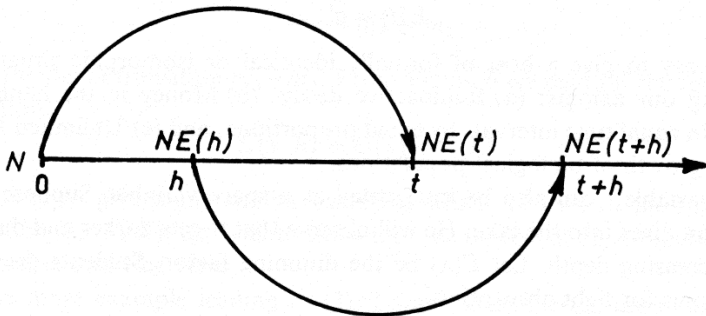


Fig. 3.

A questo punto dobbiamo inventare o scoprire una funzione che abbia la proprietà (2). Una funzione sconosciuta può essere considerata come una scatola nera (fig. 4). Essa accetta degli stimoli all'ingresso e li trasforma in risposte adeguate all'uscita. Insomma, E è un operatore che trasforma degli 'inputs' in 'outputs'.

È evidente che non possiamo aspettarci che lo studente scopra da solo che tipo di inputs dovrebbe utilizzare per ottenere dalla (2) delle informazioni in maniera efficiente e sistematica. Bisognerebbe fornirgli il nastro appropriato di input che egli dovrebbe poi immettere nella scatola (equazione funzionale). Fortunatamente la soluzione della (2) non presenta alcuna difficoltà, dal momento che il metodo è identico a quello che serve per risolvere l'equazione funzionale (1).

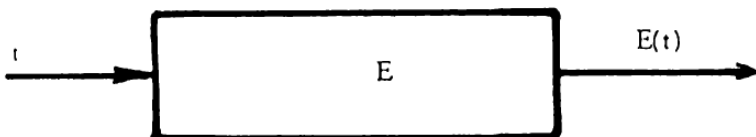


Fig. 4

Schematizziamo qui di seguito la ben nota soluzione (omettendo solo alcuni ovvii passaggi). Dalla (2) otteniamo per induzione:

$$E(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = E(t_1) E(t_2) \dots E(t_n).$$

Sia  $E(1) = a$ . Se poniamo  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1/n$ , otteniamo

$$E(1) = a = [E(1/n)]^n \quad \text{ossia } E(1/n) = a^{1/n}$$

Se poniamo  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1/m$ , otteniamo

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = a^{\frac{n}{m}}$$

Fino a questo punto abbiamo scoperto le proprietà di  $E$ . Ora ci occorre un po' di inventiva. Non possiamo passare agli irrazionali senza fare un'ulteriore ipotesi su  $E$ . Semplici considerazioni fisiche ci suggeriscono di assumere la monotonia di  $E$ . La monotonia della funzione  $E$  ci permette di estendere facilmente i nostri risultati dal campo razionale a quello irrazionale e finalmente otteniamo per ogni  $t$  reale:

$$E(t) = a^t$$

È facile trovare una gran quantità di situazioni formalmente identiche o isomorfe in grado di soddisfare i nostri assiomi: a) disintegrazione radioattiva; b) il capitale in banca aumenta in proporzioni eguali in intervalli di tempo eguali; c) una crescita maltusiana illimitata di popolazioni biologiche.

La variabilità di  $t$  può anche essere interpretata come una variabile di spazio. Supponiamo che il nostro pescatore si tuffi nel lago. Egli si accorgerà che più si immergerà più il mondo attorno a lui si fa buio. Supponiamo che  $E(x)$  sia il fattore di oscuramento. Gli studenti propongono due assiomi per l'assorbimento della luce.

- 1) Passando attraverso uno strato di un elemento assorbente la intensità della luce emergente è proporzionale alla intensità della luce incidente.
- 2) La luce non si stanca. L'assorbimento dipende soltanto dallo spessore dello strato attraversato, ma non dalla sua posizione nell'elemento assorbente.

Questi sono ovviamente assiomi spaziali analoghi agli assiomi A1 e A2. La figura 5 mostra come questi assiomi ci conducono all'equazione funzionale (2) con la soluzione  $E(x) = a^x$ .

Per ragioni di calcolo rimandiamo gli esperimenti.

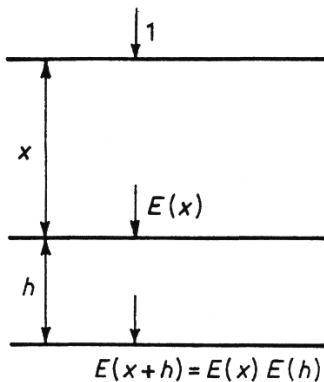


Fig. 5

Passiamo invece immediatamente alla funzione inversa  $E^{-1}$ . Un problema applicato ci permette di scoprire questa funzione. Alcuni ragazzi s'interessano di razzi e posseggono una certa conoscenza di questo argomento. Supponiamo che un razzo nello spazio abbia una massa iniziale  $m_0$ . Nel passaggio dallo stato  $m_0 \rightarrow$  allo stato  $m_1$ , esso guadagna velocità. Da che cosa dipende l'incremento  $L$  della velocità? La risposta a questa domanda sarà: dal rapporto tra le masse  $x = m_0/m_1$ .

Ora confrontiamo i passaggi

$$m_0 \rightarrow m_1 \rightarrow m_2$$

con il passaggio diretto  $m_0 \rightarrow m_2$ . Dalla Fig. 6 noi deduciamo la equazione funzionale

$$L(x \cdot h) = L(x) + L(h) \quad (3)$$

È facile dare molti esempi simili che portano alla equazione funzionale (3). Ed è banale mostrare che l'inverso di una funzione  $E$  è una funzione  $L$  e viceversa.

Ancora un esempio ci porta alla (3). Voglio calcolare la quantità  $I(n)$  di informazione che ottengo se mi si dice il risultato di un esperimento casuale con  $n$  risultati equiprobabili. È naturale esigere che  $I(n)$  sia una funzione crescente di  $n$ . Supponiamo che in più io venga a conoscere il risultato di un secondo esperimento con  $m$  risultati equiprobabili. Desidero che le informazioni siano additive. L'informazione totale desunta da entrambi gli esperimenti è allora data da  $I(m) + I(n)$ . Ma i due esperimenti possono anche essere considerati come un esperimento composto con  $m \cdot n$  risultati equiprobabili. Quindi l'informazione totale dovrebbe anche essere  $I(mn)$ . Ciò significa che  $I(mn) = I(m) + I(n)$  che è la (3)

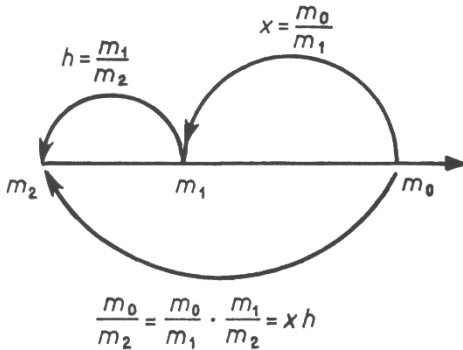


Fig. 6.

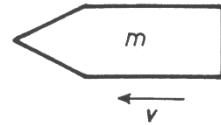


Fig. 7.

Ora dobbiamo stabilire un legame tra l'equazione funzionale (3) e l'iperbole  $y = 1/x$ . Ciò si può fare in maniera semplicissima. Invece del comportamento globale, guardiamo il comportamento locale del razzo. Supponiamo che il razzo abbia massa  $m$  e velocità  $v$  (Fig. 7). Un colpo di fucile sparato da un astronauta fa variare lo stato del razzo come è indicato nella Fig. 8. Qui  $\Delta v$  è l'aumento della velocità del razzo e  $\Delta m$  e  $c$  sono la massa e la velocità della pallottola.

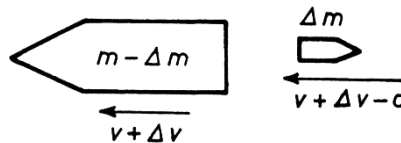


Fig. 8.

Dal momento che la quantità di moto si conserva otteniamo:

$$mv = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v + \Delta v - c)$$

ovvero:

$$m \Delta v = c \Delta m$$

ovvero

$$\Delta v = \Delta m \frac{c}{m}$$

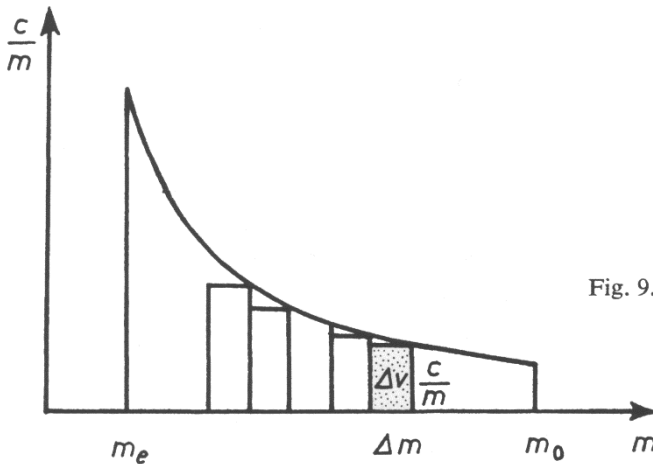


Fig. 9.

$\Delta v$  è naturalmente il rettangolo tratteggiato sotto l'iperbole  $m \rightarrow c/m$  nella fig.9. Se l'astronauta spara cinque colpi l'aumento di velocità è la somma dei cinque rettangoli nella fig. 9. Se invece il motore del razzo espelle gas in continuità, le pallottole sono le molecole del gas la cui massa  $\Delta m$  è irrilevante. Perciò il passaggio  $m_0 \rightarrow m_1$  conduce ad un aumento di velocità uguale all'area sotto l'iperbole da  $m_0$  a  $m_1$ . Nasce così l'idea che l'equazione funzionale (3) sia valida per le aree sotto l'iperbole  $y = c/x$ . Da questo momento lo sviluppo è del tutto standardizzato e io mi limito ad indicarne i passaggi successivi.

- 1) La funzione  $\ln$  è definita dalla fig. 10 e così si dimostra la relazione  $\ln(x \cdot h) = \ln x + \ln h$ .
- 2) Il numero  $e$  è definito da  $\ln e = 1$
- 3) La funzione  $\exp$  è definita da  $\exp = \ln^{-1}$
- 4) Si dimostra così che  $E(x) = e^{\lambda x}$  e  $L(x) = c \ln x$  sono le sole soluzioni monotone della (2) e della (3).

In effetti da (2) e da (3) otteniamo  $\ln \cdot E(x+h) = \ln \cdot E(x) + \ln \cdot E(h)$

Ponendo ora  $f = \ln \cdot E$ , otteniamo:  $f(x+h) = f(x) + f(h)$

ed anche  $f$  è monotona.

Di qui dalla (1):

$$f(x) = \lambda x, \ln \cdot E(x) = \lambda x, E(x) = e^{\lambda x}$$

Analogamente si dimostra che  $L(x) = c \ln x$ .

Di decisiva importanza sono le approssimazioni locali di  $\ln$  e di  $\exp$  per mezzo di funzioni lineari. La fig. 11 mostra che:

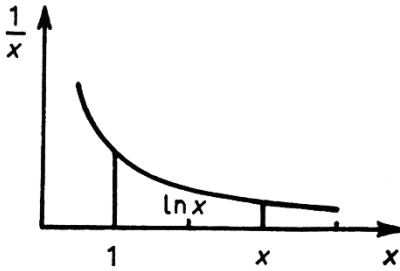


Fig. 10.

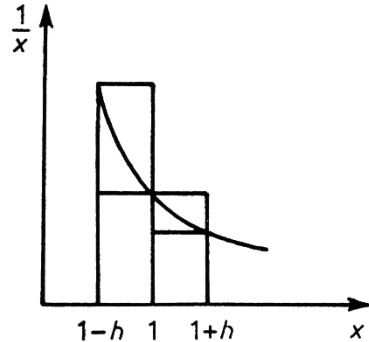


Fig. 11.

$$\frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h \text{ per } |h| < 1.$$

Poiché  $\frac{h}{1+h} = h - \frac{h^2}{1+h}$ , otteniamo per  $h \rightarrow 0$ :  $\ln(1+h) = h + O(h^2)$  (4)

Da  $\ln(1+h) < h$  e  $\ln(1-h) < -h$ , otteniamo, passando alle funzioni reciproche  $1+h < e^h$  e  $\ln(1-h) < e^{-h}$ , oppure  $e^h < \frac{1}{1-h} = 1+h + \frac{h^2}{1+h}$ , da cui

$$e^h = 1+h + O(h^2) \quad (5)$$

Generalmente si utilizzano le approssimazioni più deboli:

$$\ln(1+h) = h + o(h) \quad (6)$$

$$e^h = 1+h + o(h^2) \quad (7)$$

Solo per la dimostrazione del teorema del limite centrale si richiedono le versioni più forti (4) e (5). Se si applicano la (6) e la (7) a

$$\ln(x+h) = \ln x + \ln(1+h/x) = \ln x + \ln(1+h/x)$$

ed a  $e^{x+h} = e^x e^h$ ,

$$\ln(x+h) = \ln x + \frac{h}{x} + o(h) \quad (8)$$

$$e^{x+h} = e^x + he^x + o(h) \quad (9)$$

Ci troviamo ora in una posizione molto forte. Sappiamo come calcolare dei valori delle funzioni  $\ln$  ed  $\exp$ . Ciò ci autorizza ad usare le tavole di queste funzioni. Le approssimazioni lineari (8) e (9) ci consentono di definire concetti e di risolvere problemi che appartengono effettivamente all'analisi. Torniamo ora alle applicazioni che sono la sorgente principale di nuovi e significativi concetti e di nuove ispirazioni. Riferiamoci nuovamente al problema della pesca. Sappiamo che:

$E(t) = e^{-\lambda t}$  è la percentuale di pescatori che ancora aspettano dopo  $t$  secondi.

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  è la percentuale dei pescatori che hanno catturato un pesce.

$F(t)$  è una funzione crescente con  $F(0) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

Conseguentemente  $F(t)$  può essere interpretato come una distribuzione di una massa unitaria sull'asse positivo  $t$ . La massa totale posta a sinistra di  $t$  è  $F(t)$  e la massa sull'intervallo  $[t, t+h)$  è  $F(t+h) - F(t)$

Dalla (9) otteniamo:  $F(t+h) - F(t) = \lambda e^{-\lambda t} h + o(h)$ .

La massa sull'intervallo unitario in  $t$  è

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lambda e^{-\lambda t} + \frac{o(h)}{h}$$

Questo rapporto tende a  $\lambda e^{-\lambda t}$  quando  $h \rightarrow 0$ . Per questo motivo chiamiamo  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  la densità della distribuzione  $F(t)$ . Ora si può dare un'interpretazione fisica di  $\lambda$ . All'istante  $t$  ci sono sulla spiaggia  $N e^{-\lambda t}$  pescatori.

Nel breve intervallo di tempo  $[t, t+h]$ ,  $N[F(t+h) - F(t)] = N[\lambda e^{-\lambda t} h + o(h)]$  di essi pescano un pesce e se ne vanno. Ne deriva che il numero di pesci presi da un uomo in un secondo è  $\lambda + o(1)$ . Quest'espressione tende a  $\lambda$  quando  $h \rightarrow 0$ . Perciò  $\lambda$  è semplicemente l'intensità o la frequenza d'arrivo dei pesci, ossia la media dei pesci presi in un punto della spiaggia in un secondo.

*Pesca con una moneta.* La pesca è un processo continuo. Scopriremo

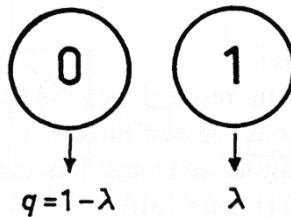


Fig. 12.

nuovi importanti risultati se tentiamo un'approssimazione mediante un processo discreto. Voglio simulare l'attesa della cattura di un pesce, lanciando una moneta al ritmo di una al secondo. Le due facce della moneta sono segnate con le cifre 0 e 1 (fig. 12). L'apparizione di 1 significa che ho catturato un pesce. Per assicurare una media di  $\lambda$  pesci al secondo supponiamo che la probabilità sia  $\lambda$  per 1 e  $q = 1 - \lambda$  per 0. Il lancio della moneta soddisfa i nostri assiomi A1 e A2. Dato che la moneta non ha memoria, passato e futuro sono indipendenti, e, in più, la moneta non si altera col passare del tempo. Non c'è che una differenza. Il processo di simulazione col lancio della moneta ammette la cattura di un pesce solo alla

fine di un secondo. Ciò non dovrebbe causare nessun errore grave, dal momento che un secondo è un periodo molto breve rispetto al tempo impiegato pescando.

TAVOLA I

risultato	tempo di attesa	peso
1	1	$\lambda$
01	2	$\lambda q$
001	3	$\lambda q^2$
⋮	⋮	⋮
00...01	$n$	$\lambda q^{n-1}$
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_n$	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

La Tavola I mostra i possibili risultati della mia partita di pesca con i loro corrispondenti pesi (probabilità). La somma dei pesi dovrebbe dare 1. Ma la somma  $\lambda + \lambda q + \lambda q^2 + \lambda q^3 + \dots$  ha un numero infinito di termini e non è stata ancora definita. Siamo quindi obbligati ad inventare la successione geometrica. Supposto di aver sviluppato il necessario fondamento matematico, troviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda q^{n-1} = \frac{\lambda}{1-q} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

come dovrebbe risultare.

Quale è il tempo medio di attesa?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (nq^{n-1} - nq^n) = 1 + q + q^2 + \dots =$$

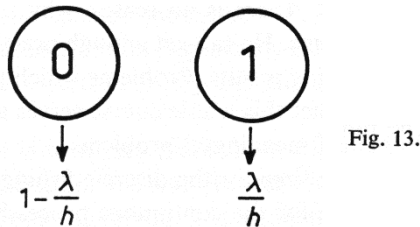
$$= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

Naturalmente questo risultato non costituisce una sorpresa.

Scopriamo un altro risultato utile se passiamo dal processo discreto al corrispondente processo continuo.

Cominciamo col lanciare la nostra moneta al ritmo di  $n$  lanci al secondo. La probabilità del risultato 1 diventa ora  $\lambda/n$  onde tenere costante la velocità  $\lambda$  di cattura dei pesci (fig. 13). ( $\lambda$  pesci/secondo).

Il tempo di attesa è maggiore di  $t$  sec se ottengo  $nt$  zeri in fila.



La probabilità di questo evento è  $p_n(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nt}$

Facendo ora tendere  $n \rightarrow \infty$  dovremo ottenere il processo continuo di pesca. Ci aspettiamo quindi che sia  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = e^{-\lambda t}$  il che può essere facilmente dedotto dalla (8).

Prendendo i logaritmi otteniamo:

$$\begin{aligned} \ln p_n(t) &= nt \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = nt \left[-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \\ &= -\lambda t + o\left(\frac{1}{n}\right) : l/n \end{aligned}$$

Per  $n \rightarrow \infty$ ,  $\ln p_n(t) \rightarrow \lambda/n$  e  $p_n(t) \rightarrow e^{-\lambda t}$

Ciò dimostra l'importante risultato  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = e^x$

Abbiamo ora scoperto tutti i risultati specificati dal programma. Ma ci occorre ancora fare una pratica più ampia. Nei libri di testo si trovano in quantità problemi privi di qualsiasi intelligente motivazione.

Non c'è alcuna ragione perché uno studente debba risolvere dei problemi privi di motivazione. Egli si può interessare abbastanza risolvendo problemi con risultati utili e interessanti. I problemi più particolarmente utili sono quelli che preparano all'analisi; in particolare tutta la nostra serie di lezioni costituisce un preludio all'analisi. Darò ora alcuni esempi di problemi aventi un preciso significato.

1. - La misura del tempo medio di attesa per un processo discreto di pesca è  $1/\lambda$ . Quale il valore corrispondente per un processo continuo? Chiamiamo  $T$  il tempo totale di attesa per tutti gli  $N$  pescatori. Il numero dei pescatori che ancora aspettano al tempo  $t$  è  $N e^{-\lambda t}$ .

Con considerazioni intuitive è facile vedere che  $T$  è semplicemente l'area sotto il grafico di  $t \rightarrow N e^{-\lambda t}$  (fig. 14).

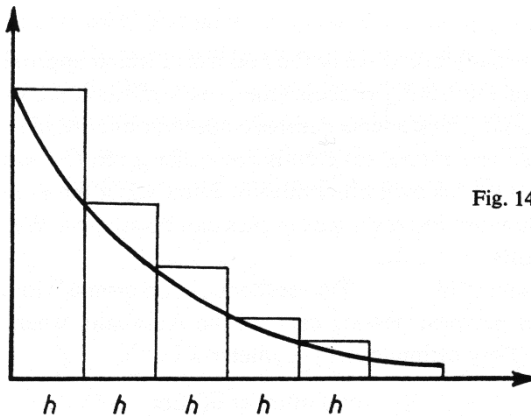


Fig. 14.

Una approssimazione superiore di quest'area è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} hN e^{-\lambda nh} = \frac{hN}{1 - e^{-\lambda h}} = \frac{hN}{1 - 1 + \lambda h + o(h)} = \frac{N}{\lambda + o(h)/h} \rightarrow \frac{N}{\lambda} = T$$

per  $h \rightarrow 0$ . Quindi  $\frac{T}{N} = \frac{1}{\lambda}$ .

Ancora una volta il risultato non ci stupisce. Il modello continuo e quello discreto ci danno lo stesso risultato.

2. - Relazione tra densità  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  e distribuzione  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

Facciamo il grafico della densità  $f(t)$  (fig.14). Considerazioni intuitive suggeriscono che l'area sotto  $f(t)$  da  $O$  a  $t$  dovrebbe essere uguale a  $F(t)$ . Proviamo a controllare questo risultato. Dividiamo allora l'intervallo  $[0, t]$  in  $n$  intervalli uguali di lunghezza  $h = t/n$ . Una approssimazione superiore di questa area viene data dalla:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n h\lambda e^{-\lambda hr} &= \lambda h \frac{1 - e^{-\lambda nh}}{1 - e^{-\lambda h}} = \lambda h \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - 1 + \lambda h + o(h)} = \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 + o(h)/h} \rightarrow F(t) \quad \text{for } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.- Ci sono molti processi nel mondo reale che approssimativamente soddisfano gli assiomi della pesca (si tratta di un processo puramente casuale o processo di Poisson).

Gli studenti confrontano i risultati dell'osservazione con le previsioni teoriche. I risultati numerici sono dati allo studente oppure egli li ricava dalla sua osservazione diretta. In seguito quando la distribuzione di Poisson è stata appresa dagli studenti, si potranno studiare altri esempi ancor più interessanti. Menzionerò qui alcuni esperimenti.

a) Le automobili su una autostrada passano (arrivano) con lo stesso ritmo con cui i pesci vengono catturati?

Due studenti, ognuno con un cronometro, registrano i tempi tra due macchine successive sull'autostrada quando il traffico non è troppo intenso. Essi calcolano il parametro  $\lambda$  con

$$\lambda = \frac{\text{numero totale di macchine}}{\text{tempo complessivo}}$$

La percentuale degli intervalli  $> t$  secondi dovrebbe essere  $\lambda e^{-\lambda t}$ . L'accordo tra la distribuzione teorica e quella empirica è generalmente eccellente. Ma se il traffico è intenso le macchine non possono sorpassarsi liberamente e l'assioma dell'indipendenza vien meno.

b) Una matassa di filo si rompe sotto un peso costante piuttosto rilevante. Il filo si rompe dove vi è un'imperfezione. Vogliamo controllare se le imperfezioni sono distribuite a caso lungo il filo. Si calcola  $\lambda$  con la formula seguente:

$$\lambda = \frac{\text{numero dei pezzi}}{\text{lunghezza totale del filo}}$$

C'è nuovamente un accordo ragionevole tra i risultati teorici e quelli empirici.

c) Gli studenti leggono un libro e studiano gli intervalli successivi tra un "o" (oppure) e il successivo "o". La congiunzione "o" si presenta forse con la stessa frequenza dei pesci? Gli assiomi A1 e A2 sono presumibilmente soddisfatti. Scrivendo un libro uno scrittore non fa attenzione alla congiunzione "o", né la sua predilezione per questa congiunzione cambia durante la composizione del libro. Ciò assicura l'indipendenza e la stazionarietà. Se c'è discrepanza tra teoria ed osservazione dobbiamo cercarne le ragioni. Quale assioma è stato violato e perché?

Di quando in quando gli studenti dovrebbero affrontare problemi più impegnativi che conducono a sviluppi più estesi. I due seguenti problemi appartengono a questa categoria.

4.- Code semplici. Sulla spiaggia c'è un posto per la pesca. I clienti (pescatori) arrivano in questo posto uno alla volta e a caso con una frequenza media di  $\lambda/\text{sec}$ . Essi vengono serviti (prendono un pesce) uno per volta con una frequenza media di  $\mu/\text{sec}$ . Il risultato del problema (1) mostra che  $1/\lambda$  è la media dei tempi intercorrenti tra un arrivo l'altro, mentre  $1/\mu$  è la media dei tempi intercorrenti tra un servizio (una cattura) e il successivo. Si forma una coda. Noi diremo che la coda è nello stato  $n$  se ci sono  $n$  clienti in coda contando anche quello che in quel momento viene servito. Se  $\lambda > \mu$  la coda, è ovvio, crescerà indefinitamente. Supponiamo ora  $\lambda < \mu$ . Vogliamo studiare la fluttuazione di questa coda col passare del tempo. Invece di considerare soltanto questa coda prendiamo in esame un numero considerevole  $N$  di code identiche. Siano  $p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \dots$  le percentuali di code che si trovano negli stati  $0, 1, 2, \dots$

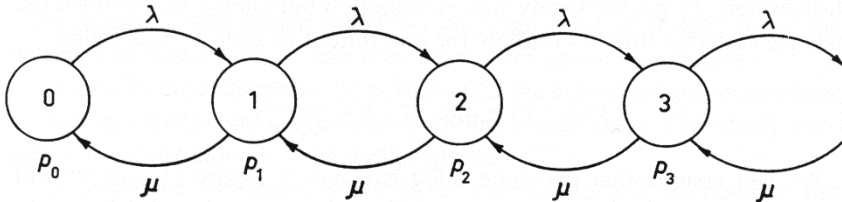


Fig. 15.

I clienti vanno e vengono continuamente e le code corrispondenti passano negli stati vicini, l'intero processo può essere visualizzato col diagramma di flusso reticolare di Fig. 15. Le percentuali  $p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \dots$  sono funzioni del tempo. Ma se il flusso nella rete ha progredito per un tempo piuttosto lungo, ci si approssima ad uno stato costante e  $p_i$  diventa indipendente dal tempo. Non faccio la dimostrazione di questo risultato ma cercherò di renderlo evidente attraverso considerazioni intuitive. In seguito lo dimostrerò nel caso semplice di una catena di Markov a due stati per tempi discreti. Tale catena è una specie di macchina per il "rimiscelamento". Supponiamo che la "sostanza" avente massa totale 1 sia inizialmente distribuita in due posti  $S_0$  e  $S_1$ . In  $S_0$  ce n'è  $p_0$  e in  $S_1$  ve n'è  $q_0 = 1 - p_0$ . Alla fine di ogni secondo una percentuale  $\lambda$  di "sostanza" in  $S_0$  affluisce in  $S_1$ , e una percentuale  $\mu$  della stessa sostanza presente in  $S_1$ , affluisce in  $S_0$  (fig. 16).

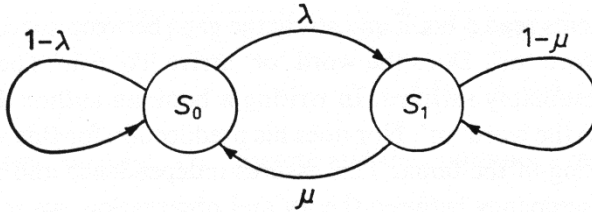


Fig. 16.

Dopo  $n$  secondi abbiamo la quantità  $p_n$  in  $S_0$  e  $q_n = 1 - p_n$  in  $S_1$ . Dopo  $n+1$  secondi abbiamo in  $S_0$

$$p_{n+1} = (1 - \lambda)p_n + \mu(1 - p_n) = (1 - \lambda - \mu)p_n + \mu$$

Se ora poniamo  $1 - \lambda - \mu = a$ ,  $1 - a = \lambda + \mu$ , allora  $|a| < 1$ . Dopo ripetute sostituzioni otteniamo

$$p_n = a^n p_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)\mu = a^n p_0 + \mu \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

oppure

$$p_n = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + a^n \left( p_0 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right), \quad e \quad q_n = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - a^n \left( p_0 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)$$

La distribuzione di sostanza nei due posti si approssima molto rapidamente allo stato costante  $p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ,  $q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ , che è indipendente dalla distribuzione iniziale. Per ottenere la distribuzione nello stato costante, non c'è che da scrivere l'equazione dell'equilibrio "flusso entrante" = "flusso uscente" per uno stato. Per lo stato  $S_0$  si ottiene

$$\mu(1 - p) = \lambda p \quad \text{ovvero} \quad p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Supponiamo che la stessa cosa accada nella fig. 15, e deduciamo alcune conclusioni da questa ipotesi. Le equazioni di equilibrio per lo stato costante possono essere formulate considerando la fig. 15 e possono essere risolte con metodi sequenziali:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0,$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{media dei tempi di servizio}}{\text{media dei tempi tra arrivi successivi}}$$



5.- Deduzione assiomatica delle Legge degli Errori (Herschel). Talvolta, ma assolutamente non sempre, la costruzione di un modello matematico si sviluppa in quattro fasi: (a) Osservazione; (b) Matematizzazione; (c) Deduzione; (d) Applicazione. Illustriamo questo processo con un esempio svolto particolareggiatamente.

a) Ci sono due fratelli, due gemelli identici. Ognuno di loro indipendentemente dall'altro ha misurato 200 volte lo stesso intervallo. Io solo conoscevo esattamente la lunghezza dell'intervallo, mentre essi la ignoravano. Gli errori del primo fratello furono  $x_1, x_2, \dots, x_{200}$  e quelli dell'altro furono  $y_1, y_2, \dots, y_{200}$ . Questi errori vengono dati agli studenti prendendoli dalla Tavola RAND di 100.000 deviazioni normali. Gli studenti costruiscono due istogrammi, uno per ogni fratello, e segnano sul piano i punti  $(x_i, y_i)$ . Passano poi all'osservazione di quanto hanno ottenuto. Entrambi gli istogrammi rassomigliano alla fig. 17. I punti  $(x_i, y_i)$  nella fig. 18 sono distribuiti attorno all'origine senza alcuna direzione preferita di addensamento (simmetria rotazionale). In più si dice agli studenti che migliaia di altre persone hanno effettuato queste misurazioni ottenendo sempre istogrammi analoghi a quelli della fig. 17.

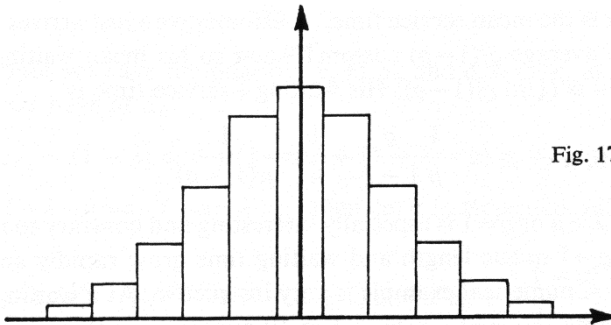


Fig. 17.

b) Matematizzazione. Cerchiamo di spiegare questo fatto. Supponiamo che esista una funzione di densità  $\varphi$ , tale che  $\varphi(x) \cdot h + o(h)$  è la percentuale di errori che si trovano nell'intervallo  $[x, x + h]$ . Questa densità  $\varphi$  varierà in generale a seconda delle differenti persone, ma i gemelli identici dovrebbero avere densità identiche. Cerchiamo di caratterizzare  $\varphi$  nel caso dei due fratelli con un insieme di assiomi plausibili.

Assioma 1: Gli errori  $x_i$  e  $y_i$  hanno uguale densità  $\varphi$

Assioma 2: Gli errori  $x_i$  e  $y_i$  sono indipendenti

Assioma 3: La densità combinata dell'errore in  $(x, y)$  dipende solamente da  $\sqrt{x^2 + y^2}$  (simmetria rotazionale).

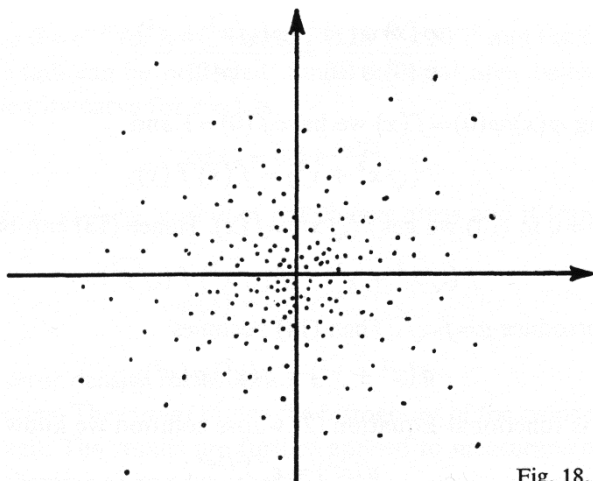


Fig. 18.

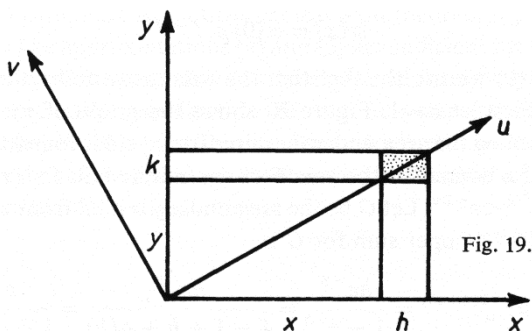


Fig. 19.

(c) Deduzione. (Trascuriamo da questo momento gli effetti degli "o"). Per gli assiomi 1 e 2 la percentuale degli errori che si trova nel rettangolo punteggiato della fig. 19 è

$$\varphi(x) \cdot h \cdot \varphi(y) \cdot k \quad (11)$$

Facciamo ruotare gli assi in modo che l'asse  $u$ , passi attraverso il punto  $(x, y)$ . Nel nuovo sistema  $(u, v)$  il punto  $(x, y)$  ha coordinate  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ . Quindi per l'assioma 3 la frazione degli errori che stanno nel rettangolo punteggiato può anche essere espressa da

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \varphi(0) \cdot h \cdot k \quad (12)$$

Uguagliando (112) e (12) otteniamo l'equazione funzionale

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(0) \cdot \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

oppure

$$\frac{\varphi(x) \cdot \varphi(y)}{\varphi(0) \cdot \varphi(0)} = \frac{\varphi(\sqrt{x^2 + y^2})}{\varphi(0)}$$

Ponendo  $\varphi(x)/\varphi(0) = f(x)$  otteniamo  $f(0) = 1$  e

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y) \quad (13)$$

Se ora poniamo  $y=0$  nella 13 otteniamo  $f(\sqrt{x^2}) = f(x)$

Di qui la (13) può essere scritta

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(\sqrt{x^2}) + f(\sqrt{y^2})$$

Introduciamo ora  $g = f \cdot \sqrt{\quad}$ . Allora la (13) diventa

$$g(x^2 + y^2) = g(x^2) \cdot g(y^2)$$

Ma questa è l'equazione funzionale (2) la cui soluzione sappiamo che è

$$g(x^2) = e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Invertendo le serie delle trasformazioni otteniamo finalmente:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Per trovare  $\varphi(0)$  utilizziamo il fatto che l'area totale sotto la curva di densità deve essere 1. Innanzitutto poniamo  $\sigma = 1$ . La fig. 20 mostra il grafico di  $y = e^{-x^2/2\sigma^2}$ . Con il metodo dei trapezoidi l'area sotto la curva per  $|x| \leq 4$  si trova che vale circa 2,5.

Ora troviamo un vincolo per l'area F delle infinite porzioncine esistenti per  $|x| > 4$ . Per  $x > 4$  abbiamo  $e^{-x^2/2} < e^{-2x}$ . Sia G l'area sotto  $y = e^{-2x}$  da  $x = 4$  all'infinito. Allora  $F < 2G$ . Un limite superiore di G è

$$\sum_{n=0}^{\infty} h e^{-2(4+nh)} = \frac{h e^{-8}}{1 - e^{-h}} = \frac{h e^{-8}}{1 - 1 + h + o(h)} = \frac{e^{-8}}{1 + o(h)/h}.$$

Questa tende a  $G = e^{-8}$  per  $h \rightarrow 0$ . Quindi  $F < 2e^{-8} < 10^{-3}$ , e il contributo delle infinite porzioncine può essere trascurato.

Dal momento che l'area totale sotto  $y = e^{-x^2/2}$  vale  $2,5$  <sup>(2)</sup>, la curva di densità per  $\sigma = 1$  vale

$$\varphi(x) = 0,4 e^{-x^2/2} \quad (14)$$

La funzione  $(x, y) \rightarrow (\sigma x, y/\sigma)$  non cambia le aree e trasforma la (14) in

$$\varphi(x) = \frac{0,4}{\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

che è la densità dell'errore per un arbitrario  $\sigma$ .

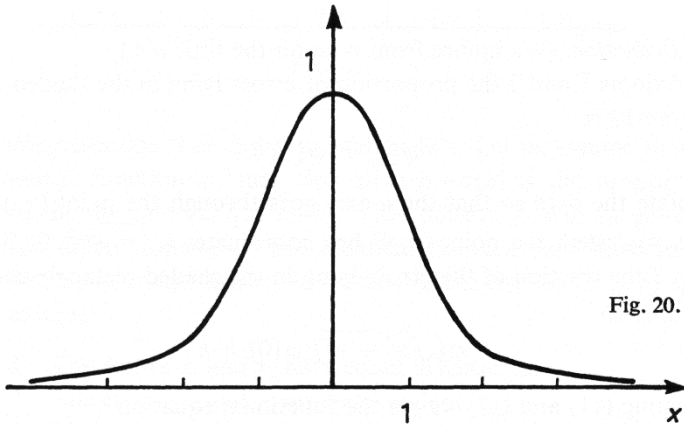


Fig. 20.

(d) Applicazione. La curva (15) si adatta sorprendentemente bene agli istogrammi dei gemelli della fig. 17. I risultati vengono poi applicati a misurazioni fatte dagli stessi studenti e da altri.

A questo punto gli studenti non possono ancora rendersi conto del pieno significato della curva degli errori. Per ottenere una maggiore comprensione si dimostra il teorema del limite centrale per il caso binomiale. Le approssimazioni (4) e (5) sono sufficienti a questo scopo. A questo punto l'ubiquità della legge degli errori può essere spiegata intuitivamente.

L'applicazione più spettacolare del procedimento in quattro tempi è la deduzione della distribuzione di Poisson come processo stocastico. Ma ciò richiede una maggior conoscenza dell'analisi. A questo stadio la distribuzione di Poisson deve essere dedotta come limite della distribuzione binomiale.

---

<sup>2</sup> Il valore esatto è  $\sqrt{2\pi} = 2,5066$ . Ma questa è una semplice curiosità e può essere calcolata in seguito.

## L'ARITMETICA NEL MONDO GRECO

Pierluigi Pizzamiglio

### 1. La storia nelle parole

La parola “aritmetica” deriva dal termine greco arithmetikè, che sua volta è la sostantivizzazione dell’aggettivo di arithmòs = numero, quantità, lunghezza, durata. Dal punto di vista etimologico ‘aritmetica’ rimanda dunque a ‘numero’ e quindi significa ‘la scienza del numero’.

A sua volta il termine greco di arithmòs esprime un concetto di ordine e di armonia: insomma, di ...ritmo. Tuttavia il termine italiano ‘numero’ deriva da quello latino di nùmerus, che significa una pluralità o la parte di un tutto. Il termine latino deriva probabilmente a sua volta dal verbo greco némo, che significa dividere, ripartire, distribuire, contare le quantità ed ha la radice nel sanscrito namati.

La morale della breve storia è dunque che per i Greci arithmòs indicava in primo luogo la circostanza che vi sono ‘tanti’ oggetti e solo in secondo luogo (nell’atto cioè del contare) si prende in considerazione la determinazione precisa di un numero di oggetti ben definiti. Può dunque venire contato solo ciò che è davanti a noi in un certo numero, mentre una pura unità non è un numero di cose: da ciò si capisce perché i Greci ritennero non essere arithmòs l’unità, ma il principio o la fonte dei numeri. Ma la determinazione etimologica di un termine, pur consentendo importanti e assai significative asserzioni, non esaurisce il senso né è sufficiente ad evidenziare la struttura operativa dal concetto espresso: non risponde cioè in modo adeguato, nel nostro caso, né alla domanda ‘che cos’è l’aritmetica’ e nemmeno alla domanda ‘che cosa era l’aritmetica per i Greci’.

Dal momento che la concezione e la pratica ellenica in ambito aritmetico si presenta assai varia e non facilmente riconducibile ad un ordine sistematico, preferiamo seguire a grandi linee un ordine espositivo storico, pur consapevoli delle lacune documentarie che talvolta rendono affatto impossibile un’adeguata interpretazione dello sviluppo storico stesso.

### 2. La notazione aritmetica greca

I sistemi di rappresentazione numerica adottati dai Greci del mondo antico sono stati di tre tipi. È opinione quasi unanime degli studiosi che il relativamente scarso sviluppo dell’aritmetica ellenica sia in larga parte da

attribuire proprio alla rozzezza, dei sistemi di notazione numerica da essi adottati.

a) Il sistema arcaico. Seguendo una consuetudine assai diffusa nel mondo antico, anche i Greci -come testimoniano reperti risalenti al II millennio a.C.- usarono rappresentare i numeri naturali con tanti trattini o punti (o cerchi) uguali e posti gli uni di seguito agli altri. Ma poiché le facoltà umane di percezione immediata dei numeri (cioè il nostro potere naturale di percezione diretta di quantità di oggetti o segni) assai raramente sorpassano il numero quattro, per determinare di colpo con l'occhio cifre superiori i Greci (come altri popoli) ricorsero ad allineamenti o a simboli speciali per il cinque e impiegarono il principio quinario di numerazione (forse legato al calcolo digitale).

b) Il sistema acrofonico o attico o erodianoico. Durante la seconda metà del I millennio a.C. i Greci adottarono un sistema di rappresentazione numerica in cui, fatta eccezione per la barra verticale delle unità, le cifre non sono altro che le iniziali dei corrispondenti nomi greci (principio dell'acrofonia) e i numeri si esprimono ricorrendo al principio additivo.

I=1 ; Π (Pente) = 5 usato nella sua forma arcaica Γ; Δ (Deca) = 10 ;

H (Hécaton) =100 ; X (Chilioi) = 1000 ;M (Mýrioi) = 10'000

Per quintuplicare il valore delle lettere numerali era poi sufficiente metterle all'interno del simbolo di Pente:

$$\overline{\Pi} = 50 ; \overline{\Pi\Pi} = 500 ; \overline{\Pi X} = 5000 ; \overline{\Pi M} = 50000.$$

Questo sistema attico (cosiddetto in quanto usato ad Atene e nel suo territorio) è il più antico dei sistemi greci acrofonici di cui si abbia testimonianza ed ottenne una certa diffusione all'epoca della supremazia ateniese: ma ogni città-stato greca possedeva differenti sistemi. In quanto poi fu studiato e descritto dal grammatico bizantino Erodiano (sec. II d.C.), esso fu anche denominato 'sistema erodianoico'.

Questo sistema, che serviva ad annotare solo i numeri cardinali, fu usato in metrologia (pesi, misure, ecc.) ed ebbe un ruolo notevole nelle espressioni di somme monetarie. Su di esso si basa la 'Tavola di Salamina' (sec. V o IV a.C.), che è un àbaco (parola proveniente forse dal greco àbaks = tavola, oppure dal semitico Abq = sabbia o polvere, perchè esisteva anche un tipo d'àbaco in cui una tavoletta contornata da una cornice a bordi rialzati veniva riempita di sabbia fine sulla quale si scriveva o con le dita o con una punta) a gettoni o sassolini ('pséfoi' in greco; 'càculi' in latino) in cui

divisioni in più colonne parallele separavano i differenti ordini di unità: bisognava allora mettere nelle rispettive colonne tanti sassi o gettoni quante erano le unità dell'ordine numerico considerato (di solito già in base decimale). Aggiungendo, togliendo o riportando uno o più gettoni da una colonna all'altra si riusciva ad effettuare delle operazioni.

c) Il sistema alfabetico o ionico. Tenuto conto delle difficoltà inerenti al sistema acrofonico, tra i secoli V e IV a.C. i Greci, sulla falsariga della scrittura ieratica egizia, decisero di passare ad un sistema numerico di tipo alfabetico. In tal modo, come risulta proprio dai reperti documentari, lo studente mentre imparava a leggere apprendeva anche i numeri, poiché le lettere alfabetiche greche assumevano in tal modo anche un valore numerico, e come combinava le lettere per formar parole così imparava a combinare lettere numerali per scrivere numeri: che venivano distinti dalle parole usuali e dalle lettere ordinali mediante un trattino sovrastante. L'alfabeto numerale era composto dalle ventiquattro lettere dello alfabeto greco integrate da tre segni alfabetici caduti in disuso. In tutto dunque ventisette segni suddivisi in tre classi numeriche a base decimale: unità, decine e centinaia.

1 = $\alpha$ , <b>A</b> (alfa)	10 = $\iota$ , <b>I</b> (iota)	100 = $\rho$ , <b>P</b> (ro)
2 = $\beta$ , <b>B</b> (beta)	20 = $\kappa$ , <b>K</b> (kappa)	200 = $\sigma$ , <b>\Sigma</b> (sigma)
3 = $\gamma$ , <b>\Gamma</b> (gamma)	30 = $\lambda$ , <b>\Lambda</b> (lambda)	300 = $\tau$ , <b>T</b> (tau)
4 = $\delta$ , <b>\Delta</b> (delta)	40 = $\mu$ , <b>M</b> (mi)	400 = $\upsilon$ , <b>\Upsilon</b> (ypsilon)
5 = $\epsilon$ , <b>E</b> (epsilon)	50 = $\nu$ , <b>N</b> (ni)	500 = $\phi$ , <b>\Phi</b> (phi)
6 = $\zeta$ , <b>Z</b> (digamma)	60 = $\xi$ , <b>\Xi</b> (csi)	600 = $\chi$ , <b>X</b> (chi)
7 = $\zeta$ , <b>Z</b> (zeta)	70 = $\omicron$ , <b>O</b> (omicron)	700 = $\psi$ , <b>\Psi</b> (psi)
8 = $\eta$ , <b>H</b> (eta)	80 = $\pi$ , <b>\Pi</b> (pi)	800 = $\omega$ , <b>\Omega</b> (omega)
9 = $\theta$ , <b>\Theta</b> (theta)	90 = $\koppa$ , <b>\Q</b> (koppa)	900 = $\sampi$ , <b>\S</b> (sampi)

Per rappresentare i numeri intermedi si procedeva per addizione,

Ma la massima lettera numerale esprimibile in tal modo era  $\lambda \rho \theta = 999$ .

Per ampliare il campo di rappresentazione numerica si adottò l'espedito di contrassegnare le nove lettere-cifre delle unità con un accento in alto a sinistra per indicare le prime nove migliaia: e si arrivò così al numero  $\overset{\prime}{\theta} \lambda \rho \theta = 9999$ .

Giunti in tal modo alla Kiriade (diecimila), espressa con una  $\mu$  i Greci adottarono diversi sistemi per rappresentare i grandi numeri. Uno

consistette nell'annotare i 'multipli consecutivi' della miriade, cioè  $\overset{\alpha}{M} = 1$  miriade,  $\overset{\beta}{M} = 2$  miriadi, ecc. che consentiva di arrivare fino a  $\overset{\theta}{\lambda}{\varphi}{\varphi}$   
 $M = 9'999$  miriadi = 99990000. Un altro fu ideato da Archimede (sec.III a.C.), ma non incontrò il favore dei matematici greci. Venne invece adottato un procedimento proposto da Apollonio (sec. III-II a.C.) consistente nell'annotare le 'potenze successive' della miriade, cioè indicando con  $\overset{\alpha}{M}$  le miriadi prime (comprendenti tutti i multipli della miriade, cioè i numeri da 1 a  $9'999$  per  $10^4$ ), con  $\overset{\beta}{M}$  le miriadi seconde (comprendenti i multipli di una miriade di miriadi, cioè i numeri da 1 a  $9'999$  per  $10^8$ ), ecc.: ecco un esempio in tal senso trasmessoci da Pappo (sec. III-IV d.C.)

$$\overset{\gamma}{M} \text{ '}\epsilon\nu\xi\beta \text{ και } \overset{\beta}{M} \text{ '}\gamma\chi \text{ και } \overset{\alpha}{M} \text{ '}\zeta\nu =$$

$$= 10^{12} \cdot 5'462 \text{ pi\`u } 10^8 \cdot 3'600 \text{ pi\`u } 10^4 \cdot 6'400 = 5'462'360'064'000'000.$$

Scrivete G. Ifrah a proposito dell'alfabeto numerale greco: "Dall'Antichità alla fine del Medioevo, la numerazione greca alfabetica ebbe, in Medio Oriente e in generale nel Mediterraneo orientale un ruolo altrettanto importante di quello avuto dal sistema latino nell'Europa occidentale".

L'attribuzione di valori numerici alle lettere di un alfabeto ha favorito anche strani procedimenti per cui, secondo il valore numerico ottenuto con le lettere costitutive, si mettevano in corrispondenza parole o nomi diversi. Sembra che i Greci ai siano messi abbastanza tardi a compiere queste strane elucubrazioni sui valori numerici (e denominarono tale procedimento come isopsefia = parità di conto o calcolo), soprattutto da quando vennero in contatto col pensiero ebraico (che denominava il procedimento come ghematria = calcolo alfabetico, forse dal greco gheometricòs arithmòs = numero geometrico). Tali procedimenti trovarono comunque applicazione nella letteratura esoterica (gnosi, cabala, divinazione, ecc.) ma anche in quella mistico-religiosa del mondo antico, medioevale e anche moderno.

Un Padre della Chiesa mostrava ad esempio l'equivalenza numerica tra i nomi Theòs (Dio), Àghios (Santo), Agathòs (Buono) - ciascuno uguale a 284 - e quindi la loro reciproca adeguazione.

Significative sono pure le elucubrazioni fatte sul numero 666 che S. Giovanni attribuisce nell'Apocalisse (XIII,18) alla "Bestia" (espressione tipologica dell'Anticristo), senza tuttavia precisare il corrispondente sistema alfabetico numerale. Da ciò le più fantastiche divagazioni. Qualcuno trovò ad esempio che quel numero corrispondeva, nel sistema ebraico, a 'Cesare Nerone', l'imperatore romano persecutore dei cristiani; altri trovarono che, nell'alfabeto numerale latino, equivale al nome di 'Diocleziano Augusto', altro persecutore di cristiani; in greco poi altri ancora videro che 'Lateinos' (cioè la razza latina) dava lo stesso valore. Nel Cinquecento, P. Bonghi osservò che in latino 'Luthernum' (Martin Lutero) vale proprio 666; ma i Luterani replicarono che tale numero si ottiene anche se si prendono le cifre romane dell'espressione 'Vicarius Filii Dei' (Vicario del Figlio di Dio).

È curioso infine che in chiusura dei manoscritti medioevali invece dell'usuale Amen si trovi talvolta l'equivalente numero 99. Ma ancor più ironica è la scritta trovata a Pompei in cui si legge: "Io amo colei il cui numero è 545".

### 3. La forma pitagorica di aritmetica

È tra i Greci delle colonie ioniche dell'Asia Minore che si possono riconoscere gli inizi di un nuovo tipo di atteggiamento culturale - di carattere filosofico e scientifico - comprendente anche l'interesse per l'aritmetica.

Talete (sec. VII-VI a.C.), di Mileto, considerando - secondo quanto dice di lui la tradizione - problemi di carattere astronomico (come la determinazione della durata dell'anno o degli equinozi o della misura apparente del sole, ecc.) dovette in realtà affrontare questioni di carattere aritmetico. E dal momento che la tradizione lo considera come tramite di influssi egiziani e caldei, non suona strano che Giamblico (sec. III-IV d.C.) gli abbia attribuito una definizione di numero legata appunto alla tradizione egiziana.

Ma il luogo ove realmente si può dire che sia nata 'aritmetica' è la Magna Grecia e precisamente la Scuola Pitagorica. Dell'attività matematica di Pitagora (sec. VI a.C.), nato a Samo nella Ionia ma poi insediatosi a Crotona (Calabria), nonché della più antica scuola pitagorica nulla si sa con certezza. Solo la seconda generazione di Pitagorici abbandonò almeno parzialmente la primitiva politica di segretezza che era propria della scuola e cominciò a divulgarne le conoscenze: abbiamo così frammenti e

testimonianze soprattutto riguardo a Filolao (sec.V-IV a.C.) e Archita (sec. IV a.C.). Da tali pur frammentarie indicazioni risulta che a quell'epoca l'arithmetikè technè (l'arte aritmetica) era già praticamente costituita nelle sue parti essenziali e inoltre che le conoscenze aritmetiche dei pitagorici erano maturate e si presentavano in un contesto di concezioni filosofiche o di teoria musicale.

Che il Pitagorismo fosse essenzialmente una filosofia di tipo matematico in cui il numero occupava un posto essenziale è ben testimoniato dal seguente brano tratto da Aristotele (sec. IV a.C.): "I Pitagorici per primi si applicarono alle matematiche e le fecero progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i principi di queste fossero principi di tutti gli esseri. E poiché nelle matematiche i numeri sono per loro natura i principi primi e appunto nei numeri essi ritenevano di vedere, più che nel fuoco, nella terra e nell'acqua, molte somiglianze con le cose che sono e che divengono...; e inoltre poiché vedevano che le note e gli accordi musicali consistevano nei numeri; e infine poiché tutte le altre cose, in tutta la realtà, parava a loro che fossero fatte a immagine del numeri e che i numeri fossero ciò che è primo in tutta quanta la realtà, pensarono che gli elementi del numero fossero elementi di tutte le cose e che tutto quanto l'universo fosse "armonia e numero" (Aristotele, La metafisica, I.5. 985 b 23 - 986 a 3; cfr. tr. it. a cura di C.A.Viano, Torino, Utet, 1974, p. 197). Tra le numerose informazioni che questo passo aristotelico ci fornisce intendiamo soprattutto sottolineare come i Pitagorici arrivarono a porre il numero come principio di tutte le cose, passando dagli elementi primigeni al numero e poi dal numero a tutte le cose. Ora, gli elementi primigeni o principi supremi sono l'illimitato e il limitante: da esse hanno origine i numeri, i quali sono la sintesi dell'uno e dell'altro elemento, ma una sintesi tale che vede nel proprio seno e precisamente nella serie pari (avente attributi femminili) un prevalere dell'elemento illimitato e nella serie dispari (immaginata con attributi maschili e dotata del carattere della divinità) un prevalere dell'elemento limitante. Quanto poi al problema della derivazione delle cose dai numeri, bisogna anzitutto segnalare il carattere arcaico del modo pitagorico di pensare i numeri. Il numero veniva rappresentato infatti come un insieme di sassolini o disegnato come un insieme di punti: presentava dunque il duplice aspetto di numero e di figura; era concepito come collezione di più unità; era fornito di effettiva realtà e di figura e quindi non era privo di dimensioni; era circondato da spazio vuoto. Con tali punti-unità i Pitagorici poterono costruire una aritmo-

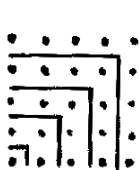
geometria (come la denominò A.Rey) in cui il numero veniva visto come una figura solida e che si riferiva soltanto ai numeri naturali. Nella concezione pitagorica i numeri, essendo ritenuti spazialmente determinati come le cose, erano posti sul medesimo piano di realtà di esse.

Il tipo di rappresentazione numerico-geometrica sembra sia stato suggerito ai Pitagorici dall'osservazione delle stelle e delle costellazioni celesti. È certo comunque che esso consente in modo singolare di illustrare recondite proprietà dei numeri ricorrendo alla forma delle figure geometriche. Il riferimento a quello strumento didattico che è il cosiddetto 'geopiano' risulta del tutto immediato.

Vogliamo ora illustrare con un esempio come fu forse possibile ai Pitagorici scoprire certe proprietà dei numeri utilizzando la rappresentazione per punti.

Abbiamo già avuto modo di notare come gli Antichi trovassero basilare la distinzione tra numeri pari e dispari. Furono dunque detti 'pari' tutti quei numeri che potevano essere divisi in due parti esattamente uguali: sia in quantità (poiché dal dimezzamento di essi si ottengono due numeri uguali fra di loro), sia in qualità (poiché le due metà in cui il numero risulta diviso sono o tutte e due pari o tutte e due dispari).

Se ora si parte dall'unità e si aggiunge man mano la serie crescente dei numeri dispari si vede che, a qualunque numero ci si arresti, la somma dell'unità e dei successivi numeri dispari costituisce un numero che è un 'quadrato'. Possiamo rappresentare la cosa sia con i punti che con i numeri:



$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 4 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 9 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 16 + 9 = 25 = 5^2$$

Notata la caratteristica costruttiva, è possibile ad esempio ricavare da essa una definizione per i numeri 'dispari': ogni numero che risulta come differenza tra due numeri quadrati consecutivi.

E si ha pure un'altra conseguenza: se un numero dispari è un quadrato perfetto, allora è possibile trovare due numeri (naturali, per i Pitagorici) che soddisfino alla relazione  $a^2 - b^2 = c^2$ . Si vede subito che tale espressione corrisponde al Teorema di Pitagora ed è soddisfatta ad esempio dalla terna di numeri 3,4,5.

Ma si può ancora osservare che ogni numero ‘quadrato’ può essere ottenuto aggiungendo un opportuno numero dispari al quadrato immediatamente precedente. Infatti  $4 = 1 + 3$  ;  $9 = 4 + 5$  ;  $16 = 9 + 7$  ;

$25 = 16 + 9$  e così di seguito: avendo in generale  $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$ .

Ma è proprio dalla rappresentazione per punti (o sul geopiano) che ci viene suggerita l'idea che la legge di formazione dei successivi numeri quadrati è soltanto un caso particolare della formula algebrica che fornisce il quadrato di un binomio somma, infatti  $(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$ .

Concluderemo mettendo in evidenza alcune caratteristiche dell'aritmetica pitagorica. Anzitutto, come si è visto, dalla raffigurazione e denominazione geometrica dei diversi tipi di numeri (triangolari, poligonali, quadrati, cubi, ecc.) deriva la possibilità di riconoscere alcune loro proprietà. Inoltre, i numeri, come risulta da alcuni nomi che venivano loro dati (ad esempio: numeri perfetti, numeri amici, ecc.), venivano concepiti come dotati di un valore simbolico-magico, che faceva assumere alla matematica una fisionomia spiccatamente mistico-religiosa. Il profondo legame tra numeri e cosmo faceva poi attribuire significato astronomico a certe conoscenze matematiche, come lo studio delle proporzioni (e in particolare delle tre medietà: aritmetica, geometrica e armonica). Proprio in dipendenza del carattere filosofico-religioso di tale concezione aritmetica venne invece trascurata dai Pitagorici la loghistiche téchne (l'arte logistica), cioè il calcolo numerico effettivo.

#### 4. La configurazione geometrica dell'aritmetica

Come abbiamo detto, i Pitagorici pensavano che la realtà fisica fosse costituita da punti-unità indivisibili. Questo comportava che il punto-unità avesse in realtà le dimensioni di un vero e proprio segmentino e che quindi rappresentasse di fatto il minimo sottomultiplo comune di ogni misurazione. Se ad esempio i Pitagorici dovevano confrontare la misura di due segmenti, una volta compiuta la riduzione ai minimi termini, ottenevano una frazione  $\frac{m:n}{}$ , dove m ed n indicavano il numero di punti unità che costituivano rispettivamente ciascuno dei due segmenti. Ora, una frazione può dare origine o a numeri interi o a numeri decimali, ma solo finiti o illimitati periodici. Mai comunque ne sarebbe risultato un decimale illimitato non periodico (cioè un irrazionale): ente numerico affatto inesistente per la concezione pitagorica del numero.

Eppure tra la più importanti acquisizioni matematiche dei Pitagorici vi è anche la scoperta dell'incommensurabilità tra la diagonale e il lato del

quadrato. A tale risultato essi giunsero certamente per via di un ragionamento, dal momento che si tratta di cosa che trascende ogni possibilità di sperimentazione e di misurazione. L'effetto di una tale scoperta fu tanto sconvolgente da mettere in crisi la concezione pitagorica, inducendo in particolare ad abbandonare sia la opinione della corrispondenza tra aritmetica dei numeri naturali e geometria sia la visione dimensionale e concreta del punto-unità in favore di una concezione adimensionale ed astratta del punto.

Riguardo alla dimostrazione pitagorica dell'incommensurabilità tra la diagonale e il lato del quadrato, Platone (sec. V-IV a.C.) in un dialogo di chiara ispirazione pitagorica presenta Socrate nell'atto di proporre ad un giovane di nome Menone (da cui il dialogo platonico stesso prende titolo) un problema di geometria: costruire un quadrato doppio di un altro dato. In un primo tempo il problema della duplicazione del quadrato viene affrontato con mezzi puramente aritmetici, ricercando in sostanza se vi sia un numero intero che elevato al quadrato sia uguale a due e concludendo naturalmente che un numero siffatto non esiste. In un secondo momento si dimostra poi che la diagonale del quadrato è la soluzione esatta del problema posto. Il fatto che un problema fosse risolvibile geometricamente e non avesse invece soluzione aritmetica indicava a sufficienza che l'aritmetica dei numeri interi era inadeguata ad esprimere tutto quanto accadeva nel campo della geometria. Era naturale allora che diventasse prevalente in Grecia il punto di vista geometrico: come più universale e dotato di maggiore forza dimostrativa.

Più attendibile sembra invece ad alcuni storici della matematica l'opinione espressa da Aristotele e da altri secondo cui i Pitagorici avrebbero conseguito la dimostrazione rigorosa e completa di tale incommensurabilità con un ragionamento 'per assurdo': se la diagonale e il lato del quadrato sono tra loro commensurabili, allora ogni numero può essere simultaneamente pari e dispari (il che è assurdo). Se infatti la diagonale e il lato di un quadrato sono commensurabili, allora il loro rapporto può essere espresso dalla frazione  $\frac{m}{n}$ , essendo  $m$  ed  $n$  numeri interi. Poiché la frazione può essere presa già ridotta ai minimi termini,  $m$  ed  $n$  saranno primi fra di loro: perciò se uno è pari l'altro deve essere dispari. Applicando il Teorema di Pitagora ad un triangolo rettangolo isoscele avente come ipotenusa  $m$  e come cateti  $n$  si ottiene la relazione  $m^2 = n^2 + n^2 = 2n^2$ . Da essa si ricava che il numero  $m$  è pari, essendo doppio di  $n$ ; quindi anche  $m$  sarà pari, essendo impossibile che il quadrato di un numero dispari risulti pari.

Da quanto si è detto, se  $\underline{m}$  è pari allora si potrà concludere che  $\underline{n}$  dovrà essere dispari. Se dunque  $\underline{m}$  è un numero pari risulterà divisibile per due e si potrà quindi avere la relazione  $m = 2m_1$  che sostituita nella relazione pitagorica precedente darà  $(2m_1)^2 = 2n^2$ , ossia  $4m_1^2 = 2n^2$ , da cui  $2m_1^2 = n^2$ . Ora, quest'ultima espressione significa che  $n^2$  è pari e quindi anche  $\underline{n}$ . Ma ciò è assurdo, poiché poco sopra avevamo concluso che  $n$  era dispari, né può essere che un numero  $n$  qualunque  $\underline{n}$  (che non sia l'unità, per i Pitagorici) sia nel contempo pari e dispari. Dunque, è falsa l'ipotesi di partenza, cioè che la diagonale e il lato del quadrato sono commensurabili. La scoperta di grandezze incommensurabili convinse i Greci a concepire gli enti matematici come dotati di natura astratta e razionale, da esprimere mediante concetti dotati di significato particolare e ben definito, che li caratterizzasse rispetto sia al significato che all'uso che essi potevano avere nel linguaggio comune. Ma li convinse anche della funzione più rigorosamente dimostrativa e del valore più universale del linguaggio geometrico: fu così che anche l'aritmetica assunse una forma del tutto geometrica.

Massima espressione della forma geometrica assunta dall'aritmetica sono i cosiddetti "libri aritmetici" contenuti negli Elementi di Euclide (sec. IV-III a.C.): cioè i libri VII, VIII e IX. In questi libri vengono considerati solo i numeri interi positivi, che vengono rappresentati da segmenti: cosa sempre possibile, mentre la scoperta degli incommensurabili aveva mostrato non essere sempre vero il contrario. La terminologia usata diventa pertanto squisitamente geometrica e invece di espressioni come 'è multiplo di' o 'è un fattore di' si trovano rispettivamente le espressioni 'è misurato da' o 'misura'.

Ma vi è un altro importantissimo aspetto da considerare: l'aritmetica euclidea si presenta come 'teoria dei numeri' (non calcolo né concezione filosofica) in cui vengono studiate la natura e le proprietà dei numeri naturali. Il libro VII si apre con la seguente definizione: "Unità è ciò per cui ogni ente è detto uno"; e poi soggiunge: "Numero è una pluralità composta di unità". Da ciò risulta che nell'aritmetica euclidea l'unità è ancora un concetto primitivo (che sembra alludere ad una specie di idea platonica: ogni cosa è detta una se partecipa dell'idea di unità), ma non è un numero, il quale invece è costituito da una pluralità di unità e non da un singolo elemento. Poco più oltre però, alla definizione undicesima, si dichiara invece che "numero primo è quello misurato (=diviso) soltanto dall'unità": con ciò si ammette l'unità tra i divisori ma si esclude come

divisore il numero stesso. In conclusione, l'unità viene accettata come divisore ma non come quoziente.

L'esclusione della divisione di un numero per sé stesso è forse legata alla successiva definizione ventiduesima dedicata al 'numero perfetto' definito come "quello che è uguale alla somma delle proprie parti (=dei suoi divisori)": che non può quindi comprendere il numero stesso. Come si sa, la considerazione di questo tipo di numeri ricopriva un ruolo importante nella tradizione matematica pitagorica. Ebbene, la regola per trovare i numeri perfetti viene fornita da Euclide proprio nell'ultima proposizione dell'ultimo libro aritmetico (cioè nel Libro IX, Proposizione 36) come scopo finale di tutti e tre i libri, La regola euclidea ha fornito i quattro numeri perfetti già noti anche ai Greci: cioè 6; 28; 496; 8128. Oggi si conosce una ventina di tali numeri e sono tutti pari, cioè 'euclidei'; ma è ancora senza risposta la questione se esistano o no numeri perfetti dispari.

## 5. Il riemergere dell'aritmetica

La crisi aperta nel Pitagorismo dalla scoperta di grandezze incommensurabili aveva avuto come conseguenza di far assurgere la geometria al rango di disciplina che assorbiva in sé ogni altra branca della matematica. Nel tardo periodo ellenistico e soprattutto con l'inizio dell'era volgare si assistette però a mano a mano al rinascere dell'aritmetica (e anche dell'algebra) come discipline indipendenti dalla geometria.

Questa nuova linea di tendenza risultò chiara soprattutto nelle opere di Nicomaco (sec. I-II d.C.) di Gerasa e del suo contemporaneo Teone di Smirne; manifestandosi poi nel suo culmine con Giamblico di Calcide, con Diofanto soprattutto e infine con Domnino di Larissa,

L'opera di Nicomaco intitolata Eisagoghè arithmetikè (Introduzione all'aritmetica), a noi pervenuta in due libri che però rappresentano forse la versione abbreviata di un più ampio trattato, era deputata a presentare quegli elementi di matematica che erano ritenuti essenziali alla comprensione della filosofia pitagorica e platonica.

Opera assai poco originale, l'Introduzione di Nicomaco si presenta come una 'arithmetichè téchne', appartiene cioè al genere delle 'téchnai' (arti): esposizioni sistematiche, con intenti pratici, dei principi delle varie arti o scienze. Il trattato nicomacheo, appartenente dunque ad un genere assai comune nel mondo antico, costituì il manuale standard d'aritmetica per un migliaio d'anni a motivo della sua chiarezza, compendiosità, ordine e adattabilità all'uso scolastico.

L'opera di Nicomaco è significativa anche perché esprime il contenuto matematico dell'ars arithmetica greca (che costituiva una parte soltanto - come fin qui abbiamo mostrato - di quello che i Greci intesero per 'aritmetica'). Anzitutto in essa non si trovano (come in Euclide, ad esempio) proposizioni rigorosamente dimostrate, ma solo l'enunciazione e l'illustrazione dei principi, nonché la tipologia e la classificazione degli enti numerici enunciati, inquadrati in talvolta prolisse considerazioni di carattere filosofico. I due libri dell'opera di Nicomaco in particolare presentano i seguenti contenuti: introduzione filosofica, i numeri assoluti o per sé, i numeri relativi (multipli e sottomultipli), i numeri piani e solidi, le proporzioni,

Gli storici hanno sottolineato la presenza nell'opera di Nicomaco di una osservazione che, opportunamente generalizzata, conduce al teorema secondo cui un qualunque cubo può essere ottenuto come somma di un certo numero di termini di una progressione aritmetica. Il Larisseo infatti nota (Libro II, cap. XX) che se si considera la progressione dei numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc. in essa si possono raggruppare i numeri in modo tale che le somme successive rappresentino cubi dei successivi numeri interi:  $(1)^3 = 1$  ("cubo potenziale");

$$(3+5) = 8 = 2^3; \quad (7+9+11) = 27 = 3^3; \quad (13+15+17+19) = 64 = 4^3; \text{ ecc.}$$

Questa osservazione, unitamente al fatto, riconosciuto dai primi pitagorici, che la somma dei primi  $n$  numeri dispari è  $n^2$ , portava alla conclusione che la somma dei primi  $n$  cubi perfetti è uguale al quadrato della somma dei primi  $n$  interi.

Intorno alla vita di colui che portò l'aritmetica e l'algebra antiche alla loro più alta espressione, cioè intorno a Diofanto, vissuto probabilmente ad Alessandria d'Egitto tra il III e il IV secolo d.C., ci è stato tramandato soltanto un epigramma - attribuito a Metrodoro (sec. VI d.C.) di Bisanzio - riportato in una raccolta dal titolo di "Antologia Greca" (sec. X d.C.) da cui risulterebbe che questo matematico sarebbe vissuto fino all'età di 84 anni: "Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita ( $84:6=14$ ); dopo un altro dodicesimo le sue guance si coprirono di barba ( $14+7=21$ ); dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio ( $21+12=33$ ) e dopo cinque anni gli nacque un figlio ( $33+5=38$ ). Ma questi - fanciullo disgraziato e pur tanto amato! - aveva appena raggiunto la metà dell'età e cui doveva arrivare suo padre ( $84:2=42$ ), quando morì.

Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore coll'occuparsi della scienza dei numeri, attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza (80+4=84)". Il problema può trovare espressione algebrica nell'equazione di primo grado  $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$  ovvero  $\frac{9}{84}x = 9$ , d'onde  $x = 84$ .

Di lui ci è rimasto anzitutto un brevissimo trattato, forse incompleto, intitolato Peri polygònōn arithmòn (Sui numeri poligonali): l'argomento, di chiaro stampo pitagorico, era affatto tradizionale tra i matematici greci; ma in Diofanto la trattazione, assai più rigorosa, segna un progresso.

Ma soprattutto è degna di menzione un'altra di Diofanto, intitolata Arithmetikà (Le aritmetiche). Originariamente suddivisa in tredici libri, a noi sono giunti solo i primi sei e parte del settimo: ma diversi motivi inducono a pensare che fin dall'antichità la materia sia stata raccolta in un'esposizione più sintetica - quella a noi giunta - che quindi potrebbe contenere anche assai più della metà dell'opera. Una versione araba medioevale dei Libri IV-VII, pubblicata nel 1975, sembra essere piuttosto un commento talvolta assai prolisso del testo originale e risulta assai differente per la materia trattata e per lo stile espositivo stesso.

L'opera non si presenta come un trattato sull'argomento, ma come una collezione di oltre 150 problemi formulati in maniera astratta, ma risolti in termini di esempi numerici specifici. Il contenuto matematico si può nel linguaggio algebrico moderno dire esser quello di equazioni e sistemi, determinati e indeterminati, fino al quarto grado. Delle equazioni indeterminate Diofanto ricercava le soluzioni intere o razionali, ma positive solo. Tra i metodi utilizzati, noteremo la ricerca di un'approssimazione ottimale dei numeri irrazionali mediante i razionali.

Infine, riguardo al problema dell'originalità dell'opera di Diofanto, noteremo che lo stesso matematico alessandrino non presenta la sua opera come qualcosa di assolutamente nuovo, ma come un lavoro di compilazione, sia pure assai rigoroso ed altamente elaborato. Alcuni studiosi hanno ritenuto che la cultura aritmetica di Diofanto riveli la presenza nella matematica greca di un filone aritmetico, mai estintosi dai tempi di Pitagora in poi anche se a noi sono giunte pochissime testimonianze di esso, soffocato quasi dalle ricerche geometriche. Altri preferiscono far riferimento ad influenze orientali e in particolare indiane, che avrebbero cominciato a manifestarsi nella matematica greca poco prima di Diofanto, la cui opera sarebbe proprio il primo grande frutto

dell'incontro tra queste due tradizioni matematiche così profondamente diverse.

Notevole fu l'influsso di Diofanto sugli algebristi, sia arabi che moderni, per cui più che come 'fondatore' dell'algebra egli è forse da giudicare come un 'precursore'.

## 6. Riferimenti bibliografici

a) Strumenti e fonti:

- C. Daremberg e E. Saglio (a cura di), Dictionnaire des Antiquités grecques et romaines, ed. orig. Paris 1877, rist. anast. Graz 1969, vol. I/1: alle voci "Abacus" (E. Guillaume), pp. 1-3 e "Arithmetica" (C.E.Ruelle), pp. 425-431.
- Nicomachi Geraseni Pytagorei introductionis aritmeticae libri duo (greco e latino), a cura di R.Hoche, Leipzig, B.G.Teubner, 1866.
- Nicomachus of Gerasa, Introduction to arithmetic, tr. inglese di M. L.D'Ooge e studi di F.E.Robbins e L.C.Karpinski, Kew York, Macmillan, 1926.
- Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis (greco e latino), a cura di P.Tannery, Leipzig, B.G.Teubner, 1893, vol. 2.
- T.L.Heath, Diophantus of Alexandria, ed. orig. II New York 1919; rist. New York, Dover, 1964.
- Diophante d'Alexandrie, Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones, tr. francese e note di P. Ver Eecke, Paris, A.Blanchard, 1959.

b) Scritti storiografici:

- G. Loria, Le scienze esatte nell'antica Grecia, ed. II, Milano, U. Hoepli, 1914, soprattutto pp. 737-953.
- A. Natucci, Il concetto di numero e le sue estensioni, Torino, F.Ili Bocca, 1923.
- U. Caseina, Calcolo numerico, Bologna, N. Zanichelli, 1928.
- P.Cajori, A history of mathematical notations, La Salle - Illinois, Open Court, 1928-29. vol. 2.
- J.A.Sanchez Perez, La aritmética en Grecia, Madrid, Instituto Jorg Juan, 1947.
- E.Picutti, Sul numero e la sua storia, Milano, Feltrinelli, 1977.
- G. Ifrah, Storia universale dei numeri, ed. orig. Paris 1981, tr. it. Milano, A. Mondadori, 1983.
- P. Pizzamiglio, La storia della matematica (Introduzione. La matematica nel mondo antico), Milano, I.S.U. - Università Cattolica, 1985.

## RIFLESSIONI SULL'INSEGNAMENTO DELL'ANALISI MATEMATICA

*Giovanni Prodi*

Convegno in memoria di Modesto Dedò  
Milano, 16 dicembre 1991

### **1- Premessa.**

Gli elementi di analisi matematica sono il punto culminante dell'insegnamento della matematica negli Istituti Tecnici e nel Liceo Scientifico e, per molti indirizzi, costituiscono il pezzo forte del tema di maturità; tuttavia negli incontri dedicati all'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore se ne parla raramente. Credo di poter motivare questo silenzio con la mancanza di grosse preoccupazioni; a mio parere, gli elementi di analisi matematica pongono problemi didattici assai minori della geometria e di fatto vengono insegnati in modo abbastanza soddisfacente, almeno in paragone ad altri temi di carattere più elementare. Non mancano libri di testo efficaci e corretti; l'analisi matematica si presta anche bene, in un certo senso, a "mettere una pietra sul passato". Voglio dire che non esige molte conoscenze precedenti: basta un po' di scioltezza nel calcolo algebrico. Questo è indubbiamente uno dei motivi per cui l'argomento è in auge nel tema di maturità. Nella distinzione, tuttora vigente, fra "matematica elementare" e "matematica superiore", gli elementi di analisi fanno già parte del livello "superiore", e ciò è gratificante sia per gli allievi che per gli insegnanti.

Malgrado questi elementi tranquillizzanti, penso che sia importante riflettere sulla didattica dell'analisi matematica. Lo richiedono anche i programmi che stanno per entrare in vigore, i quali prevedono qualche elemento di analisi matematica per ogni indirizzo della scuola secondaria superiore. Non a caso ho confrontato l'analisi matematica con la geometria. Come è noto, per secoli la geometria euclidea è stata un modello ineguagliato di rigore; la nuova analisi matematica, sorta con la fine del '600 poteva ben vantare i suoi successi strepitosi "sul campo", ma era fragile dal punto di vista del rigore, tanto che i suoi scopritori (in particolare Newton) si cautelavano rivestendola, per quanto possibile, di panni geometrici. Poi, come tutti sanno, nel secolo XIX l'analisi acquista un più ineccepibile rigore, così che, verso la fine del secolo, le parti tradizionali si

invertono: è, in un certo senso, la nuova analisi che conduce un severo processo alla geometria. Ciò che dobbiamo constatare a livello didattico è che molte nozioni elementari di geometria sono impregnate di fatti matematici che riguardano la continuità. Un paio di esempi basteranno; a) la nozione di poligono (non convesso) come insieme dei punti interni ad una linea spezzata (il teorema di Jordan, che c'è sotto, è un vero osso duro) b) la distinzione fra isometrie (o affinità, o similitudini) di tipo diretto e inverso. (La distinzione più naturale fra i due tipi si fonda ovviamente sulla continuità). Quello che più strida in questi discorsi è il contrasto fra intuizione e rigore. Da un lato, l'introduzione di un'idea di moto, anche in geometria, facilita molto la comprensione dei concetti e la risoluzione dei problemi, dall'altro questa idea di moto ci richiama i concetti di analisi matematica e di topologia, che sono, in taluni casi, di non facile sistemazione. Ma è opportuno ora condurre un esame più approfondito ed "interno" di questi concetti dell'analisi matematica.

## 2- Idee e metodi dell'analisi

Il termine "analisi" non ci aiuta molto: esso indica, come si sa, un procedimento risolutivo che consiste nel supporre già nota la soluzione di un problema e nel cercare di individuarla attraverso un esame delle sue proprietà. In questo senso, il procedimento di analisi è contrapposto a quello di sintesi, che consiste nel costruire direttamente la soluzione, come si fa appunto nella geometria che è detta sintetica. Ma nell'uso il termine di analisi matematica ha preso un altro significato, riguardante un particolare metodo con cui l'analisi stessa viene prevalentemente condotta. Precisamente, vengono classificati nell'analisi matematica quei procedimenti matematici che coinvolgono, in qualche forma, l'infinito. Se abbiamo spirito poetico, possiamo accettare la definizione data da Hilbert (nel suo celeberrimo articolo del 1925), di analisi matematica come *sinfonia dell'infinito*.

È importante allora non limitarsi all'esame dei temi specifici dell'analisi (successioni, continuità, calcolo differenziale ed integrale...) ma esplorare le radici dell'analisi, facendo un inventario dei primi punti in cui l'idea di infinito è essenziale. Da quanto mi risulta, io sarei disposto a sostenere queste tesi, che appaiono in una certa contrapposizione dialettica: \* L'idea di infinito non si può catalogare (per dirla con Fischbein) fra le "intuizioni primarie". Essa ha indubbiamente una radice culturale, gli

etnologi ci parlano di popolazioni primitive che non hanno l'idea della infinità, ma si arrestano ad un giudizio vago di numerosità.

\*\* Tuttavia l'idea dell'infinito, non appena suscitata, si instaura con spontaneità nella mente, così da apparire del tutto naturale.

Cerchiamo di chiarire questa seconda tesi. È facile che un bambino di seconda elementare pensi che esiste un numero più grande di tutti, oppure che un ragazzino della scuola media ritenga che un segmento si possa suddividere in mille intervallini e non in un numero maggiore. Ma una volta che il genitore o l'insegnante hanno mostrato la fallacia di queste opinioni, la tesi corretta si instaura senza difficoltà e senza più ritorno alle opinioni ingenuie di prima.

Sembra che l'azione del docente consista più nel precisare il livello del discorso (distogliendo l'allievo da un rozzo realismo che ovviamente escluderebbe l'infinito) che non nel suscitare l'idea stessa di infinito.

Mi pare di poter fare analoghe osservazioni per quello che riguarda le successive acquisizioni sull'infinito a livello degli studi universitari. Non mi è mai capitato di trovare allievi perplessi circa le definizioni riguardanti la teoria della cardinalità (per gli ordinali ho minore esperienza, poiché il loro impiego nella matematica corrente è assai minore). Naturalmente, secondo le capacità degli allievi variano le possibilità di trarre profitto da queste nozioni, o di scoprirne le conseguenze e le applicazioni, ma mi pare identica la naturalezza nell'accettazione. Lo sforzo dell'insegnante, se mai, sembra debba rivolgersi a mostrare come siano originali queste definizioni, e quanto sia stato lungo, nella storia della scienza, il cammino per pervenirvi.

Vorrei insistere su un altro aspetto importante: in matematica l'infinito porta a semplificazioni di pensiero a cui la nostra mente tende spontaneamente. Riflettiamo, ad esempio, come sarebbe impensabile una retta in cui non ammettessimo più la indefinita divisibilità: potremmo pensare a punti intervallati regolarmente, come molecole in un cristallo, ma allora avremmo una misteriosa lunghezza privilegiata; oppure potremmo pensare a punti disposti in modo caotico, ma allora sarebbe ben difficile concepire le traslazioni della retta in sé. Se poi chiediamo alla retta la proprietà della completezza, allora non basta che la retta sia un insieme infinito, ma deve essere di un'infinità non numerabile: la prima bellissima dimostrazione della non numerabilità del continuo, che è contenuta in una lettera indirizzata da Cantor a Dedekind, si basa in modo diretto sulla

completezza. Sulla “semplicità dell’infinito” potrei anche fornire questo tipo di argomentazione: il confronto fra l’analisi infinitesimale ordinaria e l’analisi discreta (quella, per intenderci, basata sulle differenze finite). Quelli che sostengono - anche in virtù della diffusione dei calcolatori - l’opportunità di eliminare l’analisi matematica classica a favore di quella discreta dovrebbero almeno rendersi conto che questa è notevolmente più difficile della prima. Insomma, chi non vede l’infinito come già interno alla natura delle cose (con un realismo di secondo livello) deve almeno rendersi conto che i procedimenti di tipo infinito sono modi di pensare che la nostra mente fa propri molto volentieri, anzi di cui non può più fare a meno. Viene in mente quella frase di Hilbert, dell’articolo citato, espressa con il medesimo afflato lirico “*nessuno potrà scacciarci dal Paradiso che Cantor ha aperto per noi...*”.

### 3 - La didattica spicciola

Tralasciamo i problemi didattici relativi alle motivazioni dei concetti fondamentali dell’analisi: sarebbe far torto alla competenza degli insegnanti l’insistere sul concetto di velocità, sulla costruzione della tangente ecc.... Mi limiterò a deplorare come spesso nell’insegnamento queste nozioni siano viste in modo separato, con argomentazioni e inquadramenti che rimangono distanti (ma questo è solo un caso particolare di quel “divide et impera” che è una delle caratteristiche dell’insegnamento tradizionale). Veniamo dunque alla didattica degli aspetti logico-formali dell’analisi, cioè allo schema “ $\epsilon, \delta$ ” che si ripete in tutte le definizioni di base. Si tratta dello schema “per ogni..., esiste...”; la difficoltà non è tanto di capire alla lettera il discorso, quanto di capire che questo discorso è l’unica traduzione accettabile dell’idea intuitiva di limite. Veramente, l’idea intuitiva di limite viene dalla nostra definizione molto purificata e generalizzata. Infatti, nell’idea intuitiva di limite c’è l’idea di un avvicinamento indefinito (questa connotazione è sempre presente quando c’è un movimento intenzionale: si dice che si tende ad una meta, anche se si è consapevoli che non la si potrà mai raggiungere; ma da questo punto di vista, apparirebbe strano un moto fatto di oscillazioni smorzate che diventano sempre più piccole...). L’insegnante, naturalmente, deve essere consapevole del motivo per cui la definizione di limite per le funzioni non esige il carattere monotono, anche se, in quasi tutti gli esempi correnti, la tendenza al limite è di tipo monotono. Il fatto è che la somma di due funzioni monotone non è sempre monotona. Perciò una definizione di

limite che esigesse la monotonia delle funzioni ci metterebbe nei pasticci nei teoremi che riguardano le proprietà algebriche dell'operazione di limite.

Comunque, per l'insegnante si pongono seri problemi di linguaggio; è naturale che si dica "quando  $x$  si avvicina ad  $x_0$ ,  $f(x)$  si avvicina ad  $l$ "; tuttavia questa frase deve essere accompagnata da un commento estensivo su quel secondo "si avvicina"; come per dire che si può vincere la guerra anche perdendo qualche battaglia!

Certamente, una delle maggiori difficoltà per la comprensione della nozione di limite è che, mentre nel concetto di funzione c'è una "consecutio" che va dalla variabile indipendente alla variabile dipendente (tanto che, in non pochi casi, alla prima si può dare la connotazione di causa, alla seconda quella di effetto), nella nostra definizione l'ordine è di tipo inverso: prima si fissa (ad arbitrio, o a piacere - ma un vecchio professore si inquietava quando sentiva gli studenti esprimersi così, obiettando che questa operazione di scelta non procurava particolare piacere) l'epsilon (che riguarda la variabile dipendente) e poi il delta, che riguarda la variabile indipendente. La situazione ha qualche analogia con la lettura di un orario ferroviario: se da Pisa voglio arrivare a Milano prima di mezzanotte, comincio a consultare l'orario a partire da Milano...Può darsi che l'uso dei quantificatori agevoli la comprensione; gli allievi sono molto suggestionati dalla logica, che è stata ufficialmente inserita nei nuovi programmi; inoltre l'uso dei quantificatori si presta bene a livello di correzione di una definizione sbagliata ("tu volevi forse dire così, ma invece hai detto questa altra cosa..."). Naturalmente, con l'uso dei quantificatori aumenta di molto il rischio che l'allievo impari le definizioni a memoria.

È forse opportuno - si usino o non si usino i quantificatori - premettere qualche esercizio che consista nel decodificare dal punto di vista logico una frase presa dal linguaggio comune: un punto importante è far capire con esempi che il senso varia di molto se si scambiano fra loro due quantificatori di tipo diverso... È anche opportuno, da parte dell'insegnante, fare capire all'allievo che, almeno a livello teorico, non si è tenuti a rispondere all'epsilon con il delta migliore possibile (cioè più grande possibile); la risposta non è necessariamente unica, come invece è abituato a ritenere l'allievo. In generale, c'è possibilità di scelta sulla base di un criterio di semplicità e di eleganza.

#### 4- Traccia di un itinerario

Abbiamo dato molto spazio alle definizioni di base, ma non bisogna perdere di vista l'itinerario generale. La via che mi è sembrata più naturale per l'insegnamento dell'analisi nella Scuola Secondaria Superiore è la seguente: limite di una successione, continuità delle funzioni, limiti delle funzioni e infine, naturalmente, derivate ed integrali.

Preferisco cominciare dai limiti delle successioni per la spontaneità con cui si pone il problema: infatti, dopo aver introdotto attraverso una legge generale o attraverso un procedimento di ricorrenza, una successione (e dopo aver fatto, se possibile, un'attività al calcolatore) è naturale chiedersi come essa si comporta quando l'indice diventa sempre più grande. Così il tema del limite si salda molto bene con quello degli algoritmi, anche perché spesso il termine generale della successione rappresenta le successive approssimazioni nel calcolo di un'incognita. In questi casi la nozione di limite nasce in una situazione molto motivante, specialmente quando il limite non è un numero già noto.

Passando alle funzioni, ho sentito spesso esprimere meraviglie per la mia proposta di anticipare la continuità delle funzioni rispetto alla nozione di limite. Premetto che non enfatizzerei troppo questa scelta, che non mi pare di enorme rilievo; tuttavia, qualche buona ragione c'è. In primo luogo, considero la continuità come un concetto veramente grosso, da mettere subito in evidenza. Nelle esposizioni elementari più comuni, i fatti relativi alla continuità sono ingiustamente trascurati. Al contrario, il teorema degli zeri di una funzione continua e il teorema sull'inversione delle funzioni sono presenti, in forma forse inconsapevole, in tante situazioni. Se riflettiamo, ad esempio, alla definizione delle funzioni circolari a partire dalla misura degli angoli in radianti, ci accorgiamo che definiamo prima la funzione *arcoseno* e solo dopo la funzione *seno*; infatti, la costruzione iniziale è quella della determinazione della lunghezza di un arco assegnato! Aggiungo che non mi limiterei alle funzioni reali continue, ma insisterei sui cammini continui nel piano e nello spazio (cioè sulle applicazioni continue di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$  e in  $\mathbb{R}^3$ ). Infatti, se in fisica si studia la traiettoria di un punto materiale, non si vede perché il concetto utilizzato debba essere trascurato in sede matematica. Aggiungo che, come accade per tanti concetti di topologia, anche la continuità può essere illustrata in modo più ricco e significativo nel piano piuttosto che sulla retta.

C'è un'altra ragione per cui - per le funzioni - preferisco anticipare la continuità rispetto ai limiti, ed è la scarsa significatività che, nei primi esempi che si possono offrire all'allievo, ha la nozione di limite al tendere della variabile ad un valore finito. La riprova di questa affermazione sta in esercizi del seguente tipo, che abbondano in certi libri di testo: calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3$$

L'allievo è facilmente indotto a pensare che ogni limite si calcola con una semplice sostituzione della variabile con il valore limite della variabile indipendente, eseguendo, tutt' al più, qualche semplificazione algebrica. Solo la nozione di continuità permette di discernere i casi in cui questa operazione è ammissibile.

Quali sono i confini entro cui sviluppare questi elementi di analisi a livello secondario? Una nozione che appare fuori portata perché eccessivamente complicata è quella della continuità uniforme, soprattutto se ci si propone di dimostrare che una funzione continua in un insieme chiuso e limitato è uniformemente continua. Vorrei però segnalare una proposta didatticamente interessante sostenuta da qualche autore: parlare di funzione (uniformemente) continua in un intervallo limitato, anziché di funzione continua in un punto. In altre parole,  $f$  viene detta continua in  $[a, b]$  se, fissato comunque  $\epsilon$  e positivo, esiste un  $\delta$  positivo tale che, se  $x_1, x_2$  sono punti di  $[a, b]$  distanti fra loro meno di  $\epsilon$ , si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta.$$

Effettivamente, se vi si riflette, è abbastanza buffo parlare di funzioni continue *in un punto*. Quest'ultimo tipo di continuità, che è abituale nei nostri corsi di analisi, fu introdotto da Weierstrass e dalla sua scuola; ma le ricerche degli storici hanno accertato che lo stesso Cauchy, quando parlava di funzioni continue, le intendeva uniformemente continue negli intervalli limitati.

Un altro tema che penso si dovrebbe introdurre presto, e in termini abbastanza generali, è quello dell'area; il metodo può essere quello di Peano-Jordan, basato sulle quadrettature del piano. Penso che di questo passo avanti si senta particolarmente bisogno nell'insegnamento secondario: non è più possibile limitarsi all'area dei poligoni e a quella del cerchio, oltretutto con traballanti ragionamenti che fanno appello - a ragione o a torto - alla sola proporzionalità. Con la stessa fatica è possibile svolgere una teoria molto più vasta ed elegante. Non è il caso di parlare

qui su un tema che è già stato trattato in moltissime occasioni: l'impiego del calcolatore nell'insegnamento dell'analisi. Basterà dire che il calcolatore può dare un apprezzabile contributo alla comprensione di certi concetti dell'analisi rendendo effettivi alcuni procedimenti che fino a poco tempo fa avevano solo valore teorico. Da questo punto di vista, si crea spontaneamente la distinzione fra i procedimenti dimostrativi di tipo costruttivo e quelli di tipo puramente esistenziale.

## 5- Qualche futuribile

Vi sono certamente problemi didattici che scaturiscono dall'ampliamento dei programmi. Nel recente passato si sono verificati, soprattutto nel settore tecnico, ampliamenti piuttosto vistosi e sorprendenti nei programmi di matematica. La cosa è passata quasi inosservata perché abbiamo, in generale, la cattiva abitudine di occuparci solo dei Licei o, al più, dell'Istituto Magistrale, trascurando gli Istituti Tecnici e non pensando neppure che possano esistere gli Istituti Professionali! In certe sezioni degli Istituti Tecnici sono state introdotte, ad esempio, le serie di Fourier. Vi confesserò che ho tentato a più riprese, ma sempre inutilmente, di trovare una via che renda perlomeno plausibile l'approssimazione di una qualsiasi funzione periodica con un polinomio trigonometrico. Eppure si trova qui un problema didattico non eludibile: infatti, l'accettazione di un'affermazione al di fuori di una dimostrazione o, almeno, di una plausibilità può disporre i giovani al dogmatismo. In qualche caso, dicevo, basta una plausibilità a livello intuitivo; ma, in questioni di rigore, tutto dipende dall'altezza dell'edificio che si vuole costruire. Se si parte da una base puramente intuitiva, l'edificio che si costruisce non può essere molto elevato. Nella didattica il rigore non ha una portata assoluta, ma dipende, dalla costruzione che si vuole innalzare. Del resto, anche nello sviluppo della matematica si è proceduto così: l'*avvento del rigore* (con Cauchy, Abel, Dirichlet, ecc..) non fu determinato da sterile pignoleria, ma dalla sensazione precisa che con l'incertezza di definizioni e di metodi che perdurava nell'analisi non sarebbe più stato possibile andare avanti.

Le definizioni di base dell'analisi sono, come abbiamo detto, piuttosto complesse e, inoltre, hanno quel carattere di cammino a ritroso che si è notato. Un modo di aggirare l'ostacolo - ma solo in parte - consiste nel definire le successioni infinitesime (sempre alla maniera classica, per forza!) e poi fare tutto il resto servendosi di quelle. Ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

significa che per ogni successione  $u_n$  infinitesima ( $u_n \neq 0$ ) la successione  $f(x_0 + u_n) - A$  è pure infinitesima.

Un punto di vista più radicale consiste nel fare questo gioco non con le successioni infinitesime, ma con gli *infinitesimi attuali*. È il punto di vista dell'Analisi *non standard*, che si rifà ad un atteggiamento mentale certamente presente - anche se non esclusivo - in Leibniz e in altri fondatori dell'analisi infinitesimale. Vediamo un esempio semplice, ma illuminante (scusandoci con tutti coloro che conoscono già questo tema). Calcoliamo la derivata della funzione  $x \rightarrow x^2$  nel punto  $x_0$ ; diamo alla variabile  $x$  un incremento infinitesimo  $h$  e svolgiamo questo calcolo algebrico:

$$\frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

Ora, il problema consiste nel legittimare la cancellazione di quell'infinitesimo  $h$  che rimane. Qui si concentravano giustamente le critiche all'analisi infinitesimale fin dal XVIII secolo; infatti la cancellazione di quell'  $h$  è in evidente contraddizione con la semplificazione appena eseguita, in cui risulta essenziale che  $h$  sia diverso da zero. Come è noto, A. Robinson, con la sua *Non Standard Analysis* (1966) ha presentato per la prima volta un quadro logico in cui l'uso degli infinitesimi (attuali) diventa del tutto legittimo, ed anche fecondo. Si tratta di ampliare la retta reale (e tutti gli altri enti *standard*) introducendo nuovi enti (quali, appunto, gli infinitesimi), in modo da conservare, fin dove possibile, le proprietà classiche. Dal Robinson, in particolare, è stata introdotta l'operazione di *parte standard* con cui a ciascun numero reale (inteso in senso lato) viene associato un *numero standard* che gli è *infinitamente vicino*. Con questa operazione si può finalmente legittimare la cancellazione dell'infinitesimo residuo (ricordiamo l' $h$  del nostro esempio).

Dopo il trattato, piuttosto difficile, di Robinson, vi sono state varie versioni dell'Analisi Non Standard, adatte a tutti i gusti. Da parte mia, la preferenza va ad una presentazione di E. Nelson, che è basata su un'estensione della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (*Internal Set Theory* - Bull. of the American Math. Society-1977). Vi sono poi trattazioni che si prefiggono uno scopo decisamente didattico; segnalo l'opera in due volumi di H J. Keisler, che sono stati tradotti in italiano a cura di Ruggero Ferro ed altri, con il titolo non sospetto di *Elementi di Analisi Matematica*. (Piccin Editore, Padova.1982). Vi sono poi anche opere didattiche scritte

originariamente in italiano per corsi universitari di *Analisi Matematica esposte col metodo degli infinitesimi* di V. Benci. (Tipografia Editrice Pisana, 1989). È importante segnalare che in Italia vi è un certo numero di sperimentazioni didattiche condotte con l'*Analisi Non Standard*, così che si renderebbe opportuno un censimento ed un confronto.

Dagli “anni sessanta” ad oggi il dibattito sull'utilizzazione didattica dell'*Analisi Non Standard* è stato, a tratti, vivace. La prospettiva di aver trovato finalmente un modo *facile e naturale* per introdurre l'Analisi infinitesimale è veramente affascinante. Ma i dubbi sono ancora forti: l'*Analisi Non Standard* è veramente una via facile? La possibilità di svolgere un puro calcolo algebrico in luogo delle complesse operazioni di limite della via tradizionale è attraente, ed è anche in sintonia con quella tendenza verso l'algebrizzazione della matematica che è indubbiamente una costante storica nello sviluppo della nostra scienza. Ma, per necessità di completezza algebrica, i nuovi enti da introdurre - come spiritelli evocati da uno stregone - sono una marea traboccante. La distinzione tra enti *standard* e *non standard* non è sempre facile: si corre veloci, ma si rischia di uscire di strada. Forse non ci si può attendere che la didattica preceda la ricerca specifica: forse occorrerà, prima di proporre la via *Non Standard*, che la ricerca l'abbia già adottata. Ma qui si pongono seri problemi di...standardizzazione. Un'enorme mole di risultati di matematica è già espressa nel linguaggio *epsilon-delta* e il tradurli nella nuova forma è certamente una fatica notevole. Da questo punto di vista si può forse sostenere una tesi didattica opposta: che, cioè, si possa vantaggiosamente utilizzare l'*Analisi Non Standard* proprio nei così detti corsi di servizio, per cui non si pone, o si pone in termini meno acuti, il problema del collegamento con la letteratura esistente. Ma vi è un vantaggio notevole dell'*Analisi Non Standard* a cui di solito non si pensa: l'*Analisi Non Standard* permette di trattare direttamente le *variabili*, e non solo le *funzioni* che collegano fra loro le variabili. In altre parole, l'*Analisi Non Standard* consente di ritornare al linguaggio primitivo dell'Analisi Infinitesimale, che è il linguaggio matematico tutt'ora “parlato” nei corsi di fisica e di matematica applicata; si tratta di un linguaggio in cui viene adottato per una certa variabile un simbolo (ad esempio:  $p$  per la pressione,  $v$  per il volume...) che rimane inalterato nel corso della trattazione, a prescindere dai legami funzionali a cui le variabili sono sottoposte. Il “metodo degli infinitesimi” consente di prendere una porzione infinitesima di ciascuna grandezza separatamente, mentre il metodo degli *epsilon-delta*

consente solamente il confronto di due quantità corrispondenti che sono simultaneamente infinitesime, e sempre in senso potenziale. Vorrei cogliere l'occasione per segnalare, più in generale, la necessità di un esame critico sul linguaggio interno della matematica e sul modo con cui la matematica viene applicata nelle scienze e nella tecnica. Credo che una ricerca approfondita su questo tema ci riserverebbe non poche sorprese!

Per concludere, esporrò qualche riflessione sul tema, particolarmente interessante dal punto di vista psicologico e didattico, della *naturalità* dell'*Analisi Non Standard*. È proprio naturale pensare che sulla retta reale, accanto ai soliti punti ci siano nugoli di altri punti, ad essi infinitamente vicini? Questa domanda presuppone che si abbia una certa familiarità con i soliti punti, ma teniamo presente che questi sono il risultato di un processo molto elaborato: quello, ad esempio, delle sezioni di Dedekind o delle successioni di Cantor... Indubbiamente l'utilizzazione degli infinitesimi offre molti appigli all'intuizione, come fanno coloro che hanno cominciato lo studio dell'analisi molti anni fa, quando l'analisi rigorosa conviveva ancora con l'uso degli infinitesimi nella pratica. Alludo, ad esempio, alla costruzione di figure geometriche infinitesime, come certi "elementi di area" o "elementi di volume" che venivano impiegati per giustificare il cambiamento di variabili negli integrali multipli. Una via per accettare intuitivamente la presenza simultanea di quantità finite, infinite ed infinitesime è indubbiamente quella della consuetudine con i vari ordini di grandezza; ad esempio, la lunghezza di un metro può essere considerata infinitesima se paragonata con la distanza dalle stelle fisse. Vi sono poi fenomeni, come quelli meteorologici, che è opportuno studiare su scale diverse, e per cui la modellizzazione con l'*Analisi Non Standard* può essere opportuna.

In conclusione, sono personalmente convinto che anche per l'*Analisi Non Standard* si possa ripetere quanto ci è sembrato plausibile per l'idea di infinito, cioè che il fondamento intuitivo non vada cercato in un'evidenza sensibile, ma sia interno alla nostra mente e sia, nello stesso tempo, culturale: la nostra mente, sollecitata da adeguate proposte culturali, le fa proprie senza difficoltà e le assume come naturali.

Comunque, sia che queste proposte risultino insite in qualche modo nella realtà, sia che si trovino solo nella nostra mente, siamo di fronte a cose che ci riempiono di meraviglia.

## VEDERE DA PUNTI DI VISTA DIVERSI LA GEOMETRIA

*Francesco Speranza*

Centro di sperimentazione e documentazione dei mezzi didattici della  
matematica, Università di Parma

L'insegnamento della Geometria è uno dei più complessi fra quelli attinenti la Matematica. La Geometria, infatti, ha in vista lo studio matematico di "situazioni reali" e il fatto che spesso aspetti "visivamente intuitivi" si mescolino con argomentazioni teoriche può interferire in senso negativo con gli aspetti puramente logici della Geometria; d'altra parte questa stessa convivenza di aspetti concreti e di ragionamenti formali può venire variamente utilizzata sul piano didattico. Nella Geometria intervengono diversi settori della Matematica (sviluppatasi più recentemente, spesso proprio su sollecitazione della Geometria), che in una sistemazione logica sono più basilari e in definitiva più semplici: l'Algebra, la Topologia, ... Anche questo può risultare utile e stimolante in sede didattica. Ad esempio la stessa struttura del linguaggio usata in Geometria può suggerire qualche riflessione.

Si usano spesso frasi di questo tipo "L'area del cerchio è  $\pi r^2$ ", "Il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio": come, cioè, se esistesse un solo cerchio, un solo decagono regolare. In sostanza si è portati a confondere il singolo cerchio con "il concetto" di cerchio. Però non capita di sentire frasi del tipo "Le diagonali del parallelogramma si dividono a metà", o analogamente non si parla "del triangolo isoscele": parla invece di un parallelogrammo, di un triangolo isoscele. Sia ben chiaro, è questa la dizione corretta anche nel caso dei cerchi e dei decagoni regolari, che formano anch'essi insiemi infiniti. Ma perché sul piano discorsivo si parla invece del cerchio, dell'esagono regolare? Perché si parla come se vi fosse un solo cerchio, un solo esagono regolare, e invece questo non accade per i rettangoli, le iperboli? Si ammette dunque inconsciamente che

“tutti i cerchi sono uguali”? Questo sarebbe un uso un po’ estensivo della parola “uguali”: sarà forse meglio dire “equivalenti”. Tuttavia, perché non si potrebbero considerare “equivalenti” i rettangoli?

In effetti, si possono “inventare” criteri d’equivalenza tali che tutti i rettangoli siano equivalenti. Anzi, si possono introdurre criteri ancora più “permissivi”, nei quali siano equivalenti, addirittura, i rettangoli e i cerchi (e nel seguito ne incontreremo e di quelli e di questi).

Constatiamo tuttavia che certi criteri hanno maggior presa psicologica. Gli esempi precedenti ci suggeriscono che tali sono i criteri che si basano sulle nozioni fondamentali della geometria euclidea: l’“uguaglianza” e la “similitudine”.

Più esattamente, siamo facilmente portati a parlare “del cerchio” e “dell’ottagono regolare” perché tutti i cerchi sono simili, e così pure lo sono tutti gli ottagoni regolari.



Figura 1

Vi sono invece rettangoli non simili (v. fig. 1), iperboli non simili.

A questo punto è interessante notare che, tuttavia, vi sono altri criteri di equivalenza, alcuni più “permissivi” e

altri meno, che in situazioni particolari possono assumere notevole importanza. Se guardate, da una posizione angolata ma non troppo, le finestre di una casa, direte abbastanza facilmente che vedete dei rettangoli: invece, se scattate dallo stesso punto di vista una fotografia e la osservate attentamente, vi accorgete che le immagini delle finestre rettangolari non sono rettangoli. C’è dunque una “equivalenza proiettiva”, che spesso non ci fa distinguere fra una figura e una sua immagine prospettica.

Un altro esempio: vi sono orologi sui quali non sono segnate le cifre delle ore (v. fig. 2). Per semplicità, supponiamo che l’orologio abbia solamente la lancetta delle ore, e che sia appoggiato su un piano orizzontale. Rispetto alle similitudini, una circonferenza è equivalente a se stessa in infiniti modi, anzi

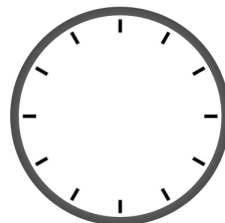


Figura 2

può essere ruotata su se stessa in modo da portare un punto qualsiasi in un altro punto qualsiasi. Se sul quadrante non fosse segnato alcunchè, non potremmo sapere l'ora.

Se sul quadrante vi sono i segni delle ore, come nella figura 2, non siamo ancora in grado di leggere l'ora, ma solamente quanto tempo è trascorso dall'ora precedente (infatti, non c'è modo di sapere dove siano, ad esempio, le 12). In tal caso vi sono 12 rotazioni "privilegiate", quelle che portano ogni segno delle ore su un altro. Per capire che ora è dobbiamo tenere fisso l'orologio, ad esempio in posizione verticale. In tal modo, non vi sono ambiguità; anzi, in teoria, non vi sarebbe neppure bisogno dei segni che indicano la posizione delle ore, perché si sa che le 12 sono nella posizione più alta, e tutte le altre posizioni si possono leggere di conseguenza. In questo caso, dunque, l'equivalenza non è quella della geometria euclidea, ma è tale che si deve tener conto anche della direzione "verso l'altro". Del resto, questo si può dire tutte le volte che si considera una figura nello spazio ambiente terrestre: non è indifferente ruotare un oggetto di un certo angolo, per quanto riguarda i rapporti con l'ambiente. La "equivalenza terrestre" è dunque più restrittiva della equivalenza euclidea, nel senso che vi sono figure equivalenti in questa e non in quella. Invece l'"equivalenza proiettiva" è meno restrittiva dell'"equivalenza euclidea", per una ragione strettamente analoga. Possiamo concludere intanto che vi sono diversi criteri per classificare una figura geometrica e per studiarne le proprietà. Fissata una certa "equivalenza", a quel livello ci si occupa di certe proprietà, che sono comuni a tutte le figure "equivalenti".

Ad esempio, rispetto all'equivalenza proiettiva ha senso chiedersi se più punti sono allineati: non ha senso, invece, chiedersi se un certo angolo è retto (vedi, nella figura 3, una finestra e la sua immagine).

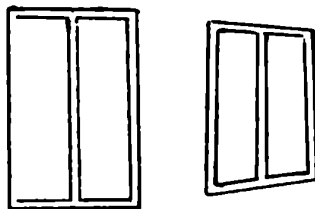


Figura 3

Cambiando il criterio d'equivalenza,

cambiano le proprietà che possiamo esaminare. Ad esempio, con l'equivalenza euclidea, hanno senso le varie proprietà dell'equivalenza proiettiva. (Ciò perché due figure equivalenti dal punto di vista euclideo sono equivalenti anche dal punto di vista proiettivo.) Ma hanno senso altre proprietà ancora, ad esempio il fatto che un angolo sia retto. In questo senso diciamo che l'equivalenza proiettiva è “più permissiva” dell'equivalenza euclidea. Cerchiamo ora di chiarire più esattamente che cosa significhi equivalenza e come si possa definire un tipo di equivalenza.

Una delle idee più potenti della Matematica moderna è quella di “relazione di equivalenza”: essa si ritrova in una serie sterminata di situazioni. Anche qui abbiamo una relazione di equivalenza: in quale insieme? Ad esempio nel caso dell'equivalenza proiettiva, abbiamo parlato di rettangoli e di quadrilateri. Ma è chiaro che questioni analoghe si possono ripetere per ogni altro tipo di figura geometrica (cioè, per qualsiasi figura, ci possiamo chiedere quali sono le figure equivalenti). Potremmo dire che ognuna delle relazioni d'equivalenza è definita nell'insieme delle figure geometriche. Ci si potrebbe ora chiedere cosa significhi esattamente “figura geometrica”: prendiamo questa parola come sinonimo di “sottoinsieme del piano” (o dello spazio, se si studia la geometria spaziale).

Si tratta ora di vedere come si può realizzare una di queste equivalenze. Tanto per fare un esempio, possiamo “inventare” questa relazione di equivalenza: tutti i triangoli sono fra loro equivalenti, e così tutti i quadrangoli, ..., e poi sono equivalenti tutte le figure non poligonali. Questa è certamente una relazione di equivalenza, ma sembra poco adatta a essere presa come criterio base per studiare tutte le figure geometriche. Infatti, in tutti i casi precedentemente studiati, vi è la possibilità di “trasformare” una nella altra (due cerchi per mezzo di una similitudine, un rettangolo e la sua immagine prospettica per mezzo della mappa oggetto  $\rightarrow$  fotografia, ...): più precisamente, vi è un'applicazione (mappa) del piano in sè che trasforma una figura nell'altra. (Si potrebbe in un primo momento pensare che sarebbe più semplice lavorare con trasformazioni che

portano una data figura in un'altra figura data, e non con trasformazioni dell'intero piano: ma così facendo dovremmo considerare tante trasformazioni quante sono le figure.)

Si noti che non si ha a che fare con una sola mappa (applicazione), ma con un insieme di mappe: infatti una stessa figura può essere trasformata in figure distinte, per cui debbono intervenire applicazioni distinte. Stabiliamo le proprietà che conviene chiedere a un insieme  $\underline{I}$  di applicazioni perché queste si possano prendere come trasformazioni caratteristiche di un certo tipo di Geometria.

Dato l'insieme  $\underline{I}$ , consideriamo nell'insieme  $\underline{F}$  delle figure del piano la relazione

- (1) “ $\underline{A}$  è equivalente a  $\underline{B}$  (scriviamo  $\underline{A} \sim \underline{B}$ ) allorchè esiste una  $\underline{f} \in \underline{I}$  che porta  $\underline{A}$  in  $\underline{B}$ ”.

Questa deve essere una relazione di equivalenza:

1) deve valere la proprietà riflessiva, cioè  $\underline{A} \sim \underline{A}$  per ogni figura  $\underline{A}$ .

Per ottenere questo basta fare in modo che in  $\underline{I}$  vi sia una mappa che porta ogni figura in se stessa: tale è l'identità, che a ogni punto associa se stesso.

2) deve valere la proprietà simmetrica, cioè se  $\underline{A} \sim \underline{B}$  allora  $\underline{B} \sim \underline{A}$ : in altre parole, se  $v$  è una  $\underline{f}$  che porta  $\underline{A}$  in  $\underline{B}$ ,  $v$  è una  $\underline{g}$  che porta  $\underline{B}$  in  $\underline{A}$  ( $\underline{A} = \underline{g}(\underline{B})$ ). Per essere sicuri di ciò, basta fare in modo che gli elementi di  $\underline{I}$  siano biiezioni (corrispondenze biunivoche), e per ogni  $\underline{f}$  di  $\underline{I}$  vi sia in  $\underline{I}$  anche l'inversa  $\underline{f}^{-1}$  (che opera così: se  $\underline{f}$  porta  $\underline{x}$  in  $\underline{y}$ , allora  $\underline{f}^{-1}$  porta  $\underline{y}$  in  $\underline{x}$ ).  $\underline{f}^{-1}$  soddisfa proprio alla condizione richiesta per la mappa  $\underline{g}$ .

3) Deve valere la proprietà transitiva, cioè se  $\underline{A} \sim \underline{B}$  e  $\underline{B} \sim \underline{C}$  allora  $\underline{A} \sim \underline{C}$ . ciò significa che se in  $\underline{I}$  vi sono una  $\underline{f}$  che porta  $\underline{A}$  in  $\underline{B}$  e una  $\underline{g}$  che porta  $\underline{B}$  in  $\underline{C}$ , vi deve essere una  $\underline{h}$  che porta  $\underline{A}$  in  $\underline{C}$ . Date  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$  come sopra, una mappa che porta  $\underline{A}$  in  $\underline{C}$  è il prodotto  $\underline{g} \circ \underline{f}$ , che si ottiene applicando prima  $\underline{f}$  e poi  $\underline{g}$  (o, come si dice, componendo  $\underline{f}$  con  $\underline{g}$ ); in simboli

$$\underline{g} \circ \underline{f}(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))$$

basta quindi chiedere all'insieme  $I$  la seguente condizione: per ogni coppia di elementi  $f$  e  $g$  esista in  $I$  il loro prodotto  $g \circ f$ .

Possiamo concludere che un insieme  $I$  di applicazioni del piano in sè, che goda di queste proprietà

- (I) in  $I$  esiste il prodotto di due elementi di  $I$
- (II) in  $I$  esiste l'inverso di ogni elemento
- (III) ad  $I$  appartiene l'identità,

definisce nel piano una relazione di equivalenza.

Osserviamo poi che per l'operazione  $\circ$  vale la proprietà associativa:

$$(IV) \quad (\underline{h \circ g}) \circ \underline{f} = \underline{h \circ (g \circ f)} \quad (\text{fig.4})$$

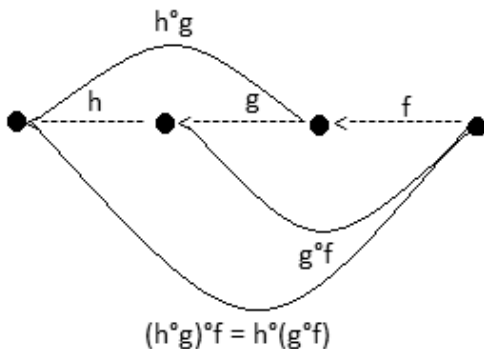


Figura 4

Un insieme dotato di un'operazione che soddisfa alle proprietà (I), (II), (III), (IV) si dice un gruppo. Dunque, dato nel piano un gruppo di applicazioni, la relazione definita da (1) è una relazione di equivalenza e definisce nel piano un certo tipo di geometria. Ad esempio, le traslazioni (sono le applicazioni che spostano ogni punto di un segmento di lunghezza, direzione e verso fissati: cfr. fig. 5) formano un gruppo.

Quindi esse definiscono una relazione di equivalenza: sono equivalenti figure che si ottengono l'una dall'altra per traslazione.

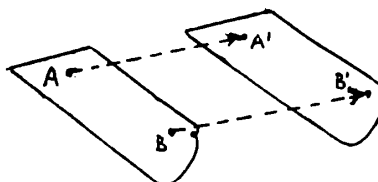


Figura 5

La simmetria assiale rispetto a  $\underline{r}$  è la mappa che a ogni punto del piano associa il punto simmetrico rispetto a  $\underline{r}$ . Il prodotto di due simmetrie assiali qualsiasi è una traslazione oppure la rotazione intorno a un punto.

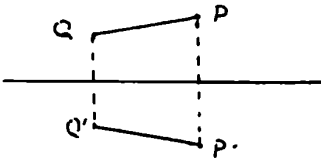


Figura 6

Non è verificata la condizione (I), perciò le simmetrie assiali non formano un gruppo e non esiste quindi la “Geometria delle simmetrie assiali”.

Un gruppo importante è quello delle isometrie, cioè delle biiezioni che conservano le distanze: la relativa Geometria è l’ordinaria Geometria euclidea. In essa le distanze fra i punti di una figura sono uguali a quelle dei punti corrispondenti di una figura equivalente.

Abbiamo pure il gruppo delle isometrie dirette, che sono quelle che si possono realizzare con un “movimento fisico” del piano (le altre isometrie, dette inverse, ciascuna delle quali si può ottenere eseguendo una isometria diretta seguita da una simmetria, non formano un gruppo).

Altri gruppi sono quelli delle similitudini, che moltiplicano tutte le distanze per un numero fisso, (e quello delle similitudini dirette, ciascuna delle quali si può ottenere componendo un’isometria diretta con la “dilatazione” intorno a un punto). Esso definisce la geometria simile. In essa ha senso parlare di rette perpendicolari, perchè in una similitudine a rette perpendicolari corrispondono rette perpendicolari. Figure equivalenti dal punto di vista simile hanno la medesima “forma”.

Un gruppo importante è il gruppo affine: un esempio di affinità è quello che intercede fra una figura piana e l’ombra che essa getta su un piano per effetto della luce solare (poiché si debbono considerare trasformazioni di un piano in sé, sarebbe più corretto riferirsi alla corrispondenza che intercede fra due ombre, ottenute ad esempio in ore diverse, della stessa figura). Un’affinità si ottiene componendo un numero finito di applicazioni di questo tipo. L’equivalenza

definita dal gruppo delle affinità è l'equivalenza della Geometria affine: in un'affinità a rette parallele corrispondono rette parallele, quindi nella geometria affine hanno senso le nozioni di allineamento e parallelismo (non la relazione di perpendicolarità, in quanto in un'affinità due rette perpendicolari, di regola, vengono trasformate in rette non perpendicolari).

L'equivalenza proiettiva, di cui si è parlato più sopra, è definita dalle proiettività (o omografie), che sono esemplificate dalla corrispondenza che intercede fra una figura piana e una sua ombra (o meglio fra due diverse ombre della stessa figura: più precisamente una proiettività si ottiene componendo un numero finito di mappe dello stesso tipo. L'ombra può essere provocata tanto dalla luce solare quanto dalla luce di una lampada: la differenza essenziale sta nel fatto che il sole è praticamente "all'infinito" mentre la lampada è a distanza finita, e in questo secondo caso rette parallele hanno per immagine rette non parallele (l'ombra di un rettangolo è un quadrilatero qualsiasi). Un paralume proietta sulle pareti di una

stanza una certa ombra, che è l'immagine prospettica di una circonferenza: a seconda dell'angolo che formano la parete e il paralume, si potrà ottenere una ellisse, una parabola o una iperbole: queste sono le cosiddette coniche, cioè le sezioni piane di un cono circolare, nel nostro caso il cono che dalla lampadina proietta l'orlo del paralume (fig.7).

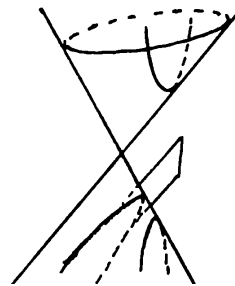


Figura 7

Volendo essere più precisi, occorre notare che una proiettività non è, di solito, una biiezione del piano ordinario in sé: infatti nella prospettiva vi sono i "punti di fuga" in cui concorrono le rette immagini di rette parallele (fig.8): ma due rette parallele non hanno punti in comune, e quindi i punti di fuga non sono immagini di alcun punto.

L'omografia è un'applicazione, anzi una biiezione, se si considerano

i “piani proiettivi”, nei quali si aggiungono anche i “punti all’infinito” (si conviene che due rette parallele abbiano in comune il punto all’infinito, e quindi nella prospettiva hanno per immagine i punti di fuga).

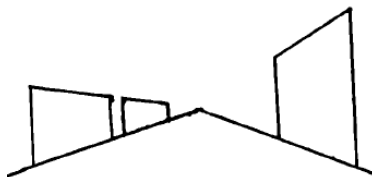


Figura 8

Assai più generale è il gruppo degli omeomorfismi, o trasformazioni topologiche. Se prendiamo un foglio di gomma e lo stiriamo o lo comprimiamo senza strapparla, abbiamo un omeomorfismo (sono ammessi gli strappi purché gli orli vengano risaldati così com'erano all'inizio).

Due figure trasformabili l'una nell'altra con un omeomorfismo si dicono topologicamente equivalenti: tali sono un cerchio e un rettangolo.

Non sono topologicamente equivalenti una corona circolare e un nastro di Moebius, che si può costruire con una strisciolina di carta torcendola di mezzo giro e saldando le estremità (fig.9):

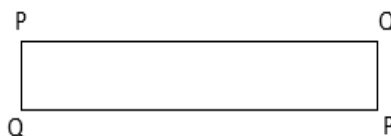


figura 9

i due punti segnati con P si portano l'uno sull'altro, e così pure i punti Q. Invece sono topologicamente equivalenti una corona circolare e la superficie che si ottiene dalla strisciolina con la torsione di un angolo giro.

Nella figura 10 sono riprodotte alcune figure geometriche (la 10 va\* intesa come regione piana).

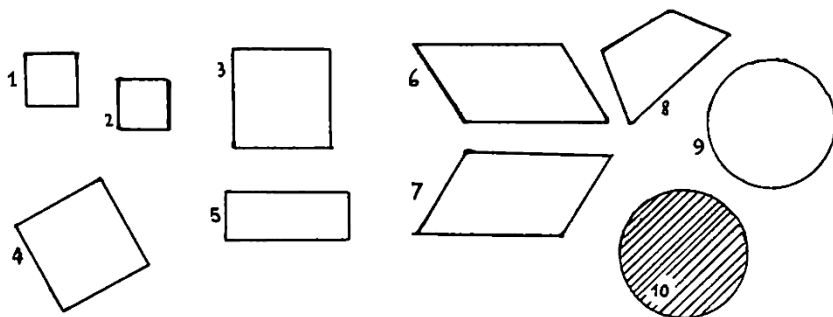


Figura 10

Nella tabella che segue, è indicata, per le figure 1, 2, 3, 4, quali sono equivalenti per effetto di traslazioni (non vi sono altre coppie distinte di figure, fra quelle considerate, fra loro equivalenti).

	1	2	3	4
1	x	x		
2	x	x		
3			x	
4				x

La tabella che segue dà l'equivalenza delle figure esaminate nella Geometria euclidea.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	x								
2	x	x								
3			x	x						
4			x	x						
5					x					
6						x	x			
7						x	x			
8								x		
9									x	
10										x

Per quanto riguarda la Geometria affine (la “Geometria delle ombre solari”) la tabella dell’equivalenza è la seguente:

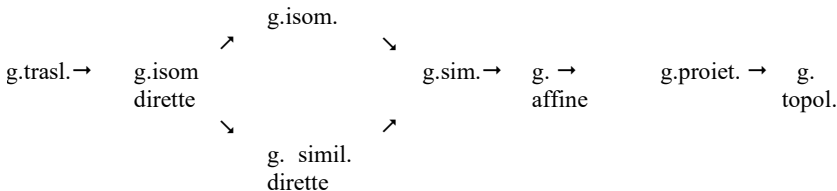
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	x	x	x	x	x	x			
2	x	x	x	x	x	x	x			
3	x	x	x	x	x	x	x			
4	x	x	x	x	x	x	x			
5	x	x	x	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x	x			
8								x		
9									x	
10										x

Nella Geometria proiettiva sono equivalenti tutte le figure da 1 a 8 mentre 9 e 10 non sono equivalenti fra loro né lo sono a quelle precedenti. Nella topologia sono equivalenti tutte le figure da 1 a 9. Consigliamo al lettore di tracciare la tabella dell’equivalenza in altri tipi di Geometria (ad esempio in quella simile, o in quella definita dal gruppo delle isometrie dirette).

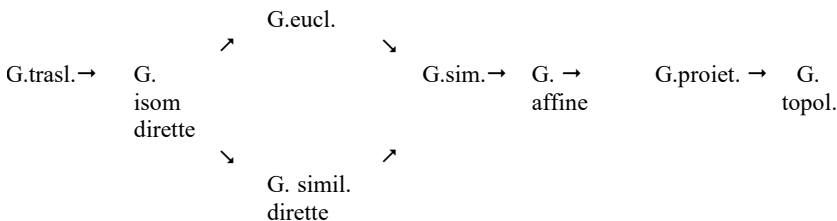
È interessante notare come si presentano i grafici delle relazioni studiate: sono fatti a blocchi quadrati allineati sulla diagonale che va dall’alto a sinistra verso il basso a destra. Questo è un fatto valevole per tutte le relazioni di equivalenza (conviene disporre dli elementi sugli “assi” raggruppando quelli fra loro equivalenti: in tal modo i blocchi non si compenetrano).

Possiamo inoltre notare, immaginando di sovrapporre due tabelle, che di regola i blocchi di una delle “equivalenze” sono contenuti in quelli dell’altra. Ciò corrisponde al fatto che le “classi d’equivalenza” di una delle relazioni sono contenute in quelle dell’altra. Si dice anche, in tal caso, che la prima delle relazioni d’equivalenza è “più fine” dell’altra: ad esempio l’equivalenza euclidea è più fine dell’equivalenza simile. In altre parole, se due figure sono equivalenti nella Geometria euclidea, lo sono anche nella

Geometria simile. Questo scende dal fatto che ogni trasformazione euclidea è anche una trasformazione simile. Si ha, più precisamente, lo schema seguente dei gruppi geometrici (“g” sta per “gruppo”).



Le frecce vanno lette “è contenuto in”. Naturalmente occorre immaginare il completamento delle frecce: vale a dire va inteso che il gruppo delle traslazioni è contenuto anche nel gruppo delle isometrie, nel gruppo delle similitudini, ...: la relazione d’inclusione è transitiva. A questo schema corrisponde il seguente “schema delle Geometrie” (“G” sta per “Geometria”).



Una freccia che va da una Geometria a un’altra va letta “due figure equivalenti nella prima Geometria sono equivalenti pure nella seconda”: anche qui le frecce vanno completate (anche questa relazione è transitiva: se vi sono le frecce  $A \rightarrow B \rightarrow C$  va immaginata anche la freccia  $A \rightarrow C$ ).

Concludendo: per definire un certo tipo di Geometria, si dà un gruppo di biiezioni. Due figure si dicono equivalenti in quella Geometria se esiste una biiezione del gruppo che trasforma l’una nell’altra.

Se due figure sono equivalenti in una Geometria, lo sono anche in una Geometria che nello schema precedente si trova “dopo” quella.

Una proprietà ha senso in una certa Geometria se è invariante per effetto delle biiezioni del gruppo, cioè se ciascuna biiezione del gruppo trasforma una figura che ha quella proprietà in una che ha pure questa proprietà (ad esempio, nella Geometria simile e in tutte quelle che la “precedono” nello schema si può parlare di misura di un angolo poiché, per effetto di una similitudine, un angolo viene trasformato in un angolo di uguale misura). Se una proprietà ha senso in una Geometria, ha senso anche in una Geometrie che la “precede”. La subordinazione delle Geometrie è regolata dall’inclusione dei relativi gruppi. Vi sono anche Geometrie “non confrontabili”, ad esempio la Geometria euclidea e la Geometria delle similitudini dirette: nessuno dei due gruppi è contenuto nell’altro (ad esempio nella figura 10 i quadrilateri 6 e 7 sono equivalenti nella Geometria euclidea e non in quella delle similitudini dirette, mentre 1 e 3 sono equivalenti in questa e non in quella).

Immaginiamo di fissare nel piano le direzioni dei punti cardinali (come se si trattasse di una carta topografica): diremo che nel piano abbiamo fissato l’orientamento. Infine nel “grafo” della figura 11 il numero di “lati” che escono da un “vertice” sarà il grado di questo, mentre l’ordine di una “faccia” è il numero dei lati che la circondano.

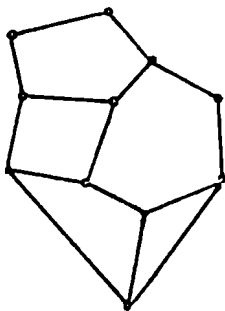


Figura 11

Ciò premesso, vediamo per alcune “proprietà geometriche” quali sono le Geometrie fra quelle considerate nelle quali hanno senso (ricordando sempre che se ciò accade per una Geometria, accade pure per quelle che la precedono).

L’orientamento ha senso solo nella Geometria delle traslazioni. Parlare di distanza di due punti ha senso nella Geometria euclidea, e parlare di rapporto di segmenti ha senso nella Geometria simile.

Parlare di rette parallele e di segmenti ha senso nella Geometria affine. Parlare di allineamento, e quindi di rette, ha senso in Geometria proiettiva (invece, un segmento può essere trasformato da

una proiettività nel complemento di un segmento). In Topologia, ha senso parlare di gradi e di ordini per un “grafo” (ma non di allineamento di punti).

Le Geometrie che si studiano solitamente nelle Scuole sono la euclidea e la simile. Per quanto abbiamo visto, anche le proprietà affini, proiettive e topologiche hanno senso nelle Geometrie euclidea e simile. Può tuttavia accadere che tali proprietà restino, per così dire, in ombra rispetto ad altre. Eppure, esaminandole attentamente, ci si convince che le proprietà invarianti in Geometrie “più generali” (o “più permissive”, nel senso che lasciano cadere un numero maggiore di proprietà) sono di carattere più fondamentale. Si pensi, ad esempio, alla priorità che Piaget riconosce alle proprietà topologiche (ad esempio, alla distinzione fra la regione interna e quella esterna a una linea chiusa piana).

## BIBLIOGRAFIA

E. CASTELNUOVO, *La Geometria*, ed. La Nuova Italia.

Z. P. DIENES, *La Geometria delle trasformazioni* (3 voll.), ed. O.S..

G. PAPY, *La Geometria piana nella matematica moderna*, ed. Le Monnier.

AA.VV., *Tendances nouvelles de l'enseignement des Mathématiques*, 3 voll. ed. UNESCO.

**DAL CONCRETO DELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO  
ALL'ASTRATTO DELLA SCUOLA SUPERIORE.  
CONQUISTA DI NUOVO SAPERE  
O PERDITA DI SIGNIFICATO?**

**SUMMARY**

A sudden increase in rigour, abstraction and generality occurs in the teaching of mathematics when pupils (at age 14-15) progress from middle school to upper secondary school. All too often, this change is not perceived as a “conquest of new frontiers of knowledge” but rather as a “loss of meaning”.

An analysis, based on several examples, suggests possible ways to improve connections between the mathematics taught at the two school levels.

Vinicio VILLANI  
Dipartimento di Matematica  
Università di Pisa

## **Dal concreto della scuola dell'obbligo all'astratto della scuola superiore. Conquista di sapere o perdita di significato?<sup>1</sup>**

**Vinicio VILLANI**

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

*A Candido Sitia, in occasione del Suo 75° compleanno.  
Con profonda stima e sincera amicizia.*

Secondo un'opinione piuttosto diffusa

*la matematica utile per la vita quotidiana è tutta e sola quella che si insegna nella scuola elementare e media.*

È ugualmente diffusa l'opinione che

*la matematica deve essere insegnata obbligatoriamente a tutti, anche nella scuola secondaria superiore.*

Le due citazioni in corsivo sembrano in contraddizione tra loro. Ma la contraddizione è solo apparente.

Infatti:

-Non tutta la matematica della scuola media è utile per la vita quotidiana. Basta pensare per esempio alle espressioni aritmetiche troppo complicate!

-D'altra parte, la sola matematica della scuola media è largamente insufficiente, perché non è scontato che tutto quello che viene insegnato venga anche effettivamente imparato. Tanto meno è scontato che quello che viene imparato resti poi stabilmente acquisito per tutta la vita. Ancor meno scontata è l'acquisizione della capacità di utilizzare le proprie conoscenze matematiche in contesti extra-

---

<sup>1</sup> Versione ampliata di una conferenza tenuta il 29.3.1996 a Soriano nel Cimino nell'ambito del convegno "Matematiche? No, grazie!" organizzato dal CIDI di Viterbo.

matematici. Quindi, dopo la scuola media, è indispensabile un'ulteriore fase di consolidamento e di approfondimento delle conoscenze matematiche di base.

- Ma c'è di più. La valenza della matematica va al di là della sua utilità strumentale immediata. La matematica contribuisce a formare il senso critico, la capacità di ragionamento e di astrazione, l'ordine mentale, ecc. Tutto ciò ne giustifica l'insegnamento nella fascia d'età compresa tra i 15 e i 19 anni.

- Infine, varie parti della matematica (in particolare quelle che interagiscono con l'informatica) sono indispensabili in determinate professioni o come base per determinati studi universitari.

Ciò che intendo mettere in discussione in questa relazione non è dunque l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore, le cui finalità dichiarate sono ampiamente condivisibili. Intendo invece evidenziare il fatto che solo raramente tali finalità vengono raggiunte in maniera soddisfacente nel corso degli studi secondari superiori (in proposito, si veda l'articolo [2], citato in bibliografia).

In quanto segue elencherò una serie di *difficoltà* che permangono con particolare frequenza alla fine della scuola media e oltre. Per ciascuna delle difficoltà diagnosticate, indicherò gli “*antidoti*” teoricamente previsti dai programmi di matematica delle scuole secondarie superiori (mi riferirò, un po' alla rinfusa, ai programmi ufficiali attualmente vigenti, ai programmi Brocca, a quelli del PNI, e, in certa misura, anche ai programmi imposti di fatto dai libri di testo più diffusi e dalla prassi didattica corrente). Analizzerò poi le *cause della scarsa efficacia* di tali antidoti, e cercherò di fornire qualche *indicazione* su ciò che a mio avviso potrebbe essere fatto per migliorare lo stato delle cose.

Non ho però la pretesa di proporre soluzioni miracolistiche alle molte contraddizioni che chiunque opera nella scuola si trova a vivere quotidianamente. So bene che non siamo nel paese dell'Utopia!

## 1. Instabilità nella scelta delle operazioni aritmetiche.

*Difficoltà riscontrata.* Nella scuola media, la scelta delle operazioni aritmetiche da utilizzare per la soluzione di un problema è “instabile” nel senso che spesso gli allievi fanno dipendere tale scelta da fattori estranei alla struttura matematica del problema.

Esempio 1.

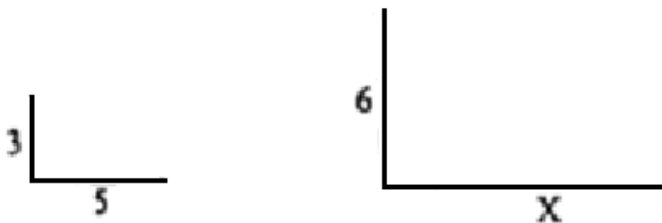
*Problema A.* Quattro etti di caffè costano 7000 lire. Quanto costano 2 etti di caffè?

*Problema B.* Quattro etti di caffè costano 7000 lire. Quanto costano  $1/2$  etto di caffè?

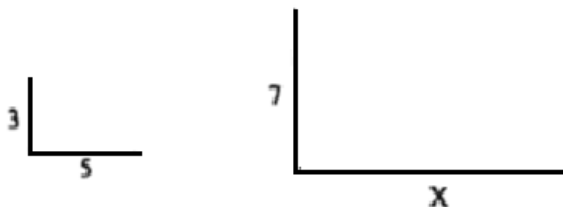
I due problemi sono strutturalmente identici. Eppure molti allievi che sono capaci di risolvere correttamente il problema A commettono errori di impostazione nella risoluzione del problema B (tipicamente, scambiano un'operazione di moltiplicazione per una divisione).

Esempio 2.

*Problema A.* La figura disegnata a destra è simile a quella disegnata a sinistra. Calcola la lunghezza del segmento contrassegnato con  $X$ .



*Problema B.* La figura disegnata a destra è simile a quella disegnata a sinistra. Calcola la lunghezza del segmento contrassegnato con  $X$ .



Anche questi due problemi sono strutturalmente identici. Cambiano solo i dati numerici. Ma ciò basta a fa sì che molti allievi, capaci di usare una strategia moltiplicativa (corretta) nel caso del problema A (6 è il doppio di 3, quindi anche  $X$  deve essere il doppio di 5, ossia  $X = 2 \cdot 5 = 10$ ), optino per una strategia additiva (errata) nel caso del problema B ( $7 - 3 = 4$ , “quindi” anche  $X - 5 = 4$ , ossia  $X = 9$ ).

In entrambi gli esempi, l’instabilità nella scelta delle operazioni aritmetiche viene alla luce quando i dati numerici del problema sono percepiti come “antipatici” dai solutori. Piuttosto che affrontare calcoli ritenuti complicati, gli allievi optano per schemi di calcolo alternativi errati.

Per ulteriori approfondimenti, rinvio all’articolo [4].

*Antidoto.* Nella scuola secondaria superiore l’insegnamento dell’*algebra* dovrebbe contribuire a superare questa instabilità, abituando gli allievi a scindere il momento progettuale (scelta delle operazioni) dal momento esecutivo (svolgimento dei calcoli). Se questo obiettivo fosse raggiunto, ci si potrebbe aspettare nel caso dell’esempio 1 una risposta del tipo:

*Pongo:*

$P$ =prezzo unitario (di un etto di caffè, espresso in lire)

$Q$ =quantità di caffè acquistata (in etti)

$X$ =prezzo corrispondente alla quantità  $Q$  (in lire).

Il legame tra  $P$ ,  $Q$ ,  $X$  è espresso dalla formula:  $X = P \cdot Q$ .

Quindi, qualunque siano i valori numerici di  $P$  e di  $Q$ , li sostituisco e ottengo il risultato ...

Ma raramente si registra un successo di questo tipo!

*Cos'è che non va.* Nel tentativo di parcellizzare le difficoltà dell'argomento, il calcolo letterale viene presentato come un puro gioco di simboli privi di significato, da maneggiare secondo determinate regole formali. Ma proprio per questo l'algebra rimane un corpo estraneo, avulso dalle altre conoscenze matematiche. Per es. non si chiede quasi mai agli allievi di tradurre un problema, formulato a parole, nella corrispondente espressione algebrica. Perfino il naturale collegamento dell'algebra con l'aritmetica, ossia l'esercizio di sostituire dei numeri al posto delle lettere, viene trascurato oppure, per ben che vada, proposto solo saltuariamente e sempre con numeri "addomesticati" (in genere numeri interi piccoli, preferibilmente positivi).

*Cos'è che andrebbe fatto.* Di fronte ad un qualsiasi problema matematico l'insegnante dovrebbe esigere sempre, ad ogni livello scolastico, sistematicamente e in modo esplicito, la scelta di una strategia, prima di imbarcarsi nei calcoli.

Se poi i dati numerici del problema sono "antipatici", un utile consiglio viene da Polya [5]: riformula lo stesso problema con dati numerici più semplici e familiari, scegli la strategia risolutiva appropriata nel caso che ti è familiare, poi applica la stessa strategia al problema in questione.

In linea generale, sarebbe opportuno alternare problemi con dati "addomesticati" a problemi strutturalmente analoghi ma con dati più realistici e quindi più "antipatici" (numeri non interi espressi in forma frazionaria o decimale, numeri negativi, ecc.).

## **2. Fiducia mal riposta negli strumenti di calcolo.**

*Difficoltà riscontrata.* Nella scuola media sono frequenti gli errori di calcolo specificamente imputabili ad un uso scorretto delle calcolatrici tascabili.

Esempio. *Calcolare*

$$\frac{(14 - 5) \cdot 19}{(69 - 31) \cdot 18}$$

Gli allievi che dispongono di una calcolatrice tascabile non programmabile si limitano spesso a premere nell'ordine i tasti:

$$14 - 5 \times 19 : 69 - 31 \times 18.$$

Ottono così un risultato (sbagliato):  $-513,39\dots$

Anche gli allievi che dispongono di una calcolatrice programmabile si limitano spesso a premere nell'ordine i tasti:

$$(14 - 5) \times 19 : (69 - 31) \times 18.$$

E anche in questo caso ottengono un risultato sbagliato: 81.

In entrambi i casi l'errore sta nel fatto che la traduzione dell'espressione numerica in una sequenza di comandi per la calcolatrice non rispetta le priorità delle operazioni. Nel caso non programmabile l'errore è palese: sono state ignorate le parentesi presenti nell'espressione. Nel caso programmabile l'errore è più riposto: la linea di frazione "nasconde" una ulteriore coppia di parentesi che racchiude tutto il denominatore. In assenza di tale coppia di parentesi, la calcolatrice considera erroneamente il fattore 18 al numeratore anziché al denominatore.

*Antidoto.* Nella scuola secondaria *superiore* l'insegnamento dell'*informatica*, e più specificamente la familiarità con gli *strumenti di calcolo elettronico*, dovrebbe contribuire a superare l'inconveniente.

*Cos'è che non va.* Purtroppo il "Laboratorio di Informatica" viene utilizzato solo saltuariamente. Inoltre i calcolatori non sono disponibili proprio quando maggiormente servirebbero, ossia per le normali attività matematiche in classe e a casa.

È ben vero che ormai tutti gli studenti di calcolatrici tascabili fin troppo sofisticate. Ma assurdamente qualche insegnante (anche tra quelli impegnati in sperimentazioni informatiche) ne vieta addirittura l'uso: nella maggior parte dei casi gli insegnanti le tollerano ma non aiutano minimamente gli allievi a capire la logica del loro funzionamento. Eppure consentire l'uso di una calcolatrice senza adeguata conoscenza dello strumento è un po' come consentire la guida di un'automobile senza patente!

Le difficoltà collegate all'uso degli strumenti di calcolo perdurano oltre le soglie dell'università. Personalmente ho constatato negli elaborati dei miei studenti dei primi anni universitari la presenza di frequenti errori da calcolatrice, derivati per es. dall'aver premuto il tasto "log" in luogo di "ln" per i logaritmi, oppure il tasto dei "deg" o dei "grad" in luogo dei "rad" per le ampiezze angolari, ecc.

*Cos'è che andrebbe fatto.* Sarebbe altamente istruttivo evidenziare analogie e differenze con i calcoli con carta e penna e gli stessi calcoli effettuati con diversi tipi di calcolatrici e magari con un calcolatore, per esempio in Pascal o in BASIC. Ciò consentirebbe tra l'altro interessanti riflessioni sulle convenzioni per l'ordine di precedenza delle operazioni, nonché confronti tra gli interi e gli "integer", tra i reali e i "real", tra i diversi significati del segno "meno" (per calcolare  $5^{-3}$ , qual è la sequenza di tasti da premere su una calcolatrice?), tra i diversi significati dell'operazione di divisione, ecc.

Naturalmente, data la grande varietà di calcolatrici in commercio, l'insegnante non potrà entrare in troppi dettagli tecnici. Ma potrà almeno stimolare gli allievi a leggere con attenzione le avvertenze e le istruzioni per l'uso.

Inoltre, potrà raccomandare agli allievi di controllare sempre la "sensatezza" dei risultati ottenuti. Per esempio, nel caso dell'espressione che ha fornito lo spunto di queste riflessioni, anche ad un esame superficiale si vede che tutti i fattori, sia al numeratore che al denominatore, sono positivi, quindi un risultato negativo come  $-513,39$  è certamente sbagliato!

Un ulteriore consiglio è quello di valutare "ad occhio" l'ordine di grandezza del risultato. Si può ragionare per esempio così: arrotondo  $14 - 5$  a 10; arrotondo  $69 - 31$  a 40. Quanto ai due numeri 19 (al numeratore) e 18 (al denominatore), essi sono circa uguali, quindi il loro rapporto vale circa 1. In definitiva, il valore dell'espressione dovrà essere circa  $1/4$ . Il fatto che nel caso particolare tale valore risulti esattamente  $1/4$  è irrilevante in questo contesto. Ma già il calcolo grossolano dell'ordine di grandezza consente di concludere che un risultato come  $-513,39$  o come 81 è certamente sbagliato!

Al di là dell'esempio specifico, una ragionevole valutazione dell'ordine di grandezza del risultato atteso consente di scoprire la maggior parte degli errori da calcolatrice, derivanti, per esempio, da dati immessi in modo scorretto (tipicamente una cifra saltata o la virgola male posizionata) o dall'essersi dimenticati una coppia di parentesi e simili.

### **3. Insensibilità agli ordini di grandezza.**

*Difficoltà riscontrata.* Alla fine del punto precedente ho evidenziato l'utilità di controllare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico,

Anche nei contesti applicativi e nelle attività della vita quotidiana, la capacità di stimare ragionevolmente gli ordini di grandezza delle quantità con le quali si ha a che fare è fondamentale, e dovrebbe far parte della cultura di base del cittadino o, nel caso dei nostri allievi, del futuro cittadino, qualunque sia la sua professione, presente o futura. Ma la scuola non promuove questa capacità.

Per chiarire ciò che intendo dire, mi limito a proporre due esempi particolarmente semplici, tra i numerosissimi possibili.

Esempio 1. *Qual è all'incirca la superficie dell'Italia?*

Esempio 2. *Qual è all'incirca il numero di professori di matematica che insegnano nelle scuole secondarie superiori italiane?*

Molti interlocutori restano disorientati di fronte a domande di questo tipo e si limitano a cercare affannosamente le risposte nella loro memoria; il più delle volte non le trovano, o ne trovano di sbagliate e non sono poi capaci di valutare la sensatezza di quanto asserito, né sono capaci di dedurre risposte sensate da informazioni indirette delle quali pure dispongono.

Così, nel caso dell'esempio 1 può darsi che interlocutore, specie se ancora fresco degli studi di geografia, ricordi confusamente che la superficie dell'Italia misura circa 30 000 km<sup>2</sup>, o forse 300 000 km<sup>2</sup>, o magari 3 000 000 km<sup>2</sup>. Quale sarà la risposta più vicina al valore vero? Sono possibili varie strategie per dirimere la questione. Per esempio, chiunque abbia percorso almeno una volta la nostra penisola in automobile o in treno, sa che per andare dal Tirreno all'Adriatico si impiegano circa 3 ore di autostrada (o superstrada o treno intercity). Analogamente, per andare dalla Pianura Padana alla Calabria o alla Puglia si impiegano circa 10 ore. Calcolando una velocità media di circa 100 km/h, le lunghezze dei due percorsi possono essere stimate rispettivamente in 300 km e in 1000 km. A questo punto assimilando l'Italia ad un rettangolo coi lati delle dimensioni suddette, si constata che l'unica risposta ragionevole è quella intermedia: 300 000 km<sup>2</sup>.

Anche nel caso dell'esempio 2, in mancanza di informazioni dirette, occorre assumere come punto di partenza qualche dato indiretto, correlato al problema che ci interessa. Per esempio si può stimare in 500 000 il numero complessivo degli studenti di ciascun anno di scuola secondaria superiore (dati più precisi vengono forniti all'inizio di ogni anno scolastico, o in occasione degli esami di maturità, dai giornali e dalla televisione). In totale, considerando i 5 anni di scolarità, si tratta di circa 2 500 000 studenti. Ad una media di 35 studenti per classe, vuol dire che le classi sono circa 100 000. Poiché un professore di matematica insegna mediamente in 3 o 4 classi, si conclude che il numero dei professori di matematica è ragionevolmente compreso tra i 25 000 e i 33 000.

*Antidoto.* Nella scuola secondaria superiore la familiarità con le potenze di 10 e con le diverse *unità di misura* (anche in collegamento con la fisica) dovrebbe favorire la capacità di valutare in maniera sensata gli ordini di grandezza. Grazie alla maggiore maturità, gli allievi dovrebbero essere anche capaci di reperire autonomamente i dati mancanti di un problema, consultando fonti appropriate.

*Cos'è che non va.* La difficoltà che gli studenti incontrano in questo ambito sono a mio avviso di tipo più psicologico che matematico. Essi non sono abituati ad affrontare problemi con dati mancanti, da cercare al di fuori del loro libro di testo, né problemi con dati sovrabbondanti, tra i quali individuare quelli rilevanti per il caso specifico. Restano quindi disorientati di fronte alla mancanza di un percorso obbligato quando si tratta di effettuare stime ragionevoli. Partendo da dati grezzi diversi o seguendo percorsi diversi, è naturale giungere a risultati diversi (sia pure più o meno dello stesso ordine di grandezza). Ma questa eccessiva libertà cozza contro una prassi consolidata che identifica la matematica con la pura e semplice applicazione di “ricette” univocamente prescritte. A sfogliare i libri di matematica della scuola secondaria superiore sembra quasi che non esistano problemi insolubili, né problemi che ammettono una pluralità di soluzioni!

Vorrei aggiungere che nella scuola secondaria superiore la capacità di effettuare stime ragionevoli tende a peggiorare rispetto alla scuola elementare e media, perché le (sporadiche) applicazioni della matematica riguardano per lo più misure poco familiari, del cui ordine di grandezza manca una chiara percezione a livello intuitivo (intensità di corrente, capacità di un condensatore, lunghezza d'onda di un ultrasuono, o simili).

*Cos'è che andrebbe fatto.* Si dovrebbe prendere atto, senza ipocrisie, del fatto che i calcoli complicati possono essere utilmente demandati ai mezzi di calcolo elettronici; al tempo stesso si dovrebbe esigere sistematicamente un controllo mentale grossolano della sensatezza dell'ordine di grandezza del risultato. Per es., più in là negli studi, rendersi conto che l'integrale di una funzione i cui valori sono tutti compresi tra 0 e 1, esteso ad un intervallo di estremi 2 e 7, non può essere un numero negativo, né un numero maggiore di 5.

Quanto alle stime in contesti applicativi, non è il caso di trattarle alla stregua di un argomento a sé stante. È preferibile favorire il graduale formarsi di una sensibilità agli ordini di grandezza delle quantità in gioco, anche in collegamento con altre discipline o attraverso un esame critico di notizie di attualità diffuse dai giornali o dalla televisione. Per es. valutare la sensatezza o meno di affermazioni più o meno vaghe in campo ecologico, stimando l'entità di un certo tipo di inquinamento e l'adeguatezza o meno delle misure invocate per porvi rimedio.

#### **4. Scarsa attenzione agli arrotondamenti numerici e alle cifre significative.**

*Difficoltà riscontrata.* Le “stime”, alle quali ho accennato nel paragrafo precedente, rappresentano un modo molto grossolano (ma spesso l'unico possibile) di usare la matematica in contesti extra-matematici. All'estremo opposto si colloca il cosiddetto problema della “propagazione degli errori”: se il risultato di un calcolo dipende da certi dati che sono noti con una certa precisione, cosa si può dire in merito alla precisione del risultato? Viceversa, se interessa conoscere il risultato di un calcolo con una data precisione, con quale precisione occorre conoscere i dati di partenza?

Esempio. *Calcolare la lunghezza della circonferenza  $C$  circoscritta ad un quadrato di lato unitario ed esprimere il risultato con 2 cifre esatte dopo la virgola.*

Ecco lo schema di una risposta tipica di molti studenti. La lunghezza di  $C$  è data dalla formula

$$C = \pi \cdot \sqrt{2}.$$

Sostituisco  $\pi$  coll'espressione decimale 3,14 (due cifre esatte) e  $\sqrt{2}$  coll'espressione decimale 1,41 (due cifre esatte). Effettuo la moltiplicazione e ottengo 4,4274. Poiché mi sono state chieste due sole cifre esatte “butto via” le ultime due cifre, non richieste. In definitiva:  $C = 4,42 \dots$

Non è così che si deve ragionare! L'imprecisione dovuta al troncamento dei valori numerici di  $\pi$  e di  $\sqrt{2}$  si ripercuote fin sulla seconda cifra decimale del prodotto. Partendo da espressioni decimali di  $\pi$  e di  $\sqrt{2}$  con un maggior numero di cifre esatte, si constata che la risposta corretta è:  $C = 4,44 \dots$

Qualcuno forse giudicherà eccessiva questa pignoleria; in fondo si tratta solo di un errore insignificante sull'ultima delle cifre richieste. Ma il fatto grave non è l'entità dell'errore, bensì la mancata attenzione al problema della propagazione degli errori. In situazioni non molto diverse da quella dell'esempio proposto, la mancata attenzione alla propagazione degli errori può portare a risultati assurdi e paradossali, specie quando si demanda acriticamente l'esecuzione dei calcoli a calcolatrici o a calcolatori elettronici. Per ulteriori esempi, rinvio al testo [6], lez. 15.

Aggiungo, per inciso, che spesso in luogo di  $C = 4,44 \dots$  gli allievi scrivono  $C = 4,44$  (senza i puntini). Mentre la prima scrittura è accettabile in quanto i punti stanno a significare che l'espressione decimale di  $C$  prosegue con altre cifre non specificate, la scrittura  $C=4,44$  è sbagliata, in quanto si tratta di un'uguaglianza solo approssimata, non esatta. Un'alternativa accettabile è quella di usare il segno “ $\simeq$ ” (che si legge: “circa uguale”) e scrivere quindi  $C \simeq 4,44$ .

*Antidoto. Regole di propagazione degli errori; numeri reali e loro rappresentazioni decimali finite, arrotondamenti e troncamenti numerici.*

*Cos'è che non va.* Per ben che vada, nell'insegnamento tradizionale le regole di propagazione degli errori restano confinate in posizione marginale, nei manuali di fisica. Chissà poi perché? Che sia per via della parola “errore” alla quale viene associato un significato negativo?

Lo studio dei numeri reali col metodo delle coppie di classi contigue o con le successioni di Cauchy (o simili), anche nei rari casi in cui viene svolto, rimane sterile perché scollegato dalle problematiche del calcolo numerico approssimato.

*Cos'è che andrebbe fatto.* Non sono necessarie trattazioni teoriche complicate. Basta un po' di attenzione e di buon senso per capire che da

$$3,14 < \pi < 3,15 \quad \text{e} \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

si deduce solo

$$4,4274 < \pi \cdot \sqrt{2} < 4,4730$$

mentre da

$$3,14 < \pi < 3,142 \quad \text{e} \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

si deduce

$$4,441374 < \pi \cdot \sqrt{2} < 4,445930$$

per cui nel primo caso solo la prima cifra dopo la virgola è "sicura", mentre nel secondo caso lo sono le prime due.

Il messaggio che dovrebbe scaturire da queste considerazioni è: se i dati in entrata sono poco precisi, anche i dati in uscita sono inevitabilmente poco precisi. Quindi, se i risultati vengono riportati con troppe cifre decimali, la precisione è illusoria, al limite fuorviante. Se si vogliono ottenere risultati più precisi, occorre partire da dati più precisi.

Nello stesso ordine di idee, di fronte ad un problema del tipo: "*Un'automobile consuma mediamente 1 litro di benzina per percorrere 14 km. Quanta benzina è necessaria per percorrere 320 km?*" vanno vivamente scoraggiate risposte del tipo 22,857132 litri, anch'esse conseguenza di un uso acritico delle calcolatrici. Si può invece discutere se sia più sensato arrotondare il risultato all'intero più vicino (ossia a 23 litri), o alla prima, o alla seconda cifra dopo la

virgola, tenendo conto dell'imprecisione implicita nei dati del problema (per ulteriori approfondimenti, rinvio all'articolo [8]).

## 5. Uso scorretto di percentuali

*Difficoltà riscontrata.* All'inizio dell'esposizione avevo affermato: non è scontato che quello che viene imparato resti poi stabilmente acquisito per tutta la vita. La conferma più emblematica viene dall'argomento "percentuali". Il tema è trattato nella scuola media, ma non più ripreso nel corso degli studi successivi. E gli effetti si vedono! Provate per es. a chiedere ai vostri studenti di tradurre in una formula matematica un'affermazione del tipo:

*La benzina, che prima costava 1780 lire al litro è aumentata del 15%. Quanto costa adesso?*

Non è escluso che qualcuno scriva:

$$\text{Prezzo attuale} = 1780 + 15\%$$

o addirittura

$$1780 + 15 = 1795.$$

Se poi volete porre una domanda veramente "difficile", provate con questa:

*Una soluzione è costituita dal 70% di alcool e dal 30% di acqua. Quanta acqua si deve aggiungere alla soluzione per ottenere una nuova soluzione costituita dal 40% di alcool e dal 60% di acqua?*

Vi potete aspettare una notevole varietà di risposte, in buona parte sbagliate. La principale difficoltà sta nel fatto che le percentuali non rappresentano di per se stesse delle quantità, ma solo rapporti tra quantità. Quindi nell'esempio specifico non ha senso cercare una risposta del tipo: "si devono aggiungere *tot* kilogrammi di acqua". La struttura della risposta dovrà essere invece del tipo: "ad ogni kilogrammo di soluzione devo aggiungere *tot* kilogrammi di acqua", oppure: "devo mescolare la soluzione iniziale con acqua nella proporzione di 1 a *tot*". (Nel problema specifico, il *tot* è di 0,75 kilogrammi di acqua per ogni kilogrammo di soluzione).

*Antidoto.* Uso di notazioni percentuali nell'ambito della *statistica* e della *probabilità*.

*Cos'è che non va.* L'argomento "percentuali" ha scarso rilievo teorico. Quindi viene emarginato dai programmi delle scuole secondarie superiori. D'altra parte ha notevole rilievo pratico. Quindi occorre conoscerlo bene per riuscire a destreggiarsi non solo nei problemi di concentrazioni e diluizioni ma più in generale per comprendere e interpretare correttamente le molteplici informazioni di natura quantitativa, riportate quotidianamente dai giornali e dalla televisione, informazioni espresse quasi sempre in forma percentuale (dal tasso di inflazione all'esito di un referendum o di un'elezione, allo sconto praticato sui prezzi di listino in occasione di una campagna promozionale).

*Cos'è che andrebbe fatto.* Una strategia ragionevole è quella di usare con una certa frequenza, lungo tutto l'arco di studi, dati espressi in forma percentuale nella formulazione di problemi ed esercizi attinenti ad altri capitoli della matematica. A titolo di esempio, si veda la formulazione del problema 2 che propongo al successivo paragrafo 6.

All'estero, in particolare in Inghilterra, è diffusa l'abitudine di inserire con una certa frequenza le nozioni e le nozioni delle quali si vuole evitare l'obsolescenza nei problemi e negli esercizi assegnati durante tutto l'arco degli studi. Non vedo perché da noi si tenda a confinare l'uso delle percentuali (ma lo stesso si può dire dei radicali, dei logaritmi, delle funzioni trigonometriche, ecc.) nei soli esercizi specificamente riferiti al corrispondente capitolo "teorico". Così facendo, si aumenta la frammentazione del sapere matematico e si rende meno flessibile la sua utilizzazione in contesti diversi.

## 6. Stereotipo della proporzionalità diretta e inversa, esteso a contesti non pertinenti

*Difficoltà riscontrata.* Nella scuola elementare e media si pone notevole enfasi nello studio della proporzionalità diretta e inversa. Ciò è pienamente giustificato dal fatto che assai spesso le grandezze con cui si ha a che fare nella vita quotidiana sono legate tra loro da relazioni di proporzionalità diretta o inversa (“Se 1 etto di caffè costa 1750 lire,  $X$  etti di caffè costano  $1750 \cdot X$  lire”; “Se, viaggiando ad una velocità costante di 100 km/h, si impiegano 3 h per compiere un certo tragitto, allora viaggiando alla velocità costante di  $X$  km/h si impiegano  $3 \cdot 100/X$  ore per compiere lo stesso tragitto, ecc.). Ma ad un certo momento nel corso degli studi è inevitabile imbattersi in relazioni che non sono di proporzionalità diretta né inversa. Ecco due esempi:

Problema 1. *Una statua di marmo alta 1,20 m pesa 95 kg. Quanto peserà una statua di marmo, in tutto simile alla precedente, alta 1,50 m?*

Problema 2. *La popolazione di una nazione cresce ad un tasso annuo del 3%. Sapendo che attualmente quella popolazione ammonta a 27 milioni di abitanti, e nell'ipotesi che il tasso annuo di crescita rimanga costante nel tempo, a quanto ammonterà la popolazione tra 50 anni?*

Molti studenti (e anche molti adulti) hanno difficoltà a staccarsi dal modello della proporzionalità diretta e ad usare le schematizzazioni matematiche corrette.

Nel caso del problema 1, si tratta “ovviamente” di una relazione di proporzionalità cubica: il fattore di ingrandimento lineare tra le due statue è 1,25 quindi il fattore di ingrandimento volumetrico è  $1,25^3$  e pertanto il peso della nuova statua sarà di  $95 \cdot 1,25^3 \text{ kg} \approx 186 \text{ kg}$ .

Quanto al problema 2, la popolazione aumenta di anno in anno secondo una progressione geometrica di ragione 1,03. Quindi tra 50 anni la popolazione sarà di  $27 \cdot 1,03^{50} \approx 118$  milioni di abitanti.

*Antidoto.* Studio di *funzioni*, in particolare *funzioni potenza* (base variabile ed esponente costante) e *funzioni esponenziali* (base costante ed esponente variabile).

*Che cos'è che non va.* Ancora una volta la causa principale della difficoltà ad individuare il modello matematico appropriato è a mio parere un'eccessiva frammentazione dell'insegnamento-apprendimento: le progressioni aritmetiche e geometriche, le funzioni lineari, quadratiche, cubiche, esponenziali, ecc. vengono trattate in momenti diversi, senza collegamenti significativi tra loro e senza riferimenti alle modellizzazioni matematiche dei più importanti fenomeni di accrescimento o decadimento (al variare delle dimensioni corporee come nel problema 1, o al variare del tempo come nel problema 2).

Trattandosi di tematiche che sono per loro natura interdisciplinari, il docente di matematica tende a scaricare le attività di costruzione di modelli matematici sui colleghi di discipline "sperimentali" e viceversa.

Stando così le cose, non c'è da meravigliarsi se lo stereotipo della proporzionalità diretta riaffiora alla prima occasione, nei contesti più svariati, per esempio con la comparsa di errori del tipo

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \log(a+b) = \log a + \log b$$

$$\cos(a+b) = \cos a + \cos b$$

e analoghi.

*Cos'è che andrebbe fatto.* Tra le molte proprietà, spesso irrilevanti, che nei nostri libri di testo si trovano evidenziate con l'uso di vari accorgimenti tipografici, mi ha sempre stupito lo scarso rilievo dato a quella che a mio avviso è la proprietà più significativa delle *similitudini*:

Se due figure (regolari o irregolari, del piano o dello spazio) sono simili, con rapporto di similitudine  $k$ , allora:

- gli angoli corrispondenti sono uguali (indipendentemente dal valore di  $k$ )
- le lunghezze corrispondenti stanno tra loro nel rapporto  $k$
- le aree corrispondenti stanno tra loro nel rapporto  $k^2$
- i volumi (nel caso di figure tridimensionali) stanno tra loro nel rapporto  $k^3$ .

Una maggiore attenzione a questa proprietà potrebbe contribuire a sfatare il mito della proporzionalità diretta per quanto si riferisce alle dimensioni corporee.

Allo stesso tempo, potrebbe far capire perché nel caso di una sorgente puntiforme  $S$  l'intensità di luminosa varia, al variare della distanza da  $S$ , non già secondo una legge di proporzionalità inversa, bensì secondo l'inverso del quadrato della distanza (il flusso luminoso per unità di superficie che attraversa una superficie sferica di centro  $S$  e raggio  $R$ , è inversamente proporzionale alla superficie della sfera, ossia è inversamente proporzionale ad  $R^2$ ).

Quanto al modello di crescita o decadimento esponenziale, andrebbe dedicata maggiore attenzione alle progressioni geometriche (nel discreto) e alle funzioni esponenziali (nel continuo), con riferimento a situazioni reali quali il decadimento radioattivo, l'impiego di un capitale ad un interesse composto di tasso costante, la frequenza dei suoni nelle scale musicali, ecc.

Oltre a “studiare funzioni” sarebbe auspicabile che gli allievi si abituassero anche a “congetturare funzioni”. Con questo intendo problemi del tipo: assegnato un insieme di punti in un sistema di riferimento cartesiano, qual è la funzione (scelta tra un numero prestabilito di tipi standard) che passa per quei punti o quanto meno passa “il più vicino possibile” ad essi?

Infine, per far scoprire analogie e differenze tra i vari tipi di funzioni, possono essere utili domande qualitative come le seguenti, che richiedono riflessioni teoriche e abilità nella individuazione di esempi e controesempi mirati:

*È vero che ogni funzione lineare è una funzione di proporzionalità diretta? È vero il viceversa?*

*È vero che ogni funzione crescente è una funzione di proporzionalità diretta? È vero il viceversa?*

## **7. Fraintendimenti in ambito probabilistico**

*Difficoltà riscontrata.* Il calcolo delle probabilità è il settore nel quale si registra la maggiore discordanza tra le convinzioni dei “profani” e le risposte fornite dalla teoria “ufficiale”.

Ecco due possibili “provocazioni” per una discussione in classe.

*Domanda 1.* *Nell’ultima estrazione del lotto sono usciti sulla ruota di Napoli i numeri 13, 17, 50, 2 e 88. Invece, sulla stessa ruota, i numeri 48 e 84 non escono ormai da 89 settimane.*

*Volendo giocare un ambo, sempre sulla ruota di Napoli, puntereste più volentieri sui numeri 13 e 17 o sui numeri 48 e 84?*

*Domanda 2.* *Esistono in commercio programmi (che si autodefiniscono “scientifici”) per elaborare al computer sistemi per le giocate del totocalcio. Allo scopo di ridurre il costo delle giocate, questi programmi prevedono in genere l’esclusione delle colonne nelle quali uno stesso segno (1, X, 2) compare 5 o più volte di seguito. Infatti l’esperienza insegna che eventi siffatti si verificano solo assai raramente.*

*Ritenete che questa strategia di gioco sia ragionevole?*

Può darsi che qualche studente, in ambiente scolastico, si senta in dovere di rispondere secondo le aspettative del docente, vale a dire, per la prima domanda: “è indifferente, perché il caso non ha memoria” e per la seconda domanda: “no, non è ragionevole, perché gli esiti delle singole partite sono eventi indipendenti tra loro”.

Ma è quasi certo che in cuor suo anche quello studente la pensi esattamente come la gran maggioranza dei giocatori incalliti: “le risposte date dalla teoria sono una cosa; ciò che succede in pratica, però,... è tutt’altra cosa!”

*Antidoto.* *Calcolo delle probabilità e statistica (descrittiva e induttiva).*

*Cos'è che non va.* L'esposizione di una teoria matematica, accompagnata da qualche esempio e da qualche esercizio più o meno asettico, non è certo sufficiente a modificare le preesistenti convinzioni "ingenu" su quello che succede in pratica. La causa dello scetticismo diffuso per quanto riguarda l'aderenza fra teoria e pratica ha radici lontane: è sotto gli occhi di tutti che i modelli elementari della fisica sono molto grossolani e quindi scarsamente aderenti alla realtà (si trascura l'attrito, la resistenza dell'aria, la deformabilità dei corpi "rigidi"; si postula l'esistenza di corpi "puntiformi" ecc.). Perché mai nel caso della probabilità l'aderenza fra teoria e pratica dovrebbe essere maggiore? Ma poi, è proprio vero che tale aderenza è sempre perfetta? Se non si affrontano di petto questi interrogativi, è quasi certo che la teoria della probabilità "ufficiale" non riuscirà a soppiantare le convinzioni "ingenu" dei nostri interlocutori.

*Cos'è che andrebbe fatto.* Uno dei nodi cruciali sta nel far comprendere il concetto di eventi "indipendenti". Non mi riferisco alla definizione matematica, bensì alla difficoltà di stabilire in contesti applicativi, se due eventi possono considerarsi indipendenti o meno. Ad un esame più approfondito si constata che il caso degli eventi indipendenti è assai meno frequente di quanto potrebbe sembrare a prima vista.

Esempio banalissimo: vincere il primo premio di una lotteria ed essere coinvolti nello stesso giorno in un incidente stradale sono apparentemente due eventi indipendenti. Ma siamo proprio sicuri che la vincita non modifica l'abituale comportamento del vincitore e non altera quindi la sua probabilità di incorrere in un incidente stradale?

La morale di questa osservazione è che i problemi di probabilità che contengono o sottintendono una frase del tipo: "Supponiamo che gli eventi A e B siano indipendenti ..." rischiano di essere poco aderenti alla realtà, esattamente come lo sono i problemi di fisica che iniziano con: "Supponiamo che gli attriti siano trascurabili ...".

Proprio per questo motivo, quelle rare situazioni nelle quali si ha a che fare con eventi effettivamente indipendenti sono da evidenziare con particolare cura (tale è per es. il caso delle estrazioni del lotto in settimane diverse).

A questo punto dovrebbe essere più chiara la genesi psicologica di molte convinzioni errate in ambito probabilistico. Si tratta di comportamenti dettati dall'esperienza quotidiana, comportamenti che sono ragionevoli se riferiti ad eventi in qualche modo correlati tra loro, ma che perdono la loro ragionevolezza proprio quando vengono applicati al caso eccezionale degli eventi indipendenti. Capita la genesi dell'errore, sarà più facile superarlo.

Tornando per un attimo al caso degli eventi dipendenti, un altro nodo cruciale è rappresentato dal teorema di Bayes, che andrebbe adeguatamente enfatizzato nell'insegnamento secondario superiore. L'enunciato è elementare, ma le sue applicazioni sono molteplici, non banali, spesso sorprendenti. Per esigenze di spazio, non posso entrare in maggiori dettagli, ma sono convinto che si tratta di uno dei risultati matematici più indicati per interessare e coinvolgere i nostri studenti e per contribuire tra l'altro ad una corretta informazione su problematiche socialmente rilevanti, quali per es. i rischi di trasmissione delle malattie ereditarie.

Infine, qualche parola sulla "legge dei grandi numeri". Anche questo importante risultato è fonte di gravi fraintendimenti, sia perché la nozione di limite in senso probabilistico non coincide con la nozione di limite dell'analisi, sia perché non è agevole distinguere il comportamento delle frequenze assolute  $F_{ass}$  da quello delle corrispondenti frequenze relative  $F_{rel}$ . Detto alla buona: all'aumentare del numero  $N$  delle prove,  $F_{rel}$  tende al valore teorico previsto  $P(E)$ , mentre non è detto che  $F_{ass}$  si avvicini progressivamente ad  $N \cdot P(E)$ . Per risolvere questo apparente paradosso e capire come stanno realmente le cose, trovo particolarmente indicato il ricorso a qualche simulazione numerica al calcolatore, con l'uso dei numeri pseudo-casuali.

## **8. Mancanza di allenamento a schematizzare geometricamente la realtà tridimensionale.**

*Difficoltà riscontrata.* Nonostante le indicazioni dei programmi di tutti gli ordini scolastici, la geometria che di fatto si insegna è quasi unicamente quella piana. Anzi, è la geometria del “microspazio” (il foglio di carta, la pagina del libro o del quaderno). Non c’è quindi da meravigliarsi se già problemi di geometria piana, ma riferiti al “macrospazio” che ci circonda, danno luogo a difficoltà. A cominciare dal sapersi orientare in una località sconosciuta consultando una pianta della città. Come si fa ad individuare un punto di riferimento iniziale? Come si fa a rendersi conto se si sta percorrendo una strada nel verso voluto o in quello opposto? Come si fa a stimare la lunghezza di un percorso, a partire da informazioni desumibili dalla pianta?

Ben maggiori sono le difficoltà nel caso di problemi di geometria tridimensionale. Per esempio in [3] si trova un’interessante analisi delle difficoltà incontrate da un gruppo di studenti di terza media, di fronte alla consegna di determinare il volume di un oggetto a forma di piramide (era stata lasciata agli studenti la scelta della strategia per acquisire i dati necessari effettuando opportune operazioni di misura).

Ugualmente interessante l’analisi delle situazioni presentate in [1].

Ecco un altro esempio di domanda semplice ma “imbarazzante”:

*Come individuare la posizione apparente del sole in cielo, ad un dato momento della giornata?*

Posso assicurare che anche studenti universitari di discipline scientifiche balbettano risposte inconcludenti, che iniziano più o meno così: “Fisso un sistema di coordinate cartesiane ortogonali,...”. Va da sé che le coordinate adatte allo scopo sono quelle polari (con origine nel punto di osservazione e piano di riferimento identificato col piano orizzontale sul quale si trova l’osservatore).

Volendo infierire ulteriormente, basta chiedere ai nostri interlocutori come farebbero concretamente a misurare, senza strumenti sofisticati, l'altezza del sole sull'orizzonte, ossia l'angolo che un raggio solare forma col piano di riferimento orizzontale. Pochissimi riescono a dare una risposta sensata; quasi nessuno ricorre all'antica strategia, attribuita a Talete, di conficcare un bastone verticale nel terreno orizzontale, di misurare la lunghezza del bastone e quella della sua ombra, di riportare poi il tutto su un foglio da disegno per misurare infine col goniometro l'ampiezza dell'angolo richiesto.

E come andrebbe modificata la risposta, se si trattasse di individuare la posizione nel cielo di una stella o di un aereo?

*Antidoto. Geometria (sintetica e analitica) dello spazio tridimensionale. Coordinate polari e cilindriche.*

*Cos'è che non va.* Nella scuola secondaria superiore la geometria sintetica del piano e – nei rari casi in cui se ne parla – dello spazio, è trattata da un punto di vista ipotetico-deduttivo. In tale ottica, il ruolo della percezione visiva viene considerato marginale o addirittura potenzialmente fuorviante. Posso essere d'accordo a distinguere nettamente la fase di “scoperta” empirica di una proprietà su un disegno o su un modellino, e la fase di “dimostrazione” della medesima proprietà nell'ambito di una sistemazione teorica basata su concetti primitivi, assiomi, definizioni formali, teoremi, ecc. Non posso invece essere d'accordo con chi sottovaluta l'importanza della prima fase, quella che ho chiamato di “scoperta” e che è frutto di un'attenta osservazione del disegno o del modellino in questione. Emblematico, a sostegno dell'importanza della fase euristica, il motto kantiano che Hilbert, uno dei più convinti fautori del rigore matematico, ha voluto premettere in epigrafe al suo famosissimo trattato “Fondamenti della geometria”: *E così dunque ogni umana conoscenza inizia con osservazioni, passa poi a concetti e culmina con idee.*

Quanto alla geometria analitica, la sua importanza e la potenza dei suoi metodi sono fuori discussione. Purtroppo però la manipolazione algebrica delle formule prende spesso il sopravvento

sull'interpretazione del loro significato geometrico. Inoltre è riduttivo centrare tutta l'attenzione sulle coordinate cartesiane, trascurando quelle polari e cilindriche, il cui impiego è tanto più naturale in geografia, in astronomia, e in tutte quelle situazioni nelle quali esiste un punto di riferimento privilegiato (quello nel quale si trova l'osservatore).

*Cos'è che andrebbe fatto.* Vi è ampia concordanza di vedute sul fatto che l'intuizione spaziale va specificamente curata nella fascia d'età compresa tra i 12 e i 16 anni. In particolare vanno analizzate con cura le relazioni che intercorrono tra le figure tridimensionali e le loro rappresentazioni bidimensionali, Detto in altri termini: gli oggetti “come sono” e “come si vedono”. Per esempio:

*In una proiezione assonometrica dello spazio su un piano, le lunghezze si conservano?*

- *E le ampiezze angolari?*

- *E il parallelismo?*

- *È possibile che due rette parallele distinte vadano a finire in due rette coincidenti? Perché?*

- *Premesso che due rette sghembe vanno a finire inevitabilmente in due rette complanari, queste ultime possono essere incidenti? Possono essere parallele (distinte)? Possono essere coincidenti? Perché?*

Sia nel caso della geometria del piano che in quella dello spazio, gli studenti andrebbero stimolati ad esplorare situazioni non completamente formalizzate e a formulare congetture prima di passare alla fase delle dimostrazioni. Per queste attività esplorative, l'uso di un opportuno software didattico, come Cabri-géomètre o Sketchpad è estremamente utile, in quanto consente di scoprire proprietà invarianti in ampie classi di figure, senza doversi sobbarcare la fatica di eseguire manualmente un gran numero di disegni.

Quanto alla geometria analitica, mi limito a ribadire ciò che ho già detto in precedenza: la traduzione di fatti geometrici in relazioni algebriche e – viceversa – l'interpretazione geometrica dei risultati

algebrici andrebbe curata sistematicamente, non solo occasionalmente. Infine, quanto allo studio delle coordinate polari e cilindriche, non si tratta di un “lusso” o di un’idiosincrasia dei matematici! Le principali attività umane, che un tempo venivano eseguite manualmente, sono ormai mediate da dispositivi meccanici manovrati per mezzo di istruzioni simboliche opportunamente codificate che, in forma più o meno esplicita, utilizzano sistemi di riferimento polari o cilindrici (dal tornio alle gru, dai comandi per la guida di un aereo al bisturi elettronico).

### **9. Difficoltà ad esprimersi e a ragionare correttamente**

*Difficoltà riscontrata.* Fin dalla scuola elementare e media, gli alunni hanno incontrato un gran numero di definizioni (“Chiameremo numero primo ...”, “La media aritmetica è ...”, “Dicesi angolo ...”). Forse le hanno anche memorizzate. Ma questo non è sufficiente a garantire che abbiano colto gli aspetti essenziali di ciò che vuol dire “definire” in matematica.

A conferma di questo sospetto, basta porre una domanda come la seguente: *Date una definizione di “cubo”*.

Poiché la definizione di “cubo” non rientra tra quelle normalmente memorizzate, ci si possono aspettare risposte assai varie e per lo più inadeguate. C’è chi si limita a dire “Il cubo è un solido con 6 facce” (il che evidentemente non è sufficiente a caratterizzare il cubo) e c’è chi dice: “Il cubo è un solido delimitato da 6 facce quadrate, uguali tra loro, con 8 vertici, 12 spigoli uguali tra loro, 4 diagonali, ecc.” (il che è inutilmente ridondante, almeno dal punto di vista di una definizione matematica). E la capacità di caratterizzare in forma concisa ma univoca un cubo (o qualsiasi altra figura geometrica ben nota) non migliora in modo significativo neppure col proseguire degli studi, cfr. per es. [7].

Anche per quanto riguarda le dimostrazioni, il fatto di averne memorizzato varie decine non sembra migliorare in modo significativo la capacità di ragionare correttamente, di distinguere ipotesi e tesi di un enunciato, di formulare eventuali controesempi per provare che un'affermazione è errata, ecc.

Provate per es. a porre ai vostri studenti una domanda del tipo:

*Nell'antico Egitto, per disegnare angoli retti sul terreno si usava tendere una corda annodata agli estremi, in modo tale da formare un triangolo con lati di lunghezze proporzionali ai numeri 3, 4, 5. Quale risultato matematico assicura che il triangolo così ottenuto è rettangolo?*

La risposta sarà quasi unanime: “Il teorema di Pitagora”. Invece si tratta dell'inverso del teorema di Pitagora. Ammetto che la formulazione della domanda è un po' capziosa, ma la difficoltà a distinguere un teorema “diretto” dal suo “inverso” e a rendersi conto che la validità di un'implicazione non comporta in generale la validità dell'implicazione inversa si riscontra a tutti i livelli scolastici con frequenza preoccupante.

*Antidoto. Logica matematica.* Studio, seguito da successive esposizioni (scritte e orali) di tutte le parti “teoriche” della matematica.

*Cos'è che non va.* È un'illusione ritenere che la logica matematica sia sufficiente per imparare ad esprimersi e a ragionare correttamente. Sarebbe un po' come pretendere di imparare a nuotare studiando solo un manuale di nuoto. Nei nostri testi scolastici, poi, la logica viene di solito confinata in un capitolo a sé stante, in aperto contrasto con le indicazioni dei programmi (e del buon senso) che la vorrebbero diluita lungo tutto l'arco degli studi e pervasiva di tutti gli altri capitoli della matematica.

Le definizioni imposte d'autorità dagli autori dei libri di testo sono spesso oscure e arzigogolate. Al punto che gli stessi autori non riescono a mantenersi coerenti con le proprie definizioni!

Le dimostrazioni dei teoremi abbondano di tecnicismi e di artifici che rischiano di nascondere più che di chiarire il filo logico dei ragionamenti.

Così stando le cose, non c'è da meravigliarsi troppo se la maggioranza degli allievi opta per uno studio mnemonico, senza preoccuparsi di una reale comprensione delle parti teoriche della matematica (tanto, quello che conta ai fini della valutazione, è saper fare gli esercizi...).

*Cos'è che andrebbe fatto.* Se vogliamo che l'insegnamento della matematica si trasformi in fatto culturale, è necessario procedere diversamente. Non è detto che, all'inizio di una trattazione si debbano dare subito definizioni formali di tutti i concetti che si utilizzano. Per esempio, l'immagine intuitiva evocata da parole come "angolo", "quadrato", "rettangolo", "parallelogramma", "poligono", "cubo", "poliedro", ecc., può essere più che sufficiente per un avvio dello studio della geometria, almeno fino a quando non ci si imbatte in ambiguità derivanti da un uso troppo disinvolto e approssimativo di questi termini (per es. la parola "angolo" può essere intesa in diverse accezioni: solo convesso o anche concavo, non orientato o orientato, in senso elementare o generalizzato). Una volta compresa l'esigenza di una maggiore precisione terminologica, le definizioni formali andranno poi costruite attraverso un confronto dialettico, e successivo lavoro di sintesi, partendo dalle diverse formulazioni proposte dagli allievi. Ciò consentirà ad essi di rendersi conto in prima persona dell'arbitrarietà insita nelle definizioni, ma anche dei motivi di opportunità che fanno preferire certe formulazioni ad altre. Per esempio, le definizioni "per inclusione" a quelle "per partizione". Intendo dire: sono preferibili le definizioni in base alle quali i parallelogrammi contengono come caso particolare i rettangoli, e questi a loro volta i quadrati, piuttosto che le definizioni nelle quali si impone che i parallelogrammi abbiano i lati "obliqui" e che i rettangoli abbiano i lati "di lunghezze diverse". Va da sé che, una volta data una certa definizione rigorosa, sarà essenziale restare sempre coerenti ad essa.

Per quanto riguarda le dimostrazioni, queste non devono riguardare solo contesti di geometria sintetica. L'aritmetica, l'algebra, il calcolo delle probabilità offrono occasioni ugualmente significative. Ma non è necessario dimostrare tutto! Ha maggiore valore formativo rendersi conto dell'esigenza di una dimostrazione, piuttosto che ricordare a memoria tutti i dettagli tecnici, senza averne afferrato lo spirito. Ha maggiore valore formativo conoscere tre diverse dimostrazioni di uno stesso teorema, piuttosto che una sola dimostrazione di tre teoremi diversi.

L'affinamento delle capacità linguistiche e logiche si conquista solo per gradi, con un allenamento sistematico e lavorando su tempi lunghi. Basti pensare alle difficoltà che si incontrano a tutte le età sull'uso dei connettivi (in particolare della negazione) e dei quantificatori. Se vogliamo che i nostri giovani imparino a scrivere di matematica, dobbiamo abituarli giorno dopo giorno a scrivere di matematica. Se vogliamo che imparino a ragionare con la propria testa, dobbiamo abituarli giorno dopo giorno a ragionare con la propria testa, iniziando da argomenti abbastanza semplici per non scoraggiare chi è alle prime armi.

## 10. Mancata percezione di incoerenze

*Difficoltà riscontrata.*

Esempio 1. Uno studente (in questo caso il livello scolastico è poco importante) deve risolvere il seguente problema:

*Quanti autobus vanno noleggiati per una gita scolastica, sapendo che i partecipanti alla gita saranno 170 e che ogni autobus può trasportare 50 passeggeri?*

Lo studente effettua la divisione  $170:50$ . Trova il risultato corretto e risponde tranquillamente:  $3,4$  autobus. Se gli si fa notare l'assurdità di noleggiare una frazione di autobus, arrotonda il numero decimale all'intero più vicino e risponde  $3$  autobus, senza curarsi minimamente dei 20 partecipanti che saranno lasciati a terra. Perché si comporta così?

Esempio 2. Un altro studente, di fronte allo stesso problema dell'esempio precedente, si dimentica la virgola e scrive tranquillamente la sua risposta: *per trasportare 170 persone sono necessari 34 autobus*, incurante dell'assurdità dell'ordine di grandezza trovato. Perché si comporta così?

Esempio 3. Siamo al primo biennio della scuola secondaria superiore. Uno studente deve *calcolare la probabilità  $P(E)$  di un evento  $E$* . Sbaglia l'impostazione o i calcoli e trova  $P(E) = 12,6$ . Scrive tranquillamente il risultato trovato, senza curarsi dell'assurdità della risposta. Eppure sa che la probabilità dev'essere sempre un numero compreso tra 0 e 1. Perché si comporta così?

Esempio 4. Siamo all'ultimo anno della scuola secondaria superiore o all'inizio degli studi universitari. *Uno studente deve calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione  $y = 3^{-x}$  centrato nel punto  $x_0 = 1$ . Deve poi disegnare, in un unico sistema di riferimento cartesiano, sia il grafico della funzione, sia quello del polinomio di Taylor*. Sbaglia qualcosa e traccia tranquillamente due grafici che se stanno ognuno per conto proprio, senza punti o tangenti in comune, magari l'uno con la concavità verso l'alto e l'altro con la concavità volta verso il basso. Eppure sa che uno sviluppo di Taylor serve per approssimare l'andamento della funzione in prossimità del centro dello sviluppo. Perché si comporta così?

*Antidoto*. In linea di principio, *tutto il programma di matematica*.

*Che cos'è che non va*. Ciò che accomuna i quattro esempi (e moltissimi altri che si potrebbero citare) è la mancanza di senso critico, che impedisce allo studente di accorgersi dell'incongruenza tra i suoi calcoli e le altre informazioni di cui pure dispone. Ma ad un'analisi più approfondita si nota che i quattro tipi di incongruenze sono diversi.

Nell'esempio 1 occorre una più accurata modellizzazione matematica, vale a dire, dopo aver effettuato la divisione sarebbe stato necessario arrotondare il risultato per eccesso.

Nell'esempio 2, lo studente non si preoccupa di collegare il risultato matematico ottenuto con la sua esperienza quotidiana extra-matematica. Ciò gli impedisce di scoprire l'errore commesso.

Gli esempi 3 e 4 riguardano invece contraddizioni tutte interne alla matematica. Mentre nel caso dell'esempio 3 si tratta sicuramente di un errore di impostazione o di calcolo, nel caso dell'esempio 4 la situazione è più articolata, in quanto l'errore potrebbe annidarsi indifferenemente nella parte analitica o nella sua traduzione grafica.

Perché l'insegnamento della matematica, che pure si estende a tutto l'arco di studi, dalle elementari alle superiori, non contribuisce in misura soddisfacente ad affinare il senso critico degli studenti? Il motivo principale della scarsa attenzione al significato reale dei problemi deriva presumibilmente dalla tendenza della matematica alla "decontestualizzazione", tendenza che si fa via via più pronunciata coll'avanzare del livello scolastico. In certo senso la decontestualizzazione è inevitabile e opportuna. La potenza della matematica sta anche nel fatto che uno stesso schema di calcolo si adatta ad una molteplicità pressoché illimitata di situazioni diverse tra loro. Per es. la medesima operazione di divisione  $170 : 50$  che abbiamo incontrato negli esempi 1 e 2, serve ugualmente bene a risolvere un problema del tipo:  $50 \text{ cm}^3$  di una certa sostanza pesano 170 g. *Qual è il peso specifico di quella sostanza?* Oppure del tipo:  $50 \text{ kg}$  di un certo prodotto costano 170 lire. *Quanto costa 1 kg di quel prodotto?* ecc. E poco importa dal punto di vista matematico se la natura della sostanza in questione non è neppure specificata, o se i dati numerici riferiti ad un dato prodotto sono poco realistici.

Quanto alla mancata percezione di una contraddizione tra l'esito di un particolare calcolo e qualche risultato generale che dovrebbe essere noto dalla teoria, le cause possono essere svariate. Una è sicuramente l'assillo di dover trovare una risposta (purchessia) in tempi troppo brevi per riuscire a soffermarsi a riflettere sulla correttezza del procedimento seguito e sulla ragionevolezza del risultato ottenuto. Ma c'è almeno un altro aspetto della questione, sul quale mi soffermerò tra breve.

*Cos'è che andrebbe fatto.* Alla fase di “decontestualizzazione” (inevitabile e opportuna, come ho già detto) andrebbe sempre affiancata una fase di “ricontestualizzazione”. Di fronte ad un problema di qualsiasi natura, l'allievo dovrebbe porsi domande del tipo: *Il risultato trovato è accettabile nel contesto del problema dal quale sono partito?* A onor del vero, domande simili vengono poste in forma stereotipata nei cosiddetti “problemi con discussione”, quando si tratta di escludere per es. eventuali soluzioni negative nel caso di lunghezze di segmenti, ecc. Non vedo perché un'analogia discussione non debba essere fatta anche in ogni altro contesto, per esempio chiedendosi se le soluzioni vanno cercate nell'ambito dei numeri reali o degli interi o dei naturali, se le soluzioni devono essere esatte o arrotondate, e in tal caso con quante cifre significative, ecc.

E torno sulla questione della mancata individuazione di una contraddizione interna tra due affermazioni matematiche. Sono convinto che almeno in qualche cosa lo studente si rende conto che “qualcosa non va”, ma preferisce ugualmente presentare la soluzione errata, ritenendo (e spesso a ragione) che l'insegnante darà una valutazione almeno parzialmente positiva per le eventuali parti corrette dell'elaborato, a fronte di una valutazione sicuramente negativa per una risposta lasciata completamente in bianco. Per ovviare a questo circolo vizioso, io sono solito stipulare con i miei studenti (universitari) una specie di contratto: “Se vi accorgete di una contraddizione o di un'incongruenza tra i risultati trovati e quelli che vi attendevate e se non siete capaci di trovare sul momento l'errore, aggiungete un commento del tipo: *Devo aver commesso un errore, infatti ho notato che ...* . Vi prometto che valuterò positivamente questa vostra dichiarazione, perché la consapevolezza di aver commesso un errore è un presupposto essenziale per correggerlo”. Devo dire però onestamente che solo un'esigua minoranza dei miei studenti si avvale di questa possibilità. Non è facile saper auto-diagnosticare i propri errori!

## **11. Inesperienza nel reperire e nell'utilizzare informazioni tratte da testi, manuali, formulari, basi di dati.**

*Difficoltà riscontrata.* Ho già accennato a più riprese a questo aspetto. Per es. al punto 2 (perché i nostri studenti non leggono le avvertenze e le istruzioni per l'uso delle loro calcolatrici?), al punto 3 (perché trovano difficoltà a utilizzare le informazioni indirette, di cui pure dispongono, per supplire ai dati mancanti di un problema?), al punto 9 (perché si limitano ad usare il loro libro di testo come un eserciziaro?). Si tratta naturalmente di domande retoriche. La scuola non si cura di promuovere le attività di reperire, interpretare, strutturare e utilizzare informazioni che esulano dal ristretto segmento di programma che in quel momento viene trattato in classe.

*Antidoto.* Consentire – anzi incoraggiare – la consultazione mirata di *sussidi didattici* (libri di testo, manuali, formulari, raccolte di dati statistici, basi di dati disponibili sul computer, appunti personali) sia nella fase di insegnamento-apprendimento, sia in occasione delle prove scritte e delle interrogazioni orali.

*Cos'è che non va.* La resistenza da parte di molti insegnanti a seguire questo consiglio è duplice. Da un lato c'è chi teme di facilitare eccessivamente gli allievi, fornendo loro un alibi per studiare di meno (se sono autorizzati a rintracciare le formule sui loro libri o sui loro appunti, non saranno motivati a ricordarle a memoria). Da un lato c'è chi teme all'opposto un aumento delle difficoltà (ci vuole tempo e abilità per rintracciare l'informazione giusta, consultando un grosso manuale denso di dati e di formule, o un quaderno di appunti inaffidabili e non ben organizzati). Entrambe le obiezioni sono in parte fondate. Ma resto convinto che gli aspetti positivi prevalgano su quelli negativi. Se intendiamo preparare i nostri allievi per la loro futura vita professionale, dobbiamo tenere presente che la cultura non sta nel memorizzare grandi quantità di dati quanto piuttosto nell'abilità di reperire i dati di volta in volta necessari per un determinato scopo (e questo vale per l'elenco del

telefono come per l'orario ferroviario, per le formule di trigonometria come per il manuale dell'ingegnere o per il codice civile).

*Cos'è che andrebbe fatto.* Lascio da parte proposte troppo innovative e lontane dalla prassi didattica corrente, come rischierebbero di esserlo certe attività interdisciplinari di modellizzazione matematica, alle quali avevo accennato in precedenza. Lascio da parte anche la proposta di consultare un annuario statistico, o al limite un semplice orario ferroviario, che peraltro sarebbe fonte di un gran numero di interessanti problemi matematici.

Ma perché liquidare con un 4 sul registro lo studente che non ricorda una formula, un enunciato, una dimostrazione? È molto più significativo mettergli a disposizione il libro di testo e chiedergli di individuare il punto esatto in questione, facendogli poi leggere, spiegare, illustrare con qualche esempio, e infine applicare la formula, l'enunciato, la dimostrazione.

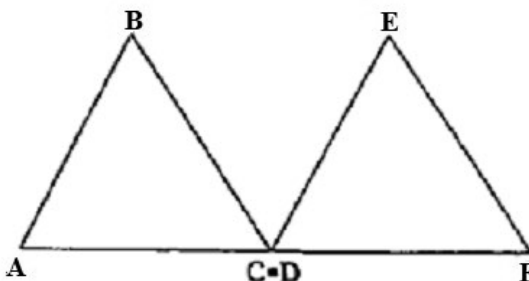
Perché assistere impassibili agli errori "da calcolatrice" anziché cogliere l'occasione per un'analisi comparativa delle convenzioni in uso in matematica e nei diversi tipi di strumenti di calcolo elettronico?

Perché vietare l'uso di foglietti nascosti o di calcolatrici programmabili su cui lo studente ha trascritto le formule che ritiene importanti per il prossimo compito scritto? A prescindere dal fatto che il divieto può essere aggirato in mille modi, è molto meglio istituzionalizzare questa attività di sintesi, di per se stessa utile e formativa, guidando gli allievi ad elaborare tabelle di sintesi personali, redatte con ordine, chiarezza e sistematicità, e precisando l'ambito di validità di ciascun risultato.

## 12. Scarsa capacità di cogliere gli aspetti strutturali nelle situazioni problematiche in esame

*Difficoltà riscontrata.* Tra gli obiettivi di fondo dell'insegnamento della matematica vi è quello di abituare ad inquadrare i casi particolari in contesti più generali o meglio strutturati. Ma raramente l'insegnamento ha successo sotto questo punto di vista. Ecco tre esempi in proposito.

Esempio 1. *In figura sono disegnati due triangoli equilateri uguali  $ABC$ ,  $DEF$ . Il vertice  $C$  del primo triangolo coincide con il vertice  $D$  del secondo. Quante sono le isometrie che portano il primo triangolo a sovrapporsi al secondo? Le sapresti descrivere a parole?*



Esempio 2. *Quanti angoli vedi in figura A? E quanti in figura B?*

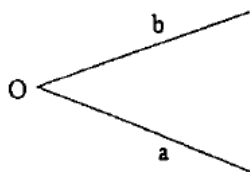


fig. A



fig. B

Esempio 3. *Il prodotto  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$  è divisibile per 17? Sapresti rispondere alla domanda senza effettuare i calcoli?*

In tutti e tre i casi, le risposte di studenti (anche universitari) sono in genere deludenti. Nel caso dell'esempio 1 ci si aspetterebbe una risposta del tipo: le isometrie sono tante quante le applicazioni biunivoche tra la terna di vertici  $A B C$  e la terna di vertici  $D E F$ , ossia sono 6.

Invece la risposta più frequente è: 1 isometria. C'è chi vede solo una traslazione, chi vede solo una simmetria assiale, chi vede solo una rotazione intorno al punto  $C \equiv D$ .

C'è poi chi trova 2 o 3 isometrie (in genere quelle elencate sopra).

Qualcuno ne trova anche 4 o 5, raramente 6. Ma anche in quest'ultimo caso, prevale la tendenza a descrivere isolatamente le 6 isometrie, senza riferimento all'insieme delle applicazioni biunivoche tra  $A, B, C$  e  $D, E, F$ , né al gruppo delle isometrie di  $A, B, C$  (abbinato ad una traslazione che faccia passare dal primo triangolo al secondo).

La domanda dell'esempio 2 è in certa misura ambigua. Infatti la parola "angolo" può essere intesa in diverse accezioni (cfr. quanto detto al punto 9). Ma ciò ha scarsa rilevanza rispetto ad un'analisi delle risposte, e può essere semmai spunto per ulteriori discussioni e approfondimenti. In genere, in figura A vengono visti due angoli (quello convesso e quello concavo). Per coerenza, in figura B si dovrebbero allora vedere 6 angoli (togliendo una qualsiasi delle tre semirette, ci si riconduce alla figura A e si hanno quindi 2 angoli, poiché le semirette sono tre, distinte tra loro, nel complesso gli angoli presenti nella figura B sono  $2 \cdot 3 = 6$ ). Invece c'è chi vede due soli angoli (quelli convessi  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{bc}$ ), chi ne vede tre (i due precedenti e inoltre  $\widehat{ac}$  in una delle due possibili accezioni: concavo o convesso). C'è chi ne vede 4, ecc.

Infine, per quanto riguarda l'esempio 3, solo un'esigua minoranza degli intervistati si accorge che la risposta è: "No,  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$  non è divisibile per 17" in base all'unicità della fattorizzazione dei numeri naturali, senza dover fare alcun calcolo.

*Antidoto.* Le strutture portanti dell'aritmetica, dell'algebra, della geometria.

*Cos'è che non va.* Nella scuola media, il tema “Analogie strutturali” è notoriamente uno dei più trascurati. A quel livello scolastico, un'attenuante può essere vista nella relativa immaturità degli allievi. Ma, tanto per citare qualche esempio, nella scuola secondaria superiore le strutture gruppali e di ordine vengono esaminate a più riprese; le proprietà della divisibilità e della fattorizzazione vengono ampiamente enfatizzate; di teoremi ne vengono enunciati (e a volte dimostrati) fin troppi. Perché tutto questo imponente dispendio di energie ha così scarsa efficacia?

Mi sembra di poter dire che c'è un eccessivo divario fra la teoria (in genere troppo astratta) e gli esercizi (magari tecnicamente laboriosi, ma poco variati, per la cui soluzione servono solo determinate competenze algoritmiche, non i risultati più qualificanti della teoria).

*Cos'è che andrebbe fatto.* È facile a dirsi, difficile a farsi! Andrebbe ridotto il divario fra teoria ed esercizi, eliminando qualche “ramo secco” dalla prima (penso ad esempio a certi tecnicismi esasperati del calcolo coi radicali o della trigonometria). Agli inevitabili esercizi di routine andrebbero affiancati problemi tecnicamente più semplici, ma meno stereotipati, la cui soluzione richieda un minimo di acume e di fantasia, dando la preferenza a problemi suscettibili di essere risolti con tecniche e metodi diversi, per poter premiare le soluzioni più originali e brillanti, senza penalizzare chi non è riuscito a vedere una scorciatoia e si è limitato a percorrere una strada più tradizionale.

**Considerazioni conclusive.** Già in altre occasioni ho espresso la mia convinzione che, nel passaggio dal concreto della scuola media all'astratto dell'insegnamento superiore, una “frattura” didattica sia in qualche misura necessaria e fisiologica. Ma, anche alla luce dell'esemplificazione precedente, voglio precisare che con ciò non ho inteso affatto sminuire l'importanza di momenti di “ricordo”,

non solo saltuari, che considero altrettanto necessari e fisiologici. In assenza di questi momenti di “racordo” tra i due ordini scolastici sussiste il forte rischio di non promuovere la conquista di nuovo sapere, bensì di provocare piuttosto una perdita di significato.

## BIBLIOGRAFIA

[1] M.G. Bartolini Bussi. *Alcune riflessioni sull'introduzione delle trasformazioni geometriche nella scuola dell'obbligo*. L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 18, n. 6 (1995), pp. 650-667.

[2] W. Bencivelli, V. Villani. *Su un test per l'ammissione ad un corso di laurea*. La matematica e la sua didattica 2, pp. 157-167.

[3] A. Cassani, B. D'Amore, C. Deleonardi, G. Girotti. *Problemi di routine e situazioni “insolite”. Il “caso” del volume della piramide*. L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 19, n. 3 (1996), pp. 249-259.

[4] M. Deri, M. Sainati Nello, M. Sciolis Marino, *Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione*. L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 6, n. 6 (1983), pp. 6-27.

[5] G. Polya. *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica del metodo matematico*. Feltrinelli, Milano 1967.

[6] A. Villani, R. Porcaro. *Laboratorio di Informatica con il Turbo Pascal*. Loescher, Torino, 1996.

[7] V. Villani. *La Geometria: dallo Spazio al Piano*. Quaderno del Sem. Did. dell'Università di Pisa. (In collaborazione con M. Sainati Nello e M. Sciolis Marino), 1985.

[8] V. Villani. *Dare un senso ai numeri*. Induzioni, 10 (1985), pp. 19-29.

# **INFORMAZIONI**

# **RECENSIONI**

**[Attenzione: password per accedere alla rivista on line:  
Hoffmann1866]**

La Presidenza

Recensione del libro:

Bottazzini, U. (2019). *Istanti fatali*. Bari -Roma: Laterza.

di Bruno D'Amore

Va detto subito che quella U. sta per Umberto, dunque che l'autore è il famoso storico della matematica Umberto Bottazzini, a tutti noi ben noto per le sue avvincenti storie della matematica, spesso narrate con stile accattivante.

E che quegli istanti “fatali” del titolo sono quei momenti temporali che hanno decretato svolte eccezionali, nel nostro caso creazioni o scoperte matematiche di livello straordinario, che hanno segnato svolte impensabili nel dominio della matematica. Tanto che l'editore ha posto, come sottotitolo: *Quando i numeri hanno spiegato il mondo*, come sempre fanno i non matematici, identificando la matematica con i numeri.

E così, già il lettore immagina di che cosa si tratta, di una narrazione sotto forma di racconto dotto e piacevolissimo, intriso di letteratura, poesia e arte, di alcune fra le più spettacolari creazioni e invenzioni, a mio avviso non solo della matematica ma di tutta la storia dell'essere umano: i numeri naturali e i sistemi per rappresentarli; lo zero; i numeri irrazionali; i tentativi di quadrare il cerchio con riga e compasso e la dimostrazione della sua impossibilità; i numeri immaginari; le geometrie non euclidee e considerazioni sull'universo che aderisce a strutture matematiche non euclidee, non tridimensionali e non solo legate ai numeri reali.

Le questioni trattate in questo libro possono anche essere note a chi naviga nel mondo della storia della matematica e dei processi relativi al suo insegnamento e apprendimento, ma sono più che certo che questa lettura possa comunque apportare parecchio per l'arguzia e la profondità, all'un tempo, con le quali viene proposta. Tuttavia l'autore ci sorprende con riferimenti continui molto colti tratti dal mondo della letteratura (narrativa e poesia), dell'arte figurativa, della

filosofia, aspetti ai quali fa continui rinvii precisi che sono, credo, per i più, novità inaspettate e di grande interesse.

Riesce poi a far capire in maniera precisissima, documentata e colta, le vere rivoluzioni che si nascondono dietro aspetti della matematica dai più considerati banali o marginali, secondo me sottostimate dai matematici e date per scontate da tutti gli altri.

Per esempio, l'idea geniale (che ha richiesto molte decine di migliaia di anni all'essere umano) di capire che "due pelli" e "due banane", pur nell'ovvia totale differenza della qualità degli oggetti considerati, hanno qualcosa di notevole in comune, e cioè quel "due"; quel due, che parrebbe riferirsi alla cosità e che invece è da essa avulso. L'autore parla a ragione di un momento geniale per l'umanità; basta pensare che esistono lingue ancora oggi nelle quali la differenza di numero non è data, come nelle neolatine, fra singolare e plurale (da due in poi), ma fra singolare, coppia e plurale, come se quel "due" di banane dovesse essere una parola che semanticamente alle banane allude, mentre quel "due" di pelli debba avere qualcosa che semanticamente si riferisce alle pelli, appunto. In queste condizioni linguistiche non potrebbe nascere nessuna aritmetica, perché questa è una disciplina avulsa dai riferimenti al reale, è una disciplina in sé, che studia i numeri e le loro proprietà, singole e relazionali, non gli oggetti enumerati, citati. Ecco, non ci si pensa, in genere, perché l'aritmetica sembra così connessa all'idea naturale di quantità che sembra data per scontata, di immediata comprensione ed elaborazione umana, ma non è così.

Lo stesso dicasi per le relazioni fra figure geometriche elementari, come il processo di trasformazione mediante passaggi elementari (per esempio, eseguiti con riga e compasso) da un cerchio a un quadrato equiesteso, facendo opportune scomposizioni. Dato che ciò riesce sempre fra qualsiasi poligono e un rettangolo (e dunque un quadrato), perché non dovrebbe essere possibile fra cerchio e quadrato? Che storie umane si nascondono dietro questo tipo di ricerca, che relazioni umane si sono sviluppate nell'affrontare questo tipo argomenti? Questa visione così legata alla vicenda umana è presente nella trattazione di tutte le altre avventure culturali narrate in questo libro,

lettere fra personaggi di spessore tale da lasciare sbalorditi, colloqui, discussioni, litigi, accuse, ... Perché è l'essere umano che fa queste cose, anche quelle matematiche, e non la Natura, non un Dio, è l'essere umano che s'inventa, che crea oggetti astratti stravaganti come una lettera *i* che elevata al quadrato dà numeri negativi, contro ogni logica precedente e culturalmente dominante. Per scoprire poi, semmai, che la Natura lavora proprio in questa direzione...

Credo che qualunque persona di cultura, matematico (e ancor più non matematico), possa trovare immenso piacere nel leggere questo libro; e penso che qualunque insegnante di matematica possa trovare materiale di studio e di interesse per i propri studenti. Il potenziale lettore ideale di questo libro, piacevole e dotto, è la persona curiosa, attratta dal desiderio di conoscere o almeno riflettere sulla storia della nostra disciplina, storia legata però all'essere umano che l'ha creata nei millenni, con incredibile vitalità, genialità e sforzo. Di grande aiuto in questa impresa sarà la piacevolezza della narrazione, fatto non sempre consueto in opere di questo tipo.

## INFORMAZIONI PER GLI AUTORI

Gli articoli proposti per la pubblicazione devono essere inviati per posta elettronica agli indirizzi:

[bonotto@math.unipd.it](mailto:bonotto@math.unipd.it) (per la sezione A) oppure

[pierluigi.ferrari@uniupo.it](mailto:pierluigi.ferrari@uniupo.it) (per la sezione B) oppure

[mario.ferrari@unipv.it](mailto:mario.ferrari@unipv.it) oppure

[crdm@filippin.it](mailto:crdm@filippin.it)

Il formato rivista è:

**Pagina** A 4; **margini:** sup. e inf. 6,4; sx 4,8; dx 4,7.

Il testo, quindi, è contenuto in un riquadro di 11,5 cm x 17 cm.

**Carattere:** times new roman 12; interlinea singola.

La prima pagina dovrà contenere titolo dell'articolo, sommario in italiano, abstract in inglese (massimo 10 righe ciascuno), autore/i. Nella seconda pagina dovrà comparire: titolo, autore/i, ente/i di appartenenza e inizio dell'articolo. Figure, grafici e tabelle dovranno essere inseriti nel testo. Per le formule complesse (ad esempio con vettori, matrici, frazioni, sommatorie, integrali, ...) usare un editore appropriato (come Equation Editor o Math Type). Per le formule più semplici (polinomi ecc.) usare il corsivo per le lettere ma non per i numeri (ad esempio:  $5x^2+2a$ ).

Gli articoli vanno spediti in formato "Word" e **non** in formato pdf in modo da poter intervenire per mettere le pagine e le testatine.

Gli articoli saranno accettati per la pubblicazione previo giudizio positivo dei referee. Gli articoli non vengono riscritti, ma sono pubblicati come giungono dagli autori. Per questo non vengono rimandati per la correzione delle bozze. Agli autori sarà inviato il file dell'estratto dell'articolo in formato pdf. Qualora sia necessario il Direttore si riserva il diritto di intervenire sulla impaginazione dell'articolo.

## PUBBLICAZIONI DEL CENTRO MORIN

### 1.- Collana "QUADERNI DIDATTICI" (QD):

QD 15/16 - AAVV, *La geometria nel II Ciclo della scuola elementare. Antologia di proposte didattiche* (3° ristampa) € 7,50

QD 17 - BOZZOLO-FERRARI, *Problemi di matematica per la prima e la seconda elementare*. € 7,50 (Fotocopie)

QD 18 - BOZZOLO-FERRARI, *Problemi di matematica per la terza, quarta e quinta elementare*. (nuova edizione) € 10,00

QD 19 – BARDONE-BERTAZZOLI-FINOS-PESCI-TOMMASINI-TREVISANI, *Fare matematica con Cabri nel primo ciclo scolastico*. € 10,00

QD 20 – M. FERRARI, *I mondi numerici del primo ciclo scolastico: Teoria, Didattica, Storia*. € 10,00

QD 21 – M. FERRARI, *Insegnare matematica nella scuola primaria. Una proposta suddivisa per anni. Aritmetica* € 10,00

QD 22 – M. FERRARI, *Insegnare matematica nella scuola primaria. Una proposta suddivisa per anni. Geometria e Misura* € 12,00

### 2.- Collana "FORMAZIONE PROFESSIONALE" (QFP)

QFP 1 - NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DELL'UNIVERSITA' DI PAVIA, *Aritmetica* (1° ristampa) € 6,50 (esaurito)

QFP 2 - NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DELL'UNIVERSITA' DI PAVIA, *Geometria* (1° ristampa) € 6,50

QFP 3 - NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DELL'UNIVERSITA' DI PAVIA, *Logica e Informatica*. € 5,00

QFP 4 - NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DELL'UNIVERSITA' DI PAVIA, *Statistica e Probabilità*. € 5,00

### 3.- Collana "QUADERNI DI LAVORO"

Quaderni elaborati al Centro sulla base delle pubblicazioni ricevute. In generale sono orientati a insegnanti di scuole superiori Sono suddivisi in quattro serie

I SERIE: 19 Quaderni iniziati nel 1990

II SERIE: 12 Quaderni iniziati nel 1994

III SERIE: 15 Quaderni iniziati nel 1998

IV SERIE: iniziata nel 2002: comprende finora quattro quaderni.

I titoli e i prezzi dei quaderni si possono trovare nel sito [www.centromorin.it](http://www.centromorin.it).

### 4.- Collana "Quaderni di ricerca" (QDR)

QDR1 Accascina et al., *La Strage degli Innocenti*. € 10,00

QDR2 Lanciano et al., *Geometria in Città*, € 10,00

QDR3 Canizzaro et al., *Figure Geometriche e Definizioni*. € 5,00 (Fotocopie)

NB. - Alle spese di acquisto va sempre aggiunta la spesa di spedizione che varia in rapporto al peso del pacco. (entro i 2kg: € 2,00)

## INFORMATION

The Journal

### L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

is published by the

**CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN**

**Via S. Giacomo, 4**

**I-31017 Paderno del Grappa (TV) - ITALY**

10 times a year, in three editions:

**Edition A**, (5 issues: January, March, May, September, November-December) devoted mainly to the teachers of compulsory schools

**Edition B**, (5 issues: February, April, June, October, November-December) devoted to the teachers of secondary schools and Colleges.

**Edition C (A + B).**

This issue is a double one, containing the proceedings of our Summer Seminar.

The Journal is sent only to individual and Institutions members of the Association

CENTRO RICERCHE DIDATTICHE "MORIN".

**The prices of association for 2020 are the following ones:**

Individual			Institutions		
Sez. A	Sez. B	Sez. C (A+B)	Sez. A	Sez. B	Sez. C (A+B)
€ 25.00	€ 25.00	€ 45.00	€ 30.00	€ 30.00	€ 50.00

**Extra shipping cost for foreign Countries:**

For Europe, € 40.00-

For non European countries € 50.00-

For subscriptions done through a Bookshop, a discount of 15% is granted to the Bookshops.

The "Bollettino Bibliografico" will be published only on line in the "Centro Morin" web site:[www.centromorin.it](http://www.centromorin.it)

Furthermore occasional informations about activities of the CENTRO in cooperation with the italian Universities of North Italy in favour of the up-dating of the in-service teachers are sent to the members.

Every payment should be mailed through:

- INTESA SANPAOLO (Crespano del Grappa) IBAN: IT 22 U030 6961 6591 0000 0000 469
- BANCO POSTA IBAN: IT 89 I076 0112 0000 000 15052319
- CCP N. 15052319

**ASSOCIAZIONE CENTRO RICERCHE DIDATTICHE**

**UGO MORIN**

**INSEGN.MATEM.SCIENZE INTEGR.**

**Via S. Giacomo, 4**

**I-31017 Paderno del Grappa TV - ITALY**