CORSO AGGIORNAMENTO IN MATEMATICA
PER INSEGNANTI DI SCUOLA PRIMARIA
ANNO SCOLASTICO 2009 – 2010

" A SPASSO NEL MONDO DELLE FIGURE GEOMETRICHE: MOLTE CONFERME, ALCUNE NOVITA', QUALCHE SORPRESA"

CAPITOLO PRIMO

LE FIGURE GEOMETRICHE NEI PROGRAMMI

1 – Introduzione

Prima di sviluppare l'argomento del capitolo vorrei sottolineare che la Geometria nei programmi della scuola primaria, a partire da quelli del 1985, ha assunto l'importanza che si meritava. Ad essa è sempre dedicato uno specifico tema: "Geometria e misura" (1985), "Geometria" (2004), " Spazio e figure" (2007).

Attività di geometria sono previste subito dalla prima classe o in modo esplicito (2004) o implicitamente negli altri due programmi.

I contenuti sono più o meno ampi, ma tutti trattano dei quattro capitoli fondamentali della geometria elementare: figure geometriche, relazioni geometriche, trasformazioni geometriche, misura.

In questo corso noi parleremo solo delle figure geometriche, cioè della "materia prima" della geometria. Sono le "cose" alle quali maggiormente pensiamo quando parliamo di geometria, sono la idealizzazione degli oggetti di uso quotidiano. Sono anche, al dire di Galileo, il linguaggio dell'universo: " La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua, e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche senza i quali mezzi è impossibile intenderne parola; senza questi è un aggirarsi vanemente per un oscuro laberinto".

2 – Le espressioni generali

In tutti i programmi un primo modo di parlare delle figure geometriche è quello di nominarle globalmente senza chiamare nessuna per nome.

I programmi del 1985 prevedono, per il primo ciclo di "riconoscere negli oggetti dell'ambiente e denominare correttamente i più semplici tipi di figure geometriche, piane e solide". Nel secondo ciclo si parla delle "principali figure geometriche piane" e di "alcune semplici figure geometriche solide".

Queste stesse espressioni sono usate anche nelle Indicazioni Nazionali del 2004: "Le principali figure geometriche del piano e dello spazio" e "alcune fondamentali figure geometriche del piano e dello spazio".

Un po' più laconiche, ma comunque presenti, le espressioni nelle Indicazioni per il Curricolo del 2007: " Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche" e "Descrivere e classificare figure geometriche".

Queste espressioni generali pongono dei problemi interpretativi. Limitandoci alle Indicazioni del 2007 e ad un solo esempio. Esse non parlano mai di rette e di semirette che sono "oggetti" illimitati. Siccome per molti insegnanti e per molti sussidiari le figure geometriche piane sono

“parti di piano racchiuse da una spezzata chiusa” è naturale concludere che rette e semirette non sono figure geometriche. Allora ne dobbiamo parlare o no? Ne possiamo parlare o è proibito?

3 – Le figure con onore di citazione.

I programmi più vari ed abbondanti sono, come sempre, quelli del 1985. In essi troviamo citati esplicitamente:

- Triangoli e quadrangoli.
- Poligoni
- Angoli
- Rette (verticale, orizzontale, parallele, incidenti, perpendicolari)
- Poliedri

Nelle Indicazioni Nazionali qualche nome scompare e rimangono:

- Triangoli e quadrangoli
- Angoli
- Rette incidenti, parallele, perpendicolari

Nelle Indicazioni per il Curricolo troviamo:

- Rettangoli e triangoli (determinare l’area di…)
- Angoli (conoscere le unità di misura)
- Segmenti (misurare segmenti)

Come si vede le famiglie di figure con l’onore della citazione del nome sono diminuite negli ultimi 24 anni. Io non capisco, per esempio, perché nelle Indicazioni per il Curricolo si parli solo di trovare l’area del rettangolo e non dei parallelogrammi e dei trapezi.

4 - Innominate, ma presenti

E’ ovvio che i programmi non possono nominare tutte le figure geometriche sia pure raggruppate in famiglie. Alcune sono “innominate”, ma dal contesto si capisce che fanno parte dei programmi.

Poligoni regolari.

Nessuno dei tre programmi ne parla.

Nelle Indicazioni Didattiche dei programmi del 1985 si dice: “Per il calcolo dei perimetri e delle aree si raccomanda di non insistere troppo sull’apprendimento dei cosidetti “numeri fissi”.

Siccome i numeri fissi riguardano solo i poligoni regolari è ovvio che per parlarne si suppone che siano trattati i poligoni regolari. Innominati, quindi, ma presenti.

Vedremo in seguito la situazione nelle Indicazioni del 2004 e del 2007.

Circonferenza e cerchio.

Non sono mai nominati nei programmi.

Nelle Indicazioni Didattiche dei programmi del 1985 si dice: "Per quel che riguarda la presentazione del numero π, sarà sufficiente indicare che esso vale approssimativamente 3,14". Siccome questo numero è indissolubilmente legato alla circonferenza ed al cerchio, possiamo concludere, come sopra, che essi, pur innominati, sono presenti.

Vedremo in seguito la situazione nelle Indicazioni del 2004 e del 2007.

Retta e semiretta.

E' il tipico caso di una presenza nascosta. Per poter parlare di riferimenti cartesiani, di simmetrie assiali, e lo fanno tutti i programmi, è necessario parlare prima di rette e di semirette.

Segmenti.

Può sembrare strano che siano nominati solo nelle Indicazioni del 2007. Tutti i programmi, però, parlano di "lunghezze" ed esse nascono nel mondo dei segmenti. Innominati, quindi, ma presenti.

Poliedri.

Sono nominati esplicitamente solo nei programmi del 1985. Nelle Indicazioni del 2004 si parla, però, del "concetto di volume di figure solide" che richiama necessariamente quello di poliedro.

Nelle Indicazioni del 2007, attualmente in vigore, si richiede di "conoscere le principali unità di misura per… volumi/capacità" e questo non suppone necessariamente la conoscenza dei poliedri, basta quello delle bottiglie.

5 - Innominate, ma….

Dovrei completare il titolo del paragrafo con la parola "**assenti**".

Poligoni regolari.

Le Indicazioni Nazionali del 2004 e le Indicazioni per il Curricolo del 2007 non parlano mai dei poligoni regolari, non nominano mai i "numeri fissi" ed introducono esplicitamente i poligoni regolari nei programmi della scuola secondaria di primo grado. Allora nella scuola elementare, il poligoni regolari si debbono fare, si possono fare, non si debbono fare?

Circonferenza e cerchio.

Siamo nella stessa situazione dei poligoni regolari. L'atteggiamento delle Indicazioni è lo stesso e per noi sono uguali le domande. A me sembra assurdo non parlare di circonferenza e cerchio

nella scuola elementare. Forse ci si può appellare, per le Indicazioni del 2007, al fatto che parlano dell'uso del compasso, strumento privilegiato per tracciare circonferenze.

Solidi rotondi.

Cilindro, cono, sfera fanno parte degli oggetti della vita quotidiana, del nostro comune vocabolario, ma i programmi non ne parlano mai a livello di scuola primaria. Le Indicazioni del 2004 ne parlano per la terza media, quelle del 2007 li ignorano completamente. Che fare nella scuola elementare?

6 – Metodologia.

I verbi che ricorrono sono

- **Riconoscere** figure geometriche, cioè presentare "oggetti a forma di" per il riconoscimento da parte dei bambini. Bisogna, però, (ed è una osservazione mia) anche presentare direttamente figure geometriche in posizioni diverse come, per esempio, il rettangolo "messo in piedi", il quadrato nella "posizione di rombo", il triangolo rettangolo con l'angolo retto "in alto e l'ipotenusa in basso".

- **Denominare** correttamente le figure geometriche: si può costruire la terminologia con gradualità arrivando, però, alla fine all'uso dei termini tecnici.

- **Descrivere** figure geometriche con l'intervento di lati, vertici, angoli, spigoli, facce.

- **Disegnare** figure geometriche: curare la precisione, l'uso appropriato degli strumenti (riga, squadra, compasso, software).

- **Costruire**, con materiali diversi, figure solide cercando prima di progettarle.

CAPITOLO SECONDO

A SCUOLA DA EUCLIDE

1 – Introduzione

Euclide fu un grande matematico greco, vissuto ad Alessandria d'Egitto fra il IV e III secolo prima di Cristo. Della sua vita non sappiamo niente. Sappiamo, però, che ha scritto un importantissimo volume di geometria intitolato "Elementi" in 13 libri. Questo capolavoro di Euclide è il libro di matematica in assoluto più tradotto nelle varie lingue e più stampato. In italiano, solo per fare un esempio, abbiamo avuto tre edizioni complete degli Elementi:

- F. Enriques (a cura di), *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, A Stock e N. Zanichelli, Roma – Bologna, 1925 – 1936 (Sono quattro volumi)
- A. Frajese e L. Maccioni (a cura di), *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino 1970
- F. Acerbi (a cura di), *Euclide, Tutte le opere, testo greco a fronte*, Bompiani, Milano 2007.

Non deve apparire strano che, per l'argomento di questo corso, si vada a "scuola da Euclide". La geometria che noi studiamo è, sostanzialmente, ancora quella di Euclide. Vedere le definizioni di alcune figure e confrontarle con le nostre ci dà anche la possibilità di conoscere che la matematica è "cambiata" anche a livello di definizioni molto semplici.

Euclide spesso all'inizio di un libro riporta una serie di definizioni di "oggetti matematici". All'inizio del primo libro, e solo qui, riporta cinque "richieste o postulati" riguardanti gli oggetti matematici definiti. Si tratta di proposizioni che Euclide non dimostra, ma delle quali si serve per dimostrare altre proposizioni che noi chiamiamo, ora, "teoremi".

In altre parole, la trattazione della geometria di Euclide è una trattazione assiomatica.

Noi ci limitiamo a qualche "assaggio" della trattazione euclidea, con qualche commento.

2 – Alcune definizioni un po'… strane

La prima definizione che Euclide dà è quella di punto:

"Punto è ciò che non ha parti".

Questa è la definizione più celebre di tutta la matematica ed è stata variamente interpretata anche dal punto di vista filosofico. Noi ci limitiamo ad osservare che per capire questa definizione dovremmo sapere che cosa significa "non avere parti". Euclide non lo dice. Il bello è che Euclide non usa mai questa definizione nella sua trattazione.

Del punto, Euclide dà un'altra definizione (la terza) collegandola a quella di linea:

"Estremi di una linea sono punti".

Da questa definizione può essere nata l'idea che il punto "non ha dimensioni" perché è "estremo" di una linea. Anche qui bisognerebbe sapere che cosa vuol dire "non avere dimensioni". Anche di questa definizione Euclide non fa nessun uso nella sua trattazione. Quel che sembra certo è che per Euclide le "linee", avendo "estremi" sono terminate, finite.

La definizione quarta riguarda la retta:

"Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa".

Ecco il commento di Frajese e Maccioni: "Definizione oscura, per la quale ogni traduzione appare incerta. Sembra che con essa Euclide voglia intendere che sulla retta non vi sono punti privilegiati." Anche questa definizione non viene mai usata da Euclide nella sua trattazione.

Le definizioni di retta che spesso si leggono o si sentono dagli insegnanti (ne vedremo qualcuna in seguito), non si rifanno mai, e giustamente, a quella di Euclide.

Tra le "richieste o postulati" di Euclide, la prima riguarda proprio i rapporti tra punti e rette:

"Risulti postulato che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto".

E' una proprietà fondamentale che serve a distinguere la retta da qualsiasi altra linea. Noi di solito diciamo: "Per due punti passa una ed una sola retta".

La definizione (la settima) di piano ricalca da vicino quella di retta:

"Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa".

Sul piano, possiamo dire, non ci sono rette privilegiate. Anche questa definizione non viene mai usata da Euclide.

Su questi concetti di punto, retta e piano ritorneremo nel prossimo capitolo per dire come la pensano ora i matematici.

3 – Il signor angolo

Agli angoli Euclide dedica 5 definizioni. Alcune sono uguali alle nostre: angolo retto è quello uguale al suo adiacente, ottuso è quello maggiore di un angolo retto, acuto è quello minore di un retto. Meritano qualche considerazione le prime due definizioni (ottava e nona):

"Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrano fra di loro e non giacciono in linea retta".

"Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo".

La definizione ottava di Euclide appare un po' "strana" sia perché non si sa che cosa è "l'inclinazione" sia perché non si vede come due linee possano "giacere in linea retta". Certamente questa definizione è più generale di quelle che noi adottiamo e comprende anche quegli angoli che saranno chiamati "angoli di contatto o di contingenza" come l'angolo formato da una circonferenza e da una retta ad essa tangente in un punto. Su questi angoli si

svilupperanno tante riflessioni di matematici e filosofi fino al secolo XVII. A questi angoli Euclide dedica la Proposizione 16 del libro terzo: *"In un cerchio, una retta che sia tracciata perpendicolare al diametro partendo da un estremo di questo, cadrà esternamente al cerchio, nessuna altra retta potrà interporsi nello spazio fra la retta e la circonferenza e l'angolo del semicerchio è maggiore, e quello che rimane [fra la retta e la circonferenza] minore di ogni angolo acuto rettilineo."* In sostanza ogni angolo di contatto è minore di ogni angolo rettilineo. Quindi l'insieme degli angoli piani non è archimedeo.

E' chiaro, dalla definizione VIII e dalla successiva di "angolo rettilineo", che Euclide non considera angolo il nostro "angolo piatto". Per Euclide la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti. Possiamo dire che per Euclide l'angolo retto è quello di riferimento non solo perché entra nella definizione di angolo ottuso e di angolo acuto, ma anche perché agli angoli retti Euclide dedica il quarto postulato: *"Risulti postulato che tutti gli angoli retti siano uguali fra di loro".*

Per Euclide, inoltre, gli angoli sono solo convessi, anche se questo termine, con il correlato "angolo concavo", comparirà solo nel secolo XVI. Solo nel secolo XVII viene introdotto l'angolo come parte di piano, come siamo abituati a fare noi e solo nel secolo XIX si incomincia a parlare di angolo come rotazione.

L'esclusione degli angoli piatti dal mondo degli angoli è coerente con la definizione di angolo di Euclide, ma questa esclusione si trova anche con definizioni diverse di angolo. Per esempio, David Hilbert (1862-1943), nella sua opera "Fondamenti della geometria" del 1899, definisce l'angolo come coppia non ordinata di semirette con la stessa origine e appartenenti a rette diverse. Anche per lui non esistono gli angoli piatti e gli angoli considerati sono solo quelli convessi.

Queste scelte di grandi matematici dovrebbero aiutarci a ridimensionare le nostre trattazioni scolastiche degli angoli, trattazioni nelle quali parliamo tranquillamente di angolo piatto, nullo, concavo e giro.

4 – Figure trilatere

Euclide definisce *"figure rettilinee quelle che sono comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle che sono comprese da tre rette".* Quando poi passa a classificarle introduce il termine "triangolo". La classificazione in base agli angoli è la solita. Interessa quella in base ai lati:

"Delle figure trilatere è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, scaleno quello che ha i tre lati disuguali".

Per Euclide i tre tipi di triangoli: scaleni – isosceli – equilateri, costituiscono una *partizione* dell'insieme dei triangoli. Oggi si preferisce presentare i triangoli equilateri come un caso particolare di triangoli isosceli, definendo isosceli i triangoli che hanno *almeno* due lati uguali e *non* "*soltanto*" due lati uguali come fa Euclide. E' un atteggiamento molto diffuso nella matematica moderna: partire da insiemi molto generali per ritrovare in essi sottoinsiemi significativi.

Etimologicamente “isoscele” significa “con due gambe (σκέλοσ) uguali, mentre “scaleno” (da σκάζειν) significa “zoppicante”..

5 – Figure quadrilatere

Le figure quadrilatere sono quelle *“comprese da quattro rette”.* Ecco le definizioni di Euclide:

“Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamano trapezi”.

Anche qui, come nel caso dei triangoli, Euclide costruisce una partizione dell’insieme dei quadrilateri. Questo insieme viene pensato diviso in cinque “fette”, in cinque sottoinsiemi disgiunti. E’ una scelta diversa dalla nostra, ma, forse, didatticamente più efficace, o, almeno, più facile da ricordare.

E’ da notare che Euclide non usa mai il parallelismo (viene introdotto nella definizione successiva) per definire i vari tipi di quadrilateri neppure quelli che noi definiamo “parallelogrammi”.

La parola “rombo” richiama l’idea di “trottola”, mentre “trapezio” significa “piccola tavola”.

Nei “trapezi” di Euclide entrano i nostri trapezi, ma anche tutti i quadrilateri generici. La definizione euclidea di trapezio, nonostante che già Archimede richiedesse il parallelismo di due lati, è stata ripetuta in tanti libri didattici fino al secolo XIX.

6 – Un salto nello spazio

Euclide dedica i libri XI, XII e XIII alla geometria dello spazio o stereometria. Le definizioni sono date all’inizio del libro XI e non differiscono sostanzialmente dalle nostre. E’ da osservare che Euclide definisce i solidi rotondi, sfera, cono e cilindro, come solidi di rotazione.

7 – Osservazione

Euclide chiama “figure” solo gli “oggetti matematici” limitati, finiti come si vede da queste due definizioni:

“Termine è ciò che è estremo di qualche cosa” (def. XIII)

“Figura è ciò che è compreso da uno o più termini” (def. XIV)

Coerentemente, per limitarci al piano, egli chiama figure i cerchi, i triangoli, i quadrilateri ed i poligoni (figure multilatere).

E’ chiara la diversità rispetto a noi.

CAPITOLO TERZO

POSSIAMO DEFINIRE TUTTO?

1 – Introduzione

In matematica, a livello adulto, diamo molte definizioni in aritmetica, in algebra, in geometria, in probabilità. Anche nelle attività didattiche nella scuola elementare presentiamo delle definizioni.

Diciamo, per esempio, che un numero è pari quando è uguale alla somma di due numeri uguali, altrimenti è dispari, che un numero è primo quando è maggiore di 1 ed ha solo due divisori, altrimenti è composto. Tutte queste definizioni presuppongono di conoscere il significato della parola "numero". Quando si domanda agli insegnanti che cosa è "il numero" si ottengono risposte del tipo: è un simbolo (ma la matematica è piena di simboli che non sono numeri); è una quantità (che quantità è il numero $-\sqrt{2}$?). Incominciano a nascere delle perplessità sulle proprie convinzioni sul numero.

Anche in geometria presentiamo, in classe, delle definizioni. Per esempio diciamo che il quadrato è un quadrilatero con quattro angoli retti e quattro lati uguali. Per capire che cosa è un quadrato devo sapere che cosa è un angolo retto, e, quindi, un angolo, e che cosa è un segmento (i lati). Qui interviene necessariamente il concetto di retta che devo già conoscere. Ecco, allora, la domanda: che cosa è una retta? Le risposte che si ottengono dagli insegnanti e che si trovano scritte in libri di testo per la scuola media, sono diverse, e le vedremo fra poco, ma nessuna regge ad una semplice critica.

Ma allora vien fatto di domandarsi: in matematica ci sono "oggetti" che si possono definire ed altri che non si possono definire? In altre parole: in matematica possiamo definire tutto oppure no? E perché?

La scelta operata da Euclide è chiara: egli definisce tutti i termini che usa. Quasi tutte le sue definizioni sono accettabili e continuano ad essere usate anche ora, altre, invece, come quelle di punto, retta, piano, sono incomprensibili perché non vengono spiegate prima le parole che usa per definirle e comunque potrebbero essere tolte dagli Elementi perché Euclide non le usa mai nella sua trattazione. Dobbiamo fare anche noi come Euclide? Che cosa pensano ora i matematici e, quindi, come dovremmo comportarci noi a scuola?

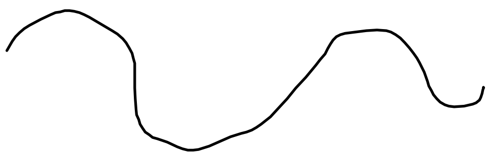
2 – Un caso emblematico: le definizioni di retta

Prendiamo la retta come "capro espiatorio" per avviarci a scoprire come la pensano ora i matematici.

Negli innumerevoli corsi di aggiornamento sulla geometria fatti ad insegnanti elementari e, in misura minore, a insegnanti di scuola media quasi sempre mi "scappava" (volutamente) la domanda: che cosa è una retta? Le risposte che ottenevo erano diverse.

🕐 *È una successione infinita di punti.*

Davanti a un disegno come questo



che è una successione infinita di punti tutti si accorgevano che la "definizione" data era, per lo meno, incompleta.

🕐 La definizione più gettonata era la seguente: **la retta è una successione di punti aventi tutti la stessa direzione.**

Facevo, allora, questo disegno,

……………. ●●●●●●●●●●●●●●●●●●● …………..

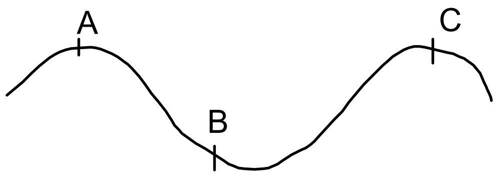
che verifica la definizione, ma non risponde al nostro solito concetto di retta. La domanda, poi, "che cosa è la direzione di un punto?" rimaneva senza risposta.

🕐 Alcuni insegnanti mi accusavano di barare perché i punti devono essere "vicini". Con una zummata sui punti facevo questo disegno:

e domandavo: tra due punti "vicini" ci sono altri punti?

Alcuni rispondevano no (sbagliato), altri rispondevano sì, ma allora che cosa vuol dire essere vicini?

🕐 Altri insegnanti definivano la retta una successione infinita di punti **allineati.** Alla domanda: quando i punti sono allineati? La risposta corale era: quando stanno sulla stessa linea.



Per tutti, però, i punti A, B, C, del disegno pur stando sulla stessa linea non sono allineati. Si giungeva subito alla conclusione che **i punti sono "allineati" quando sono sulla stessa retta e tutti si accorgevano del circolo vizioso commesso.**

Si potrebbe pensare che queste "definizioni" siano frutto della scarsa preparazione in geometria degli insegnanti elementari; purtroppo le troviamo anche su libri di testo della scuola media.

Per esempio, M. Pellerey, GEOMETRIA, Costruiamo la matematica per la scuola media, edito dalla SEI nel 1993, dedica la pagina 10 alla retta con il titolo "La retta come insieme di punti che stanno sulla stessa direzione dello spazio". Qui non si capisce se tutti i punti hanno la stessa direzione oppure se esista nello spazio una direzione sulla quale sono adagiati i punti. Nel corso della pagina, però, si afferma che la retta è un "ente che idealizza situazioni in cui i punti si susseguono l'uno dopo l'altro mantenendo sempre la stessa direzione". Qui si capisce che sono i punti ad avere tutti la stessa direzione, anche se non si sa che cosa sia la direzione di un punto. I punti che "si susseguono uno

dopo l'altro" richiama i "punti vicini" di prima. La conclusione è la definizione messa ben in evidenza in un rettangolo giallo: *"La retta è una figura geometrica costituita da un insieme di punti che si trovano tutti sulla stessa direzione dello spazio".*

La situazione non migliora se andiamo a vedere il testo di

Gilda Flaccavento Romano, Obiettivi e metodi, Geometria, edito da Fabbri nel 1994. A pagina 16 troviamo incorniciata, nel solito rettangolo giallo, la "definizione": *"La retta è il secondo ente fondamentale; possiamo immaginarla come un insieme consecutivo e infinito di punti aventi la stessa direzione."*

La direzione dei punti deve aver folgorato insegnanti ed autori di libri di testo. Che cosa sia, poi, un "insieme consecutivo" di punti non so proprio immaginare.

Le cose che finora abbiamo detto, da una parte sottolineano la difficoltà di definire in modo accettabile un "oggetto geometrico" molto familiare come è la retta, dall'altra fanno nascere la curiosità di vedere come se la cavano i matematici, che scelte hanno operato per uscire dal tunnel.

3 – Nascono i concetti primitivi

Le definizioni, come dice la parola stessa, servono per tracciare i confini di un concetto, per caratterizzarlo rispetto agli altri concetti. Per fare questo bisogna avvalersi di concetti già noti. Per esempio, sapendo che cosa vuol dire dividere un numero a per un numero b posso definire i numeri pari come quelli che sono divisibili per 2.

La conseguenza è che in matematica non si può definire tutto.

Facciamo un discorso generale che vale per qualsiasi teoria matematica.

Supponiamo di voler introdurre, mediante una definizione, un concetto che chiamiamo A. Dobbiamo, allora, utilizzare altri concetti già noti, che chiamiamo B. Questi, a loro volta, saranno stati definiti facendo ricorso ad altri concetti che denotiamo con C, i quali, a loro volta, devono...

In questi processi di risalita si presentano tre possibilità:

1. dopo un certo numero di passi si ritorna ad A, cioè si utilizza il concetto A per definire A stesso. È il classico **"circolo vizioso"** che non definisce niente. La " definizione" di retta che fa intervenire i "punti allineati" è di questo tipo;

2. si continua a ricorrere ad altri concetti senza arrestarsi mai. È il cosiddetto **"regresso all'infinito"** che non permette di definire il concetto di partenza. Viene il momento di morire e stiamo ancora cercando, invano, di definire il concetto A;

3. ci si ferma ad un certo punto fissando uno o più concetti senza definirli e li si utilizza per definire tutto il resto.

Questa è l'unica strada praticabile se vogliamo dare delle definizioni dotate di senso. Quindi siamo "costretti" a sceglierla se vogliamo fare una teoria razionale.

I concetti che vengono scelti per definirne altri, ma dei quali non si dà una definizione si chiamano **concetti (o termini) primitivi.** Essi costituiscono le fondamenta dell'edificio teorico nel senso che tutti gli altri concetti possono essere definiti utilizzando i concetti primitivi.

Noi siamo obbligati a scegliere dei concetti primitivi perché **non si può definire tutto**, ma siamo **liberi** sia di fissare i **criteri** di scelta, sia nello scegliere un concetto piuttosto che un altro.

I criteri cui **ispirarsi** possono essere quelli **dell'evidenza, della semplicità, della bellezza, della forza,** ecc... Si tratta di criteri soggettivi per cui matematici che si ispirano agli stessi criteri possono scegliere concetti primitivi diversi.

Questa libertà di scelta ci fa capire subito che non esistono concetti primitivi per "diritto naturale", cioè concetti che debbano essere necessariamente scelti come primitivi in aritmetica, in geometria, ecc...

Nonostante questa libertà, fra i **concetti primitivi della geometria** ci sono sempre (o quasi) quelli di **punto**, di **retta**, di **piano**.

Sarà anche la scelta per questo corso.

Una volta scelti i concetti primitivi si incominciano a introdurre i **concetti definiti** utilizzando quelli primitivi.

Scelti, per esempio i concetti primitivi di punto, retta e piano possiamo subito definire

- **figura piana**: una qualunque insieme non vuoto di punti del piano;
- **triangolo**: una terna ABC di punti del piano non allineati;
- **quadrilatero**: una quaterna ABCD di punti del piano a tre a tre non allineati.

Utilizzando proprietà di concetti primitivi e di concetti già definiti si introducono altre definizioni. Anche nel dare le definizioni noi abbiamo una grande **libertà**. Possiamo scegliere quali proprietà inserire nella definizione di un concetto (avremo definizioni più o meno ricche) e possiamo anche scegliere come caratterizzare un concetto.

Esempio: la definizione di triangolo data sopra è la più scarna e richiede di conoscere solo i concetti di punto, di retta e di piano. Avendo a disposizione il concetto di segmento possiamo dare la più familiare definizione: una terna ABC di punti non allineati con i segmenti AB, BC e CA.

Insieme alla libertà di scelta ci deve essere anche la **coerenza** nell'accettare le conseguenze della definizione scelta.

Esempio: se si definisce isoscele il triangolo che ha **un solo** asse di simmetria bisogna accettare che un triangolo equilatero non è isoscele.

Osservazione 1

Le definizioni sono necessarie ed utili nella scuola media. E nella scuola elementare?

I programmi del 1955 proibivano di dare definizioni in geometria: "*Per la geometria l'alunno verrà condotto in via naturale a riconoscere le principali figure piane e solide cioè attraverso il disegno e le*

più evidenti proprietà, ***mai attraverso la definizione,*** *spesso non compresa, sempre dannoso sforzo mnemonico".*

I programmi del 1985 non sono così categorici, ma non parlano mai di dare definizioni. Basta che gli alunni sappiano riconoscere e denominare la varie figure piane e solide. Questa osservazione vale anche per le Indicazioni Nazionali e per le Indicazioni per il Curricolo.

Certamente gli insegnanti devono conoscere molto bene le definizioni.

In quarta e in quinta si può cercare, con metodo induttivo, di far formulare dai bambini qualche definizione significativa. Si possono, per esempio, caratterizzare triangoli e quadrilateri in base ai loro elementi di simmetria. Un aiuto notevole per questa attività può essere fornito dall'uso di software di geometria dinamica come Cabri (si possono vedere in proposito le attività descritte nel Quaderno Didattico N. 19)

Osservazione 2

Una domanda che spesso mi è stata fatta dagli insegnanti è la seguente: che cosa dire ai bambini dei concetti primitivi: punto, retta e piano? Come caratterizzarli?

Di questi concetti, anzitutto, bisogna dare delle "immagini" suggerite dal disegno o da oggetti. Per il punto si può ricorrere al segno lasciato dalla penna, al "puntino" sulla "i", ad un oggetto molto piccolo ecc...

Per la retta si può ricorrere allo spigolo di un tavolo, alle righe dei quaderni, ecc...

Per il piano si può ricorrere ad un tavolo, al mare calmo, ecc...

La cosa più importante, però, è di caratterizzarli mediante le proprietà che li mettono in relazione tra loro come, per esempio, "per due punti passa una ed una sola retta"; "dati una retta ed un punto fuori di essa, per il punto passa una ed una sola parallela alla retta data" ecc.

Queste proprietà sono gli **assiomi** (o i teoremi) di cui parliamo al paragrafo seguente.

4. Assiomi e teoremi

In ogni teoria matematica ci sono assiomi (o postulati) e teoremi. Si tratta di affermazioni o "verità" matematiche.

In aritmetica noi affermiamo che "esistono infiniti numeri primi" e dimostriamo questa affermazione come aveva fatto Euclide. Siamo di fronte ad un **teorema**.

In geometria noi tutti ricordiamo l'affermazione "Per due punti passa una sola retta", ma non dimostriamo, in genere, questa affermazione. Siamo di fronte ad un **assioma**.

In una teoria come **non tutto può essere definito** così **non ogni affermazione può essere dimostrata.**

Ci troviamo nella stessa situazione esaminata alle pagine precedenti a proposito dei concetti. Quando vogliamo dimostrare una certa affermazione, per esempio che in un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei due cateti, dobbiamo utilizzare affermazioni già acquisite le quali devono essere dimostrate in base ad altre "verità" già dimostrate, ecc...

Se non vogliamo cadere in un circolo vizioso o in un regresso all'infinito, nel qual caso non dimostreremmo niente, dobbiamo necessariamente scegliere alcune "verità" e accettarle senza dimostrarle.

Queste "verità" sono dette **assiomi** o **postulati** e sono esse che permettono di dimostrare altre affermazioni che si chiamano **teoremi**.

Generalmente gli assiomi riguardano i concetti primitivi e stabiliscono i rapporti che li legano. Servono a caratterizzare i concetti primitivi, a imporre loro delle "regole di comportamento".

Concetti primitivi espressi con gli stessi nomi ma caratterizzati con assiomi diversi possono dare origine a "cose" diverse.

Per esempio, le rette nella geometria euclidea sono "diritte", mentre nella geometria sferica (quella del mappamondo) sono curve.

L'identikit dei concetti primitivi è dato dagli assiomi.

Se da una parte è necessario scegliere degli assiomi per costruire una teoria matematica razionale, dall'altra siamo **liberi** sia nel fissare **i criteri di scelta**, sia nella **scelta** effettiva degli assiomi.

I criteri di scelta, come già detto, possono essere quelli dell'evidenza, della semplicità, della forza, della bellezza. Assiomi forti permettono, per esempio, di arrivare presto a teoremi significativi.

Per i greci, ed anche ora per molti autori di libri di testo, l'evidenza era l'unico criterio di scelta: gli assiomi erano verità evidenti e quindi non dimostrabili. Ora i matematici la pensano diversamente come è ben spiegato nel seguente brano.

"Invece di concepire la differenza tra i postulati e le altre proposizioni come consistente nel possesso, da parte dei primi, di qualche speciale carattere che li renda per se stessi più accettabili, più evidenti, meno discutibili, i logici matematici vedono nei postulati delle proposizioni come tutte le altre, la cui scelta può essere diversa a seconda degli scopi ai quali la trattazioni mira.[...]. I postulati hanno dovuto, cioè, rinunciare a quella specie di "diritto divino" di cui sembrava investirli la loro pretesa evidenza e rassegnarsi a diventare invece che "gli arbitri" , " i servi servorum", i semplici "impiegati" delle grandi "associazioni" di proposizioni che costituiscono i vari rami della matematica".

5. Conclusione

E' ovvio che la geometria che si insegna alla scuola elementare è una geometria intuitiva basata sulle descrizioni, sul disegno, sulle manipolazioni, sulle costruzioni con materiali. E' necessario, però, che l'insegnante abbia ben chiara la struttura logica della geometria, quando essa viene organizzata in modo razionale. Questa struttura logica è costituita dai seguenti elementi:

- un insieme di concetti primitivi (in geometria sono almeno quelli di punto, retta, piano dei quali non bisogna dare nessuna definizione)
- un insieme di concetti definiti (come quello di poligono, di rette parallele, ecc, alcuni dei quali possono essere costruiti anche alla scuola elementare)

- un insieme di assiomi (deve conoscerli l'insegnante per capire che cosa sta sotto a certe attività. Per esempio che la somma degli angoli interni di un triangolo valga due retti si basa sulla unicità della parallela)
- un insieme di teoremi (qualcuno può essere scoperto anche nella scuola elementare. Per esempio, partendo dal fatto che un triangolo isoscele ha un asse di simmetria, si può scoprire che ha due lati uguali e due angoli uguali piegando il triangolo lungo l'asse di simmetria)
- un insieme di regole logiche in base alle quali dare definizioni e fare dimostrazioni.

I primi quattro insiemi vengono sempre esplicitati quando si costruisce un teoria matematica; l'ultimo si suppone noto ed è costituito dalle regole logiche accettate nei nostri soliti ragionamenti.

Un sistema così organizzato è detto **sistema assiomatico**.

Conviene dire esplicitamente che non è solo la geometria ad essere organizzata assiomaticamente. Lo è, per esempio, anche l'aritmetica. Peano, per esempio, sceglie tre concetti primitivi (numero, zero, successivo) e cinque assiomi con cui caratterizza l'aritmetica.

6. Esercizi

Questi esercizi fatti all'inizio del corso servono per riprendere vecchie conoscenze, prepararne di nuove, rendersi conto su quali concetti si appoggiano.

1. Dare la definizione di segmento [ce ne sono diverse ed essi sono continuamente presenti nella geometria elementare]
2. Che cos'è un cerchio? [interviene il concetto di distanza]
3. Che cos'è l'asse di un segmento? [se ne possono dare tre a seconda dei concetti che si possiedono]
4. Per tre punti non allineati quanti cerchi passano? E per tre punti allineati?
5. Per due punti quanti cerchi complanari passano? [forse c'è qualche sorpresa]
6. Che cosa è una semiretta?

CAPITOLO QUARTO

PREPARIAMO GLI STRUMENTI

1 – Introduzione

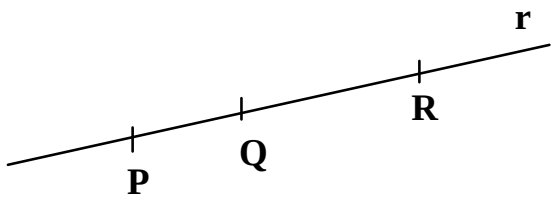
Per iniziare il nostro corso abbiamo a disposizione, per la scelta che abbiamo fatto, i concetti primitivi di punto, retta e piano. Si tratta di "oggetti geometrici" non strutturati dei quali dobbiamo servirci per introdurre altri concetti. Prima, però, dobbiamo in qualche modo strutturali cioè arricchirli di alcune proprietà e lo faremo introducendo dei postulati anche se ci manterremo a livello intuitivo per non appesantire troppo la trattazione. Potremo, così, vedere i rapporti fra questi concetti primitivi, cioè il loro modo di comportarsi. In realtà abbiamo già visto qualcosa. Per esempio, abbiamo già detto che "per due punti passa una ed una sola retta". Questo ci dice che per individuare completamente una retta non è necessario conoscere tutti i suoi punti, ma basta conoscerne due. Dovremo anche studiare i rapporti fra due rette complanari e, quindi, introdurre delle relazioni fra due rette. Andremo un po' fuori del campo delle figure, ma non possiamo evitarlo. Incominciamo con le rette.

2 – Ordiniamo i punti di una retta

La nostra intuizione ci dice che su una retta ci sono infiniti punti, anche se ne bastano due per descriverla completamente.

Questi infiniti punti non sono come un esercito in rotta nel quale ogni soldato va per la sua strada al grido di "si salvi chi può". Se pensiamo ad un'autostrada come immagine, un po' grossolana, della retta, andando da Firenze verso Milano incontriamo prima Bologna, poi Modena, poi Parma e infine Milano. Le stesse città si susseguono in ordine opposto se andiamo da Milano a Firenze.

Così se disegniamo una retta r sul foglio, e segniamo tre punti qualunque P, Q, R, andando da sinistra a destra incontriamo prima P, poi Q e poi R.



Andando da destra a sinistra si incontrano gli stessi punti in ordine opposto.

Tutto ciò ci fa intuire che i punti di una retta li possiamo ordinare e che possiamo percorrere la retta in **due versi** uno opposto all'altro.

Per dare un significato matematico a tutto ciò è necessario introdurre il concetto di **relazione di ordine**. Tutti i programmi prevedono di ordinare i numeri (naturali, interi relativi, le più semplici frazioni, i numeri decimali), ma solo quelli del 1985 parlano esplicitamente del confronto fra grandezze in geometria.

La relazione di ordine è importante anche in geometria, come vedremo subito.

Questa relazione viene, di solito, indicata col simbolo **>** (maggiore) o con < (minore). Parlando di punti si usa spesso il verbo "precedere" al posto di minore e "seguire" al posto di maggiore.

Ci sono vari tipi di relazioni di ordine, caratterizzate da alcuni aggettivi come: stretto, totale, parziale, largo.

Noi ora diamo ora la definizione generale di **relazione d'ordine stretto e totale:**

Definizione: Una relazione binaria in un insieme A si dice di ordine stretto e totale quando è

- **antiriflessiva:** nessun elemento x di A è maggiore di se stesso
- **antisimmetrica:** se $x > y$ e $y > x$ allora $x = y$
- **transitiva**: cioè se $x > y$ e $y > z$ allora $x > z$
- **tricotomica**: dati due elementi qualunque x e y di A si verifica uno ed uno solo di questi tre casi: $x > y$, $x = y$, $y > x$.

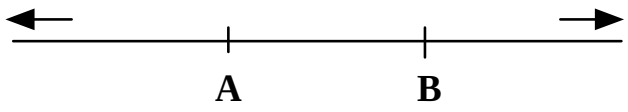
La proprietà antisimmetrica e quella transitiva formano lo "zoccolo duro" delle relazioni di ordine: le possiedono tutte. La proprietà antiriflessiva caratterizza le relazioni di ordine stretto, mentre la tricotomia è tipica delle relazioni di ordine totale. Per fare un esempio: la familiare relazione di ordine $\geq$ (maggiore o uguale) è di ordine largo ed è riflessiva; la relazione di inclusione fra insiemi è di ordine parziale perché non è tricotomia (due insiemi possono essere diversi e nessuno dei due essere incluso nell'altro).

Ritorniamo alle nostre rette. Se vogliamo che i loro punti siano ordinati, come suggerisce la nostra intuizione, abbiamo una sola possibilità: richiedere (postulare) esplicitamente che lo siano. Ecco, allora la proprietà, la struttura, che vogliamo esista su ogni retta:

Proprietà 1: Su ogni retta r esistono due ordini stretti e totali uno opposto all'altro.

Qualche commento.

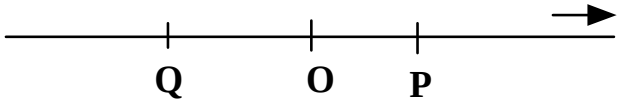
- I due ordini si chiamano anche **versi** e di solito vengono indicati con una freccia.
- Un punto B tale che $A<B<C$ si dice compreso fra A e C.
- I due versi si dicono opposti perché se in un verso A precede B, nell'altro B precede A.



- Quando viene fissato un verso la retta si dice **orientata**.
- Non bisogna confondere i **versi** di una retta che **sono due**, con la **direzione** di una retta che, come vedremo in seguito, **è una sola**. Qui abbiamo un nemico: il linguaggio comune che, spesso, identifica il verso con la direzione.

3 – Nascono le Semirette

Prendiamo una retta r, fissiamo un verso che chiamiamo positivo.



Di solito è il verso che va da sinistra a destra, ma questo non è obbligatorio. La parola "positivo" fa venire in mente i numeri che distinguiamo in positivi e negativi, almeno dai numeri interi relativi in poi. Vi è, infatti, uno stretto legame fra i punti ordinati della retta ed i numeri dato che li possiamo "depositare" sulla retta stabilendo una corrispondenza biunivoca fra punti della retta e numeri reali.

Fissiamo, ora, un punto O qualunque della retta. Nascono, allora, due semirette di origine O, una che indichiamo con r^+ e chiamiamo positiva, formata dai punti che, nel verso fissato, **seguono** O e l'altra, che indichiamo con r^- e che chiamiamo negativa, formata dai punti che **precedono** O. Il punto O è l'**origine** delle due semirette.

In simboli

$$r^+ = \{ P \varepsilon r : O < P \} \qquad r^- = \{ Q \varepsilon r : Q < O \} \quad (1)$$

Quando sulla retta si "depositano" i numeri reali, quelli positivi andranno sulla semiretta positiva, quelli negativi sulla semiretta negativa.

Le due semirette rappresentate in (1) sono **aperte** perché l'origine O non appartiene a nessuna delle due. Se vogliamo le semirette **chiuse** basta sostituire il simbolo $<$ con $\leq$. Allora O appartiene a tutte e due. E' bene sottolineare esplicitamente che **ogni punto** che si fissa su una retta dà origine a due semirette. Perciò due punti danno origine a quattro semirette che possono essere disgiunte, cioè non avere punti in comune, oppure no.

Le semirette trovano un uso immediato nella definizione di angolo. I lati di un angolo sono semirette.

Osservazione

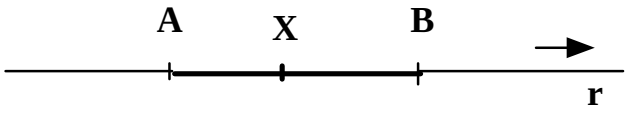
Alle volte sui sussidiari c'è scritto che mentre la retta non ha né un primo né un ultimo punto, la semiretta ha un primo punto, ma non un ultimo punto. Precisiamo che le semirette aperte hanno un'origine ma **non** un primo punto, mentre quelle chiuse hanno un primo punto.

Osservazione

La parola "semiretta" può far pensare che essa sia "metà retta". Questa espressione è falsa se si pensa al numero di punti (retta e semiretta hanno lo stesso numero di punti) e non ha senso se si pensa alla "lunghezza" che in entrambi i casi è infinita.

4 – Nascono i segmenti

Fissati due punti A e B su una retta orientata r, si chiama **segmento** di estremi A e B l'insieme dei punti X compresi tra A e B, cioè che seguono A e precedono B.



In simboli: AB = { X ε r : A < X < B }

Questo è il segmento **aperto** perché gli estremi non fanno parte del segmento. Se lo vogliamo **chiuso** basta sostituire < con ≤. Giocando con < e ≤ possiamo avere un segmento semichiuso a destra o a sinistra.

Dei segmenti si fa un uso massiccio in geometria anche nella scuola elementare. Per esempio, i lati dei poligoni sono segmenti, le altezze, le diagonali dei poligoni sono segmenti, i raggi ed i diametri di un cerchio sono segmenti, gli spigoli e le altezze dei poliedri sono segmenti.

Essi ci permettono anche di introdurre l'importante nozione di **figura convessa e di figura concava.**. Prima, però, dobbiamo dire che cos'è una figura piana.

Osservazione

I giochetti con < e ≤ sono per adulti e servono a far vedere la libertà di scelta.

In classe la scelta è unica: semirette e segmenti li consideriamo sempre chiusi.

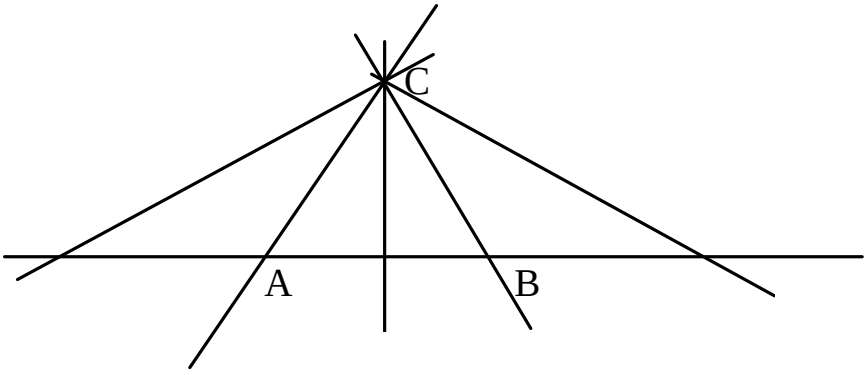
5 – Nascono i semipiani

Abbiamo visto che su una retta ci sono infiniti punti, ma basta conoscerne due per individuare completamente la retta.

Anche su un piano ci sono infiniti punti, ma non è necessario conoscerli tutti per tracciare "l'identikit" del piano; basta conoscerne tre che stiano sulla stessa retta. Si tratta di una proprietà importante e vogliamo richiedere (postulare) che valga sempre:

Proprietà: per tre punti A, B, C non allineati passa uno ed un solo piano.

E' ovvio che su un piano, come ci sono infiniti punti, ci sono anche infinite rette come si vede nel disegno: le infinite rette nascono unendo il punto C, che non sta sulla retta AB con tutti i punti della retta AB.



Ora affrontiamo i rapporti retta piano.

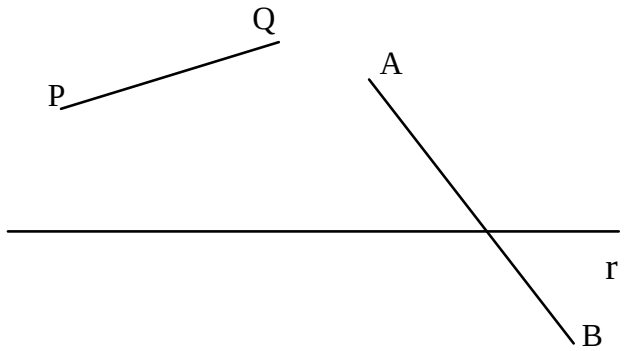
La nostra intuizione geometrica ci dice chiaramente che una retta spezza il piano in due regioni distinte. Possiamo pensare questo fatto come la matematizzazione di diverse situazioni come una pianura attraversata da un fiume, oppure un foglio di carta piegato in due parti.

È immediato riconoscere che due località che si trovano dalla stessa parte rispetto al fiume possono essere collegate da una strada che non attraversa il fiume, mentre una strada che collega due località che stanno da parti opposte del fiume deve necessariamente attraversarlo.

Vogliamo matematizzare questo fatto richiedendo che valga una nuova proprietà:

Proprietà: Data nel piano una retta r, i punti del piano che non appartengono ad r risultano suddivisi in due regioni, dette semipiani, con le seguenti proprietà:

- **il segmento che unisce due punti P e Q dello stesso semipiano non taglia la retta r;**
- **il segmento che unisce due punti A e B di semipiani diversi taglia la retta r.**



Qualche parola di commento.

- La retta r di cui si parla si chiama **bordo** o **frontiera** di ciascuno dei due semipiani.
- I due semipiani che nascono dalla proprietà enunciata, e che possiamo chiamare α_1 e α_2 sono **aperti** perché non contengono r. Quando è necessario possiamo considerarli **chiusi.**

  Basta aggiungere a ciascuno il bordo r.
- I due semipiani di bordo r si dicono **opposti** fra loro.

I semipiani non vengono usati in modo esplicito nella scuola elementare, ma è bene che l'insegnante abbia coscienza di quando vengono usati in modo implicito. Per esempio, quando si presenta l'angolo come "parte del piano racchiusa fra due semirette con l'origine comune" si fa ricorso alla intersezione di due semipiani; quando si presenta il triangolo "pieno" in modo che abbia senso calcolarne l'area, si ricorre alla intersezione di tre semipiani.

7 – Nascono i semispazi

Abbiamo visto che un punto su una retta fa nascere dure semirette; una retta sul piano fa nascere due semipiani. E un piano nello spazio che cosa fa nascere?

Anche nella scuola elementare si studia un po' di geometria dello spazio. Per poter parlare di spazio è necessario avere almeno 4 punti che non stiano nello stesso piano. Una figura molto familiare che ci aiuta a capire questa situazione è una piramide a base triangolare: tre punti stanno nello stesso piano (il triangolo della base) ed un punto (il vertice della piramide) sta fuori da questo piano. In realtà nello spazio ci sono infiniti punti, ma basta conoscerne 4 non complanari per determinare completamente lo spazio.

Rispondiamo alla domanda che ci siamo fatti prima.

Un piano divide i punti dello spazio che non stanno sul piano in due regioni, chiamate semispazi, con queste proprietà:

- **Due punti dello stesso semispazio possono sempre essere congiunti da un segmento che non taglia il piano;**
- **Un segmento che unisce due punti appartenenti a semispazi diversi taglia sempre il piano.**

Qualche parola di commento.

Il piano di cui si parla si chiama **bordo** o **frontiera** di ciascuno dei due semispazi. I due semispazi che nascono dalla proprietà enunciata, sono **aperti** perché non contengono il piano. Quando è necessario possiamo considerarli **chiusi.** Basta aggiungere a ciascuno il bordo. I due semispazi si dicono **opposti** fra loro.

I semispazi vengono usati, non nella scuola elementare, per definire i poliedri convessi: essi nascono intersecando, in modo opportuno, un certo numero di semispazi.

8 – Figure geometriche. La famiglia delle figure convesse.

Più di un a volta abbiamo usato la parola "figura". E' arrivato il momento di darne la definizione anche perché il corso è dedicato alle figure geometriche.

Durante i corsi di aggiornamento mi sono spesso divertito a chiedere la definizione di **figura piana**. La risposta più gettonata era questa:

🕐 **è la parte di piano delimitata da una spezzata chiusa.**

Chiedevo, allora, se un cerchio è una figura geometrica. Il pubblico si divideva in due fazioni: quella dei " coerenti" (con la definizione data) rispondeva negativamente; quella degli "incoerenti" rispondeva affermativamente perché sembrava assurdo non includere il cerchio tra le figure geometriche.

Emergeva, allora, un'altra definizione:

🕐 **è la parte di piano delimitata da una linea chiusa.**

In questo modo si possono considerare figure il cerchio e l'ellisse, ma dal mondo delle figure geometriche restano fuori segmenti, semirette, angoli, rette, ecc.... E questo sembra francamente inaccettabile.

Le due definizioni date **non sono errate**, ma sono **troppo limitate, troppo particolari.** Conviene dare una definizione più generale.

Definizione: Si chiama figura geometrica piana ogni insieme non vuoto di punti del piano.

Come ognun vede si tratta di una definizione estremamente semplice, molto più semplice delle altre due, e molto generale. E molto più economica perché si usa solo i concetti primitivi di "punto e di piano" e il concetto, non geometrico, di "insieme non vuoto".

Ci si può domandare se sia il caso di presentare questa definizione alla scuola elementare. Certamente essa non può essere il punto di partenza delle figure piane, potrebbe, però, essere il punto di arrivo di un lungo cammino. Secondo me, se si vuole presentare questa definizione, bisogna aspettare la quinta elementare, considerata anche come classe nella quale si riflette sul cammino percorso. In sostanza, dopo aver visto tante figure piane diverse, ci si può domandare se esse hanno qualcosa di comune. La risposta è che esse sono tutte formate da punti.

Naturalmente non tutte le figure sono ugualmente importanti, familiari e ricche di proprietà. Una "manciata" di punti è certamente una figura geometrica, ma non ha nessun interesse studiarla.

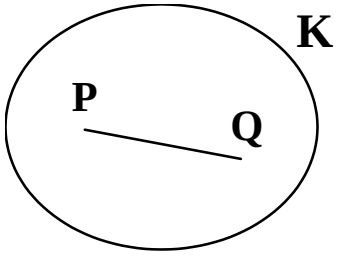
Lo studio nostro e l'attività in classe sarà dedicata soprattutto a figure che sono importanti nella nostra vita quotidiana (sono importanti gli oggetti da cui esse derivano) e sono interessanti per le loro proprietà matematiche.

In forza della definizione data il mondo delle figure piane non è popolato solo di poligoni e di cerchi, ma anche di rette, semirette, segmenti, punti, angoli, ecc....

Le figure geometriche si dividono in **due grandi famiglie: la famiglia delle figure convesse e quella delle figure non convesse o concave.** La prima famiglia è quella più interessante ed è quella quasi esclusivamente studiata nella scuola elementare. Ci sono figure che possono essere solo convesse, come i triangoli ed i cerchi, ed altre, come i quadrilateri, che possono essere convesse o concave.

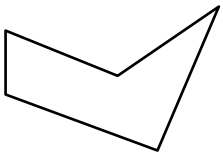
Spesso nella scuola elementare, e anche oltre, ci si accontenta di caratterizzare singole figure convesse, come angoli e poligoni, con definizioni particolari, ad hoc. È, invece, opportuno introdurre il concetto generale di insieme convesso, o figura convessa, e ricorrere ad essa anche nel caso di figure specifiche. Ecco la definizione.

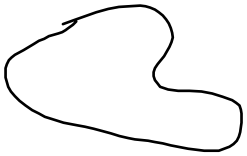
Definizione: Un insieme K del piano è convesso se, presi due suoi punti qualunque P e Q, il segmento PQ che li unisce è tutto contenuto in K.



Segmenti, rette, semirette, semipiani, semispazi, triangoli, cerchi sono esempi semplici di figure convesse.

Ovviamente esistono anche figure non convesse come queste





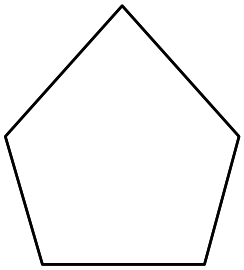
Perché una figura sia non convessa o concava basta che **esista una coppia di suoi punti che sono uniti da un segmento che non è tutto contenuto nella figura.**

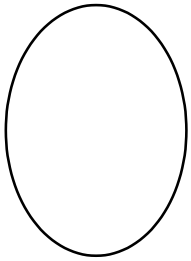
9 – Attività didattiche

I protocolli che seguono illustrano alcune attività sulle figure convesse e concave svolte in una classe quinta. Le figure convesse e concave vengono anche caratterizzate operativamente col fatto che percorrendo il loro contorno si mantenga o no "la stessa mano".

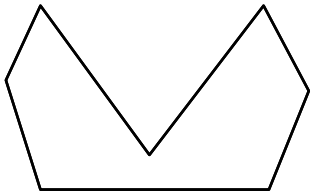
FIGURE CONCAVE E FIGURE CONVESSE

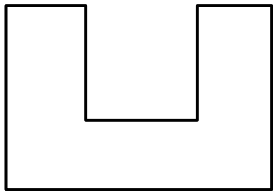
Abbiamo disegnato sul pavimento dell'aula due figure. Abbiamo percorso i loro confini. Su una figura abbiamo camminato in senso orario sempre andando a destra: è una figura convessa.

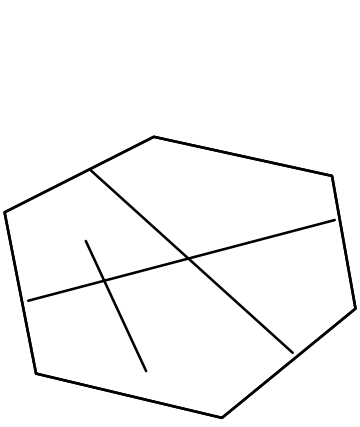


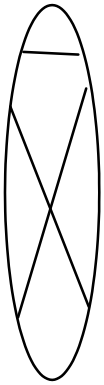


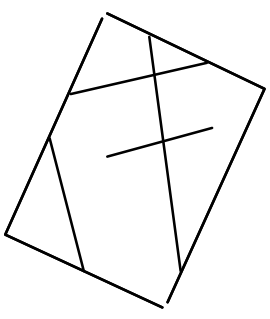
Sull'altra figura abbiamo girato prima a destra, poi a sinistra, poi ancora a destra : è una figura concava.

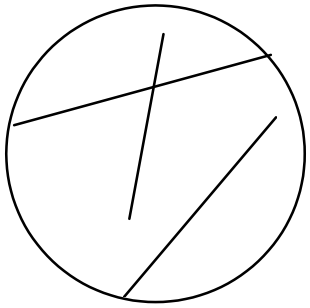




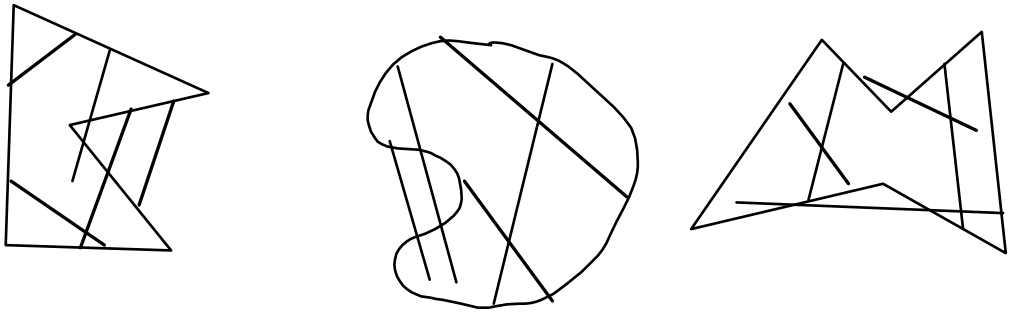








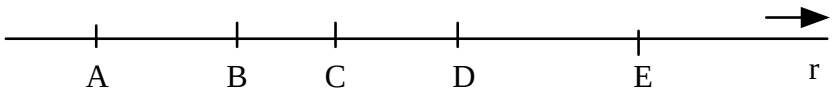
Sono figure convesse perché se percorro i loro confini in senso orario giro sempre verso destra, se percorro i loro confini in senso antiorario giro sempre a sinistra. Inoltre se congiungo due punti qualsiasi della figura il segmento che unisce i due punti è sempre contenuto nella figura.



Sono figure concave perché se percorro i loro confini sia in senso orario sia in senso antiorario devo girare un po' a destra e un po' a sinistra. Inoltre se congiungo due punti qualsiasi della figura, il segmento che li unisce non è sempre contenuto nella figura.

10 - Esercizi

1) Sulla retta r sono segnati questi punti:



Quanti segmenti sono segnati? E quante semirette?

2) Il segmento A |——————| B ha infiniti punti ?

3) Il segmento A |——————| B ha più punti di C |——————| D ?

4) L'unione di due figure convesse è una figura convessa? E l'intersezione?

5) Un punto è una figura convessa?

6) La relazione di incidenza fra rette è riflessiva? È transitiva?

CAPITOLO QUINTO

TRE RELAZIONI FONDAMENTALI

1 – Introduzione

Questo corso vuole interessarsi delle figure geometriche. Per farlo, però, dobbiamo necessariamente parlare anche di relazioni fra rette e fra piani perché esse intervengono nella definizione di alcune figure. Lo facciamo in questo capitolo.

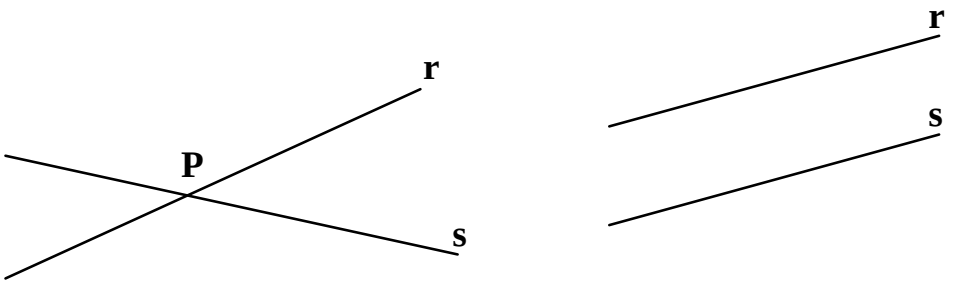
2 – Relazioni di incidenza.

Su un piano ci sono infinite rette. Se ne consideriamo due che cosa può capitare?

Può capitare che abbiano **due punti** in comune. Allora che due rette **coincidono** perché per due punti passa una ed una sola retta.

Può capitare che **non abbiamo punti** in comune. Allora le due rette sono **parallele** (ne parleremo diffusamente fra poco).

Può capitare che abbiano **un solo punto** in comune. Allora le due rette si dicono **incidenti**.



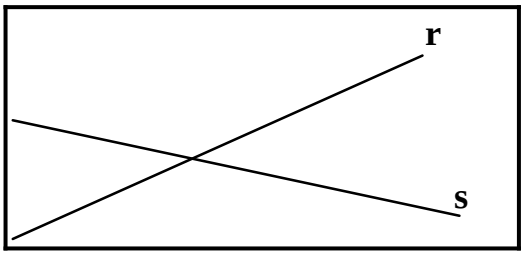
Ecco la definizione formale:

Definizione: Due rette a e b che hanno **un solo punto in comune** si dicono **incidenti.**

Quando i matematici introducono una relazione fra certi oggetti matematici si domandano sempre quali sono le proprietà di cui la relazione gode. Qui si vede immediatamente che la relazione binaria di incidenza fra rette fra è simmetrica perché se a è incidente a b allora anche b è incidente ad a.

Osservazione.

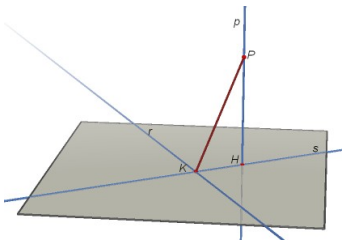
Spesso nei sussidiari si parla di rette convergenti e di rette divergenti.



Le rette r e s sarebbero convergenti a sinistra e divergenti a destra. La distinzione è priva di senso perché esse sono anche convergenti a destra e divergenti a sinistra. Esse sono semplicemente **incidenti.**

Si parla di **incidenza anche fra una retta ed un piano**. Una retta è incidente ad un piano quando con esso ha in comune un solo punto. Intuitivamente: la retta sta fuori del piano, lo buca in un punto ed esce nell'altro semispazio.

Anche **due piani possono essere incidenti**. Ora, però, non entra in gioco un singolo punto, ma una retta:**due piani sono incidenti** quando hanno in comune una sola retta.



Nella figura la retta p è incidente al piano "di base" (è anche perpendicolare) ed il piano PHK è incidente al piano di base. La retta HK è la retta di incidenza.

Le relazioni di incidenza che abbiamo introdotto entrano in gioco, per esempio, negli angoli, nei poligoni e nei poliedri.

3 – Relazioni di perpendicolarità

Noi siamo circondati da "oggetti" nei quali ci sono elementi di perpendicolarità. Basta pensare ai muri di una stanza. Non c'è, quindi, da meravigliarsi se i programmi del 1985 collocano la perpendicolarità fra gli obiettivi irrinunciabili dell'apprendimento geometrico:

" *Si porrà particolare attenzione ad una corretta acquisizione dei concetti fondamentali di*

[...] perpendicolarità ".

Per il secondo ciclo si prevede di : " *usare correttamente espressioni come: [...], rette perpendicolari; disegnare con riga, squadra e compasso, rette parallele e perpendicolari"* .

Le Indicazioni Nazionali del 2004 nominano esplicitamente la relazione di perpendicolarità fra rette, mentre quelle del 2007 semplicemente la suppongono (parlano di piano cartesiano).

Il concetto di perpendicolarità è

- **semplice** perché è solo un caso particolare di incidenza
- **complesso** perché fa appello a concetti che semplici non sono.

Si possono dare diverse definizioni di perpendicolarità a seconda dei concetti che si vogliono utilizzare e che, quindi, si presuppongono noti.

Si possono distinguere **due tipi** di definizioni:

quelle che fanno intervenire il **concetto di angolo;**

e quelle che fanno ricorso al concetto di **simmetria assiale** con le sue proprietà.

3.1 Definizioni che fanno intervenire il concetto di angolo.

Presupposti noti i concetti di **angoli congruenti** e **angoli adiacenti** si può dare questa definizione:

Definizione 1: Una retta r è perpendicolare ad una retta s se le due rette, incontrandosi, formano due angoli adiacenti congruenti.

Le parole usate nella definizione (angolo, angoli congruenti, angoli adiacenti) sono molto familiari, ma il concetto di angolo e di angoli congruenti non sono semplici.

Se si presuppone noto il concetto di **angolo retto** si può dare quest'altra definizione:

Definizione 2: Una retta r è perpendicolare ad una retta s se le due rette, incontrandosi, formano un angolo retto.

Questa definizione sembra più semplice della precedente, ma non lo è. Infatti un angolo è **retto**

quando è uguale (congruente) ad un suo adiacente.

Se si presuppongono noti i **concetti** di **ampiezza angolare** e di **misura delle ampiezze** si può

dare la seguente:

Definizione 3: Una retta r è perpendicolare ad una retta s se le due rette,

incontrandosi, formano un angolo la cui ampiezza, in gradi sessagesimali, misura 90.

È la definizione più difficile.

3.2 Definizione che fa ricorso al concetto di **simmetria assiale** con le sue proprietà.

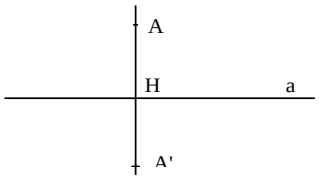
Non possiamo ora parlare esplicitamente della simmetria assiale perché andremmo troppo fuori tema.

Inizialmente, in classe, si può parlare semplicemente di piegatura di un foglio lungo una retta

(l'asse di simmetria).

Per gli adulti (insegnanti) possiamo procedere così.

Consideriamo una retta a e un punto A non appartenente ad a.



Sia A' il simmetrico di A rispetto alla retta a: $A' = S_a(A)$.

La retta AA' taglia la retta a in un punto H perché A e A' stanno in semipiani opposti, è distinta da a e nella simmetria rispetto ad a è **unita** perché

$$S_a(A) = A' \quad \text{e} \quad S_a(A') = A$$

essendo S_a **involutoria.**

Queste tre proprietà della retta AA' sono quelle che caratterizzano **la relazione di perpendicolarità** e che mettiamo in risalto nella seguente definizione:

Definizione 4: Una retta a si dice perpendicolare ad una retta b se e solo se:

1) **a** è **diversa** da **b**
2) **a** è **incidente** a **b**
3) **nella simmetria di asse b la retta a è unita,** cioè $\mathbf{S_b(a) = a}$.

Qualche commento.

- La perpendicolarità è una relazione binaria nell'insieme delle rette del piano perché riguarda coppie ordinate di rette.
- La prima condizione dice che nessuna retta è perpendicolare a se stessa. Quindi la relazione di perpendicolarità (che spesso si indica con il simbolo $\perp$) non è riflessiva, anzi è **antiriflessiva.**
- La terza condizione dice che la retta **a** è **globalmente unita**, ma non che i suoi punti sono uniti. Per la definizione di simmetria i punti di **a** che stanno in un semipiano rispetto a **b** si trasformano in punti del semipiano opposto e viceversa.
  La retta **a** possiede **un solo punto unito**, quello che, per la condizione 2), ha in comune con la retta **b.** Quindi **a** è una **retta unita**, ma **non di punti uniti** nella $\mathbf{S_b}$.
- La relazione di perpendicolarità è un **relazione simmetrica**, cioè se **a** $\perp$ **b** allora **b** $\perp$ **a.**

Questa proprietà ci autorizza a semplificare il nostro linguaggio cioè a parlare di **rette perpendicolari tra di loro.**

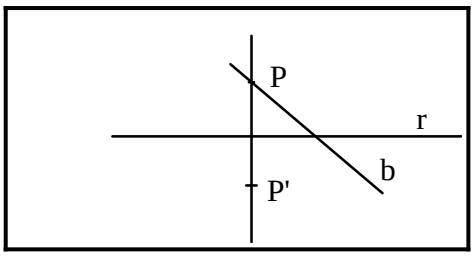
Per la stessa ragione parliamo di **rette incidenti o parallele tra di loro.**

- Operativamente:

  date due rette su un foglio, accertato che siano diverse ed incidenti, per verificare se sono perpendicolari basta piegare il foglio lungo una delle due rette e verificare se le due semirette dell'altra si sovrappongono. Questo fatto rende la definizione 4 preferibile alle altre perchè è operativa. Del resto le definizioni 1 e 2 si riconducono a questa perché per vedere se un angolo è uguale al suo adiacente si ricorre ad una piegatura e così per accertarsi se un angolo è retto.

Osservazione.

Se prendiamo una retta r ed un punto P fuori di essa, da P possiamo mandare infinite rette incidenti ad r. Di queste, quante sono perpendicolari? Sappiamo benissimo la risposta: una ed una sola come possiamo "leggere" su questo disegno che lasco a voi interpretare:



La perpendicolarità ha un vasto uso nelle attività geometriche. Ecco qualche esempio:

- Si dice **retto** l'angolo formato da due semirette aventi la stessa origine e appartenenti

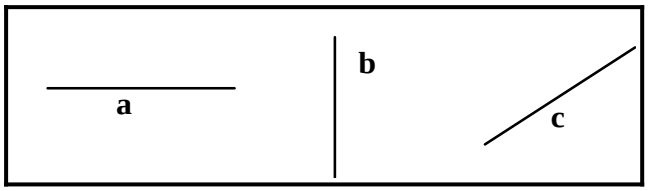
  a rette perpendicolari.

- Si dice **triangolo rettangolo** il triangolo che ha due lati perpendicolari.
- Si dice **rettangolo** un quadrilatero nel quale due qualunque lati consecutivi sono perpendicolari.
- Si dice **trapezio rettangolo** quello che ha una coppia di lati perpendicolari.
- Si dice **asse di un segmento** la perpendicolare al segmento nel suo punto medio.
- Si dà la definizione di **altezza** di una figura partendo dal concetto di striscia.

3. 3 Perpendicolari, verticali, oblique

Quando si domanda ad un bambino di quinta elementare, ad un insegnante elementare e a molti

altri, di tracciare una **retta orizzontale** su un foglio posto su un tavolo, sempre (o quasi) viene disegnata



una retta come la **a.** Alla richiesta di tracciare una **verticale** si disegna una retta come la **b.** Come **obliqua** si disegna una retta come la **c**.

È esatto tutto ciò ?

Per la Settimana enigmistica e per i giochi delle parole crociate certamente sì. Questa è la terminologia impiegata. Per il Dizionario della lingua italiana di G. Devoto e G.C. Oli, questo è il senso **estensivo** delle parole usate :

" Righe orizzontali in un foglio, quelle parallele alle due estremità superiore e inferiore (contrapposte a verticali, tracciate dall'alto in basso) " .

È ancora il senso della Settimana enigmistica, ma veniamo avvertiti che non è il senso proprio.

Orizzontale in senso **proprio** è, secondo lo stesso Dizionario, " *convenzionalmente appartenente ad un piano parallelo alla superficie del mare; più esattamente, appartenente ad una superficie avente in ogni suo punto per normale la verticale passante per il punto".*

In astronomia l'orizzonte è il *" circolo massimo, parallelo al piano orizzontale locale".*

Il termine **verticale** così viene descritto:

" In senso matematico perpendicolare a un piano di riferimento orizzontale: retta, piano verticale".

Per l'**obliqua** il Dizionario usa una espressione abbastanza contorta:

"*Di ente geometrico la cui posizione non consenta riferimento al criterio del parallelismo né a quello della perpendicolarità" .*

Di perpendicolare si dice che è : *"corrispondente alla direzione del filo a piombo"* e deriva dal latino **perpendiculum** che significa **filo a piombo**, ma si precisa: *"Nella geometria piana, di due rette complanari, che si tagliano ad angolo retto".*

Vediamo ora le cose dal punto di vista matematico.

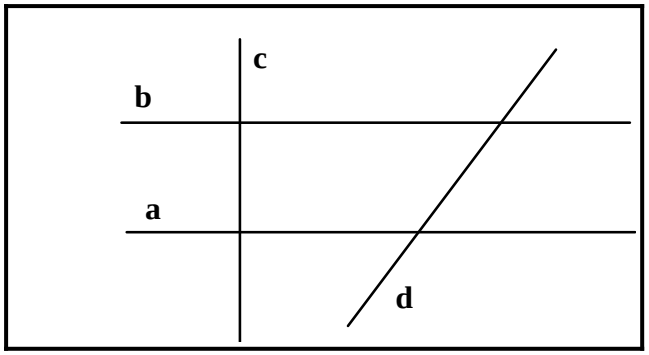
La perpendicolarità è una relazione binaria, come abbiamo visto, che coinvolge due rette complanari.

Non esiste "**la retta perpendicolare**", ma esistono due rette perpendicolari (così come non

esistono “**la retta parallela**” e “**la retta obliqua**” ma due rette parallele tra loro e due rette una obliqua rispetto all’altra).

Concludendo :

una retta **a** può essere **parallela** a una retta **b** , **incidente perpendicolare** a una retta **c** e **incidente obliqua** rispetto ad una retta **d**



La **orizzontalità** riguarda **singole rette.** Tutte le rette che stanno in un piano orizzontale sono orizzontali.

La posizione orizzontale di un oggetto in un posto viene determinata con la “bolla del muratore”.

Il piano orizzontale, in un luogo, è il piano tangente alla sfera terrestre in quel luogo.

Luoghi diversi hanno piani orizzontali diversi.

A conferma della nostra prima affermazione ricordiamo che i programmi del 1985 parlano di “retta orizzontale”, ignorata dalle due Indicazioni .

Le rette tracciate in questo foglio, quando sia messo in posizione orizzontale, sono **tutte** orizzontali anche se vanno dall’alto in basso, dal basso a sinistra o a destra, dal basso all’alto, ecc.

La **verticalità** riguarda singole rette come lasciano intendere anche i programmi del 1985 che parlano di “retta verticale”.

Essa è in relazione ad un piano orizzontale: è una retta perpendicolare a un piano orizzontale.

Per parlare di verticale bisogna uscire dal piano e situarsi nello spazio.

Le “**verticali**” in palestra sono perpendicolari al piano orizzontale del pavimento.

Il sole è sulla verticale di un luogo quando la retta luogo-sole ha la direzione del filo a piombo.

Una retta può essere perpendicolare ad un piano senza che sia verticale (ciò capita quando il piano non è orizzontale). Se un piano è orizzontale una verticale è anche perpendicolare ad esso ed una perpendicolare ad esso è anche una verticale. Se una retta è verticale ed è perpendicolare ad

un piano, allora il piano è orizzontale.

Anche **l'obliquità** è una relazione binaria fra rette complanari.

Una retta r è obliqua rispetto ad una retta s quando le due rette sono incidenti, ma non perpendicolari.

Una retta r obliqua rispetto ad una retta s può essere parallela ad una retta t e perpendicolare ad un'altra retta z (vedere la figura della pagina precedente). Il fatto che una retta obliqua sia sempre disegnata "storta" su un foglio si può spiegare con il ricorso, forse inconsapevole, che essa non è né parallela né perpendicolare ai bordi del foglio.

Questi concetti possono, e, forse, debbono, essere chiariti in classe.

Una volta chiariti si può anche utilizzare la terminologia della Settimana enigmistica.

3. 4 Perpendicolarità nello spazio

Nello spazio abbiamo due tipi di perpendicolarità: perpendicolarità retta – piano, e perpendicolarità piano – piano.

Per la perpendicolarità retta – piano si può tenere presente la figura di pagina 27.

Una retta p per essere perpendicolare al piano α deve non stare sul piano α, essere incidente al piano α in un punto H ed essere perpendicolare a tutte le rette del piano α che passano per H.

C'è un altro modo per definire la perpendicolarità retta – piano che ricalca la definizione 4. Bisogna, però, far ricorso alla simmetria rispetto ad un piano. Noi lasciamo la definizione alla vostra intuizione e ci limitiamo ad usarla.

Una retta p si dice perpendicolare ad un piano α se r non giace su α ed è trasformata in se stessa nella simmetria rispetto ad α.

La più semplice definizione della perpendicolarità piano – piano è quella che utilizza la simmetria rispetto ad un piano.

Un piano β si dice perpendicolare ad un piano α se β è diverso da α, è incidente ad β e nella simmetria rispetto ad α è trasformato in se stesso.

Il cubo è la tipica figura nella quale si vedono realizzate queste relazioni di perpendicolarità.

4 – Relazioni di parallelismo

4 – 1 Noi siamo circondati da "oggetti" nei quali ci sono elementi di parallelismo. Basta pensare a una finestra, ad una porta.

I programmi del 1985 raccomandano di porre "particolare attenzione ad una corretta acquisizione dei concetti fondamentali di […] parallelismo". Anche le Indicazioni nominano esplicitamente "rette parallele".

Il sistematore della teoria delle parallele nell'antichità è stato certamente Euclide di cui riporto la definizione XXIII del primo libro:

> " *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti ".*

Per Euclide le rette sono "**rette terminate**" cioè segmenti, ma indefinitamente prolungabili (lo richiede nel suo postulato II). Per questo parla di prolungamento dalle due parti. Questa definizione ci dice anche a quale tipo di "infinito" Euclide si ispira: è **l'infinito potenziale**, cioè qualcosa di finito al quale si può sempre aggiungere qualcosa.

Una definizione equivalente a quella di Euclide e che spesso si usa oggi, è la seguente:

"Due rette complanari sono parallele se non hanno punti in comune".

Questa definizione si ispira ad un altro concetto di infinito, cioè **all'infinito attuale**. In altre parole

si pensano le rette date nella loro completezza e, quindi,m non c'è bisogno di prolungarle.

Qualche volta ho sentito dire che " due rette sono parallele quando si incontrano all'infinito".

Poiché nel piano della geometria euclidea non esistono punti all'infinito, questa definizione va evitata.

Un'altra definizione che si trova scritta o proposta da insegnanti, e che si trova già in Erone, è questa:

"Due rette complanari sono parallele se sono equidistanti".

In genere si pensa ad una distanza non nulla, cioè positiva. La definizione, in geometria euclidea, non è sbagliata, ma per capirla bisogna sapere che cosa è la distanza fra due insiemi, concetto non abbordabile alla scuola media e, forse, anche oltre. Quindi è da evitare.

Le definizioni riportate presentano il **parallelismo in senso stretto.**

Questa relazione di parallelismo **non è riflessiva** perché nessuna retta è parallela a se stessa; **è simmetrica**, come è ovvio; nonostante le apparenze, **non è transitiva** a meno che non si richieda alle tre rette considerate di essere distinte.

Ora si sta diffondendo una (leggermente) diversa definizione di parallelismo fra rette, definizione preferibile perché riesce a dare un senso preciso ad una parola molto spesso usata, cioè quella di direzione di una retta.

Questa definizione che ora presentiamo è chiamata **parallelismo in senso largo**.

È la seguente.

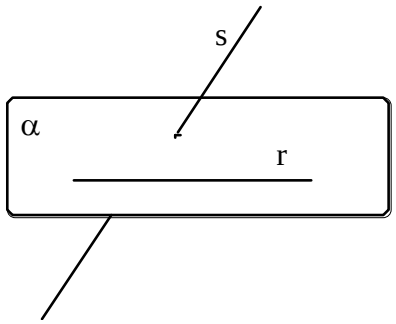
Definizione: Due rette complanari r ed s sono parallele, e si scrive r//s, se e soltanto se coincidono (r=s) oppure non hanno alcun punto in comune.

Le condizioni per il parallelismo, dunque, sono:

1. **La complanarità** , cioè le rette devono stare nello stesso piano.

   Nello spazio ci sono rette che non hanno punti in comune, ma non sono parallele.

   Sono le rette **sghembe** (nel disegno le rette r ed s non appartengono allo stesso piano e non hanno punti in comune : sono rette sghembe)



2. **la coincidenza** , cioè le due rette sono la stessa retta, oppure

2'. **il non avere punti in comune.**

Il connettivo "oppure" è il **connettivo logico** "**o**" **in senso esclusivo.** Ciò significa che le condizioni **2** e **2'** non possono verificarsi entrambe.

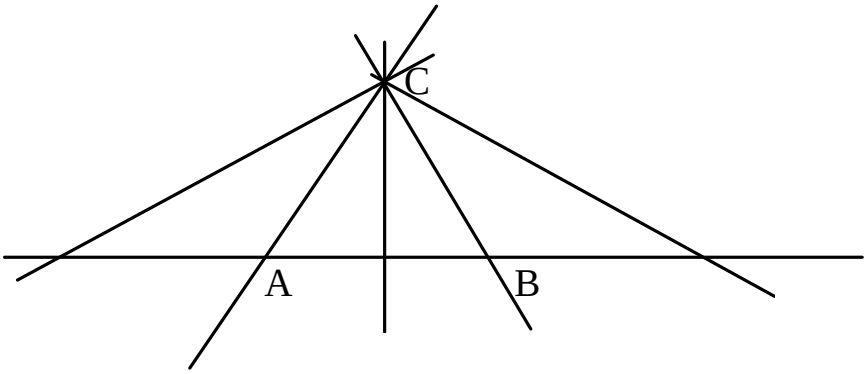
Possiamo esprimere il parallelismo in senso largo semplicemente come negazione della relazione di incidenza:

Definizione: Due rette complanari r ed s sono parallele quando non sono incidenti.

Infatti **negare che r ed s sono incidenti**, significa affermare che esse hanno in comune **almeno** due punti (e allora coincidono) oppure **nessuno.**

La parola "**parallela**" è spesso usata anche nel linguaggio comune, talvolta con significato geometrico (le parallele della palestra, le strade parallele di una città, la ferrovia che corre parallela alla strada, ecc.), talvolta in senso metaforico (due vite parallele, due idee che si sviluppano parallelamente, ecc.).

4 – 2 Se disegniamo una retta r ed un punto C fuori di essa, da C possiamo mandare infinite rette incidenti alla retta r, come si vede nel disegno. Di queste infinite rette abbiamo visto che una sola è perpendicolare. Ci domandiamo: dal punto C quante rette possiamo mandare parallele alla retta r? La nostra intuizione, confermata anche dall'uso di riga e squadra per tracciare le parallele alla retta r passanti per C, ci dice che di parallele ne possiamo tracciare una ed una sola. Questa proprietà è molto importante e caratterizza tutta la geometria euclidea. La mettiamo in risalto:



Proprietà: data una retta r ed un punto C esiste ed è unica la retta s passante per C e parallela ad r.

Osserviamo che non abbiamo richiesto che C sia fuori dalla retta r perché la proprietà vale anche quando C appartiene alla retta r. In questo caso la parallela s passante per C coincide con la retta r.

Osservazione.

Euclide nei suoi " Elementi" ha dimostrato l'esistenza ma ha postulato l'unicità della parallela. Il suo postulato, il quinto, è il più famoso della storia della matematica perché fino alla prima metà del secolo XIX furono innumerevoli i tentativi di dimostrarlo in base ai primi quattro postulati di Euclide.

Tentativi tutti falliti perché esso non è dimostrabile, ma tentativi fecondi perché fecero scoprire tante altre "**verità matematiche** " (ad es. le geometrie **non euclidee**).

Il quinto postulato di Euclide è enunciato in forma angolare:

" **Se una retta, venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette, prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti** "

Questo postulato di Euclide, come la proprietà prima enunciata che è ad esso equivalente, è un "postulato di frontiera". La geometria in cui esso vale è detta "geometria euclidea"; quelle in cui non vale sono dette "geometrie non euclidee". E' anche un postulato gravido di conseguenze. Una conseguenza che si studia anche alla scuola elementare riguarda la somma degli angoli interni di un triangolo: essa vale due angoli retti proprio perché vale questo postulato. Nelle geometrie non euclidee questa somma ha un valore diverso.

4 – 3 Proprietà del parallelismo in senso largo.

Quella di parallelismo, in senso stretto o in senso largo, è una **relazione binaria** tra rette, come quella di incidenza e di perpendicolarità.

Vediamo quali sono le **proprietà del parallelismo in senso largo.** Anzitutto la relazione di parallelismo è:

- **Riflessiva .** Significa che **ogni retta è parallela a se stessa.**

  Questa proprietà è contenuta nella stessa definizione.

Siccome r = r allora r // r.

- **Simmetrica.** **Significa che, se r è parallela ad s allora anche s è parallela ad r.**

  Anche questa proprietà deriva immediatamente dalla definizione.

  Infatti: se r = s allora r // s e anche s // r;

  se r non ha punti in comune con s, cioè r // s,

  anche s non ha punti in comune con r , cioè s // r.

È proprio questa proprietà che ci permette, già nella definizione, di parlare di " **rette parallele** " e non, più rigorosamente, di retta r parallela alla retta s.

- **Transitiva.** Significa che, date tre rette qualunque r, s, t se r è parallela ad s e s è parallela a t , allora r è parallela a t.

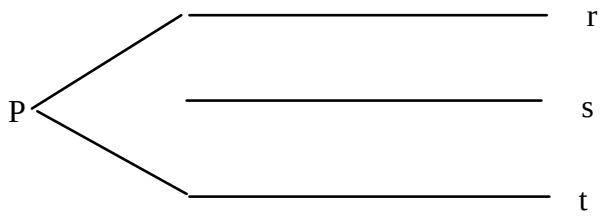
  Dimostriamo che vale questa proprietà:

  Se tra queste tre rette ci sono delle coincidenze, cioè se due sono uguali, la dimostrazione è immediata.

  Consideriamo il caso di **r , s , t distinte.**

  Per ipotesi r // s e s // t

  Dobbiamo dimostrare che r // t



Ragioniamo **per assurdo.**

Neghiamo la tesi . Supponiamo che la retta r e la retta t abbiano un punto P in comune. Allora per P passerebbero due rette, la r e la t, entrambe parallele, per ipotesi, alla s.

Questo è assurdo perché è contro la proprietà della unicità della parallela.

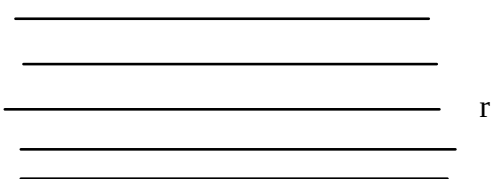
Una relazione, come quella di parallelismo, che gode delle **tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva,** si dice **relazione d'equivalenza.**

4 – 4 La direzione di una retta

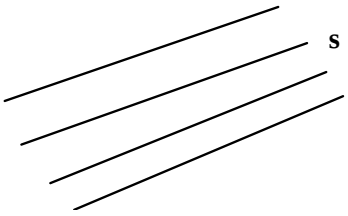
Noi usiamo spesso, nel linguaggio comune e nela attività in classe, la parola “direzione”. Ora ne vogliamo precisare il significato matematico.

Consideriamo **tutte le rette del piano.**

Fissiamone una , **r**, e mettiamo in una scatola la retta **r** e tutte le **sue infinite parallele:**



Fissiamo un altra retta **s ,** diversa dalle precedenti, e mettiamola con **tutte le sue infinite parallele** in un’ altra scatola.



Continuiamo fino ad esaurire tutte le rette del piano. Alla fine avremo “infinite scatole” tutte diverse in ciascuna delle quali ci sono infinite rette tra loro parallele.

Questo gioco intellettuale ci permette di costruire un nuovo “oggetto matematico”, cioè, quello di **direzione di una retta**.

Siccome il parallelismo è una relazione di equivalenza le varie “ scatole ” si chiamano **classi di equivalenza.** Ecco allora la

Definizione: Si chiama **direzione di una retta r la classe di equivalenza di r , cioè l’insieme formato dalla retta r e da tutte le sue parallele.**

Qualche osservazione.

- Bisogna distinguere la **direzione** di una retta, che è unica, dal **verso: o**gni retta ha **due versi** ed una sola **direzione.**

  Spesso, però, nel linguaggio comune i due concetti sono usati come sinonimi o, meglio, la direzione viene intesa come verso.

- La **definizione** data è una tipica definizione per **astrazione,** nel senso che si considera una proprietà, quella di essere parallele, di enti tra loro diversi e su di essa si fonda la definizione. In

altre parole: le rette parallele tra loro sono diverse, ma vengono accomunate per il fatto di avere tutte la proprietà considerata.

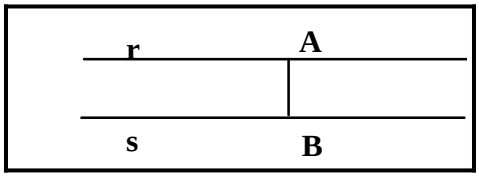
Questo tipo di definizione, molto usato nella matematica di oggi, è abbastanza difficile perché fa entrare in gioco infiniti "oggetti", in questo caso, rette.

E' comunque usato, in modo più o meno consapevole, anche nella scuola dell'obbligo. Per esempio, ogni "scatola di frazioni fra loro equivalenti" è un numero razionale; ogni "scatola di segmenti uguali" è una lunghezza.

La relazione di parallelismo fra rette è molto usata nella scuola elementare. Su di essa è basata, per esempio, la definizione di trapezio e di parallelogramma.

4 – 5 Strisce e altezze

Due rette parallele distinte danno origine ad una striscia:



Quella disegnata è la striscia (r,s) . Le due rette parallele sono **i lati della striscia e** il segmento **AB,** perpendicolare alle due rette parallele**,** è **l'altezza della striscia (r,s).**

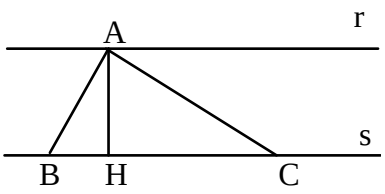
Tutti i segmenti del tipo AB sono congruenti. Quindi **rette parallele sono equidistanti.**

All'idea di striscia sono collegate diverse figure geometriche.

a. Triangolo

Data la striscia (r,s) per avere un triangolo basta prendere un vertice su r (o su s) e due su s (o su r).

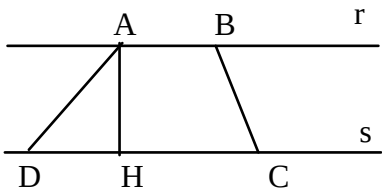
A seconda di come vengono presi i vertici si hanno i vari tipi di triangolo.



La distanza AH fra le due rette parallele è l'altezza del triangolo relativa alla "base" BC.

b. Trapezio

Basta prendere due punti A e B su un lato della striscia e altri due C e D sull'altro. Il quadrilatero ABCD è un trapezio.

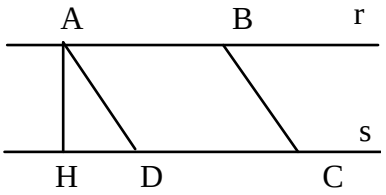


Un trapezio, quindi, è un quadrilatero che ha **almeno** due lati paralleli. Con questa scelta un parallelogramma è un trapezio.

La distanza AH fra le due rette parallele è l'altezza del trapezio rispetto alla base DC.

c. Parallelogramma

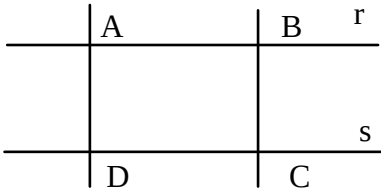
Se prendiamo A e B su r e C e D su s in modo che d(A,B)=d(C,D) allora il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.



La distanza AH fra le due rette parallele è l'altezza del parallelogramma relativa alla "base" DC.

d. Rettangolo

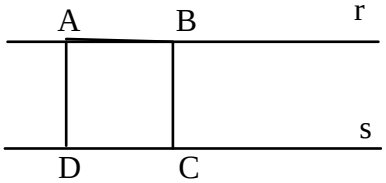
Se A e D sono su una perpendicolare alle due parallele r ed s e se B e C stanno su un'altra perpendicolare, il quadrilatero ABCD è un rettangolo.



Il lato AD (BC), distanza fra le due parallele, è l'altezza relativa alla "base" DC.

e. Quadrato

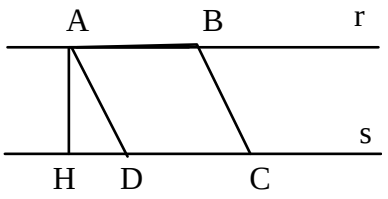
Se nella situazione precedente si sceglie B in modo che d(A,B) = d(A,D) il quadrilatero che si ottiene è un quadrato.



Come prima il lato AD (BC), distanza fra le due parallele, è l'altezza relativa alla "base" DC.

f. Rombo

Per costruirlo si fissa A su r e D su s, poi si prende B su r in modo che d(A,B) = d(A,D); infine si prende C su s in modo che d(D,C) = d(A,B).



Il quadrilatero ABCD è un rombo.

La distanza AH fra le due parallele r ed s è l'altezza del rombo relativa alla "base" DC.

Il segmento AH dei casi **a** , **b** , **c** , **f** e il lato AD dei casi **d** , **e** , cioè la **distanza fra i lati** della **striscia**, è l'**altezza della striscia.**

Al concetto di altezza di una striscia è legato quello di altezza di un poligono.

Quando un poligono ha una altezza? Quando esso è completamente contenuto in una striscia e i suoi vertici si distribuiscono **tutti** sui lati della striscia. L'altezza della striscia considerata è l'altezza del poligono.

Hanno, quindi, una altezza i seguenti poligoni convessi:

i triangoli (3 altezze), **i trapezi** (1 altezza), **i parallelogrammi** (2 altezze).

4 – 6 Parallelismo nello spazio

Nello spazio c'è anzitutto un **parallelismo fra piani.**

Due piani α e β sono **paralleli** se coincidono oppure non hanno alcun punto in comune.

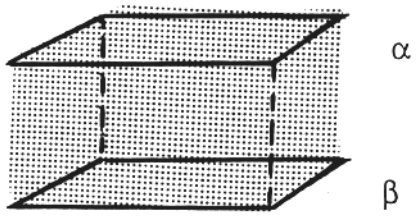
E' una definizione che ricalca fedelmente il parallelismo in senso lato fra rette.

Nello spazio vale una proprietà di esistenza ed unicità del parallelismo fra piani:

"Dato un piano α ed un punto P fuori di esso esiste ed è unico il piano per P parallelo al piano α.

La relazione di parallelismo fra piani è una relazione di equivalenza, cioè, riflessiva, simmetrica e transitiva. Le "scatole" che contengono un piano e tutti i suoi paralleli, cioè le classi di equivalenza, sono le **"giaciture"** dei piani.

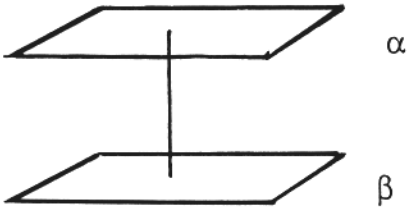
Due piani paralleli α e β dividono lo spazio in tre regioni:



- il semispazio di origine α che non contiene β ;
- il semispazio di origine β che non contiene α ;
- la regione ottenuta intersecando il semispazio di origine α che contiene β con il semispazio di origine β che contiene α.

Quest'ultima regione si chiama **strato** di facce α e β .

La **distanza** fra **i due piani paralleli** è l'**altezza dello strato.**



Al concetto di strato sono collegati **i prismi, le piramidi,**

Nello spazio c'è anche un parallelismo **retta – piano.**

Una retta è parallela ad un piano quando è tutta contenuta nel piano oppure non ha nessun punto in comune con esso. Per un punto P non appartenente ad un piano α passano infinite rette parallele al piano α: sono tutte le rette passanti per P e giacenti sul piano β passante per P e parallelo al piano α.

Tutte queste situazioni si possono vedere molto bene in un cubo.

5 - Esercizi

1. Che cos'è una striscia? Dare una definizione matematicamente accettabile.

2. Rivedere i concetti di angoli alterni interni, alterni esterni, corrispondenti, coniugati.

3. Ci sono quadrilateri non convessi che hanno una altezza? Perché?

4. Nei triangoli e nei quadrilateri a quale lato si dà il nome di base?

5. Disegnare un rombo, fissare un lato base e disegnare la relativa altezza.

6. Che cos'è l'altezza nei prismi, nelle piramidi, nei cilindri, nei coni?

7. Dare due diverse definizioni di trapezio ed esaminarne le conseguenze logiche.

CAPITOLO SESTO

UN MONDO PERVASIVO E DIFFICILE: GLI ANGOLI

1 – Introduzione

Il titolo del capitolo è abbastanza significativo e chiaro. Gli angoli hanno una presenza pervasiva nella terminologia geometrica: triangoli, quadrangoli, poligoni.

Sugli angoli è nata tutta una lussureggiante terminologia: angoli interni, esterni, adiacenti, consecutivi, complementari, supplementari, angoli al centro, alla circonferenza, oltre ai soliti angoli acuti, retti, ottusi, convessi e concavi.

Il mondo degli angoli è difficile: basta pensare alle diverse possibili definizioni di angolo, con l'aggravante che definizioni diverse possono individuare "oggetti matematici diversi" chiamati, però, sempre "angoli".

Il mondo degli angoli è necessario alla geometria? E' utile? Nella scuola media superiore è necessario parlare degli angoli se si vuole introdurre e studiare la trigonometria e le funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente). E nella scuola elementare? E nella scuola media? A costo di destare un senso di meraviglia dico che si può sviluppare tutta la geometria che normalmente si studia nella scuola elementare e nella scuola media senza mai parlare di angoli. Mi pare di sentire già le varie obiezioni:

- Senza angoli come facciamo a parlare di triangoli acutangoli, rettangoli, ottusangoli? La risposta è semplice: non se ne parla. Del resto questa distinzione in base agli angoli non ha alcun seguito né alcun sviluppo, né alcuna utilizzazione nella scuola elementare e nella scuola media;

- Senza angoli come facciamo a parlare di trapezio rettangolo, di rettangolo, di quadrato? La risposta è semplice: basta parlare di lati consecutivi perpendicolari.

- Senza angoli come facciamo a parlare del teorema di Pitagora che vale solo per i triangoli rettangoli? Anche qui la risposta è semplice: basta dire che un triangolo è rettangolo quando ha due lati perpendicolari.

- Senza angoli come facciamo a parlare della somma degli angoli interni e della somma degli angoli esterni di un poligono? La risposta è semplice: non se ne parla rimandando tutto alla scuola media superiore.

Comunque state tranquilli. Io non voglio dirvi di non parlare di angoli nella scuola elementare e nella scuola media, anzi vi devo dire, a malincuore, che bisogna introdurre gli angoli già nella scuola elementare perché così vuole la tradizione, così vogliono i programmi, così vogliono i libri di testo. E' bene, però, avere coscienza delle difficoltà del concetto e di quali angoli avranno diritto di cittadinanza quando si sceglie una definizione.

Prima, però, di iniziare la trattazione degli angoli voglio sottolineare i punti critici.

2 – Punti delicati nella trattazione degli angoli.

Il primo punto delicato sta nella scelta della **definizione** di angolo per prendere coscienza delle conseguenze che ne derivano. Ne parleremo fra poco.

Il secondo punto delicato si presenta quando si vogliono **sommare** gli angoli. Anche nella scuola elementare si parla della "somma degli angoli interno di un triangolo o di un rettangolo". La domanda è: la somma di due angoli è sempre un angolo? In altre parole: la somma di angoli è una operazione interna? Esplicitiamo: se la definizione che scelgo dà origine solo ad angoli convessi, sommando due angoli ottusi non ottengo un angolo convesso e, quindi, questa somma non è un angolo.

Il terzo punto delicato riguarda l'ordinamento**, il confronto** di angoli. Se possiedo solo angoli convessi non ci sono difficoltà, ma se hanno diritto di cittadinanza anche gli angoli concavi, come faccio a confrontare un angolo convesso con uno concavo? Chi dei due è il maggiore?

Il quarto punto delicato che, però, esula dal nostro corso, riguarda la **misura** degli angoli.

3 – Gli angoli di "frontiera".

Il primo angolo di frontiera è "l'angolo nullo".

Esiste? Per Euclide certamente no. E per noi? Dipende dalla definizione di angolo che scegliamo. Per esempio, se richiediamo che le due semirette che sono lati dell'angolo appartengano a rette distinte, come fa Hilbert nei suoi "Fondamenti della geometria", certamente l'angolo nullo non esiste. E se esiste, l'angolo nullo è convesso o concavo? E se esiste ne dobbiamo parlare a scuola? La mia risposta è negativa: non sappiamo che cosa farcene, cioè, non lo utilizziamo mai.

Il secondo angolo di frontiera è "l'angolo piatto".

Esiste? Abbiamo già visto che per Euclide ed Hilbert l'angolo piatto non esiste, cioè per la definizione da essi scelta l'angolo piatto non è un angolo. E per noi? Dipende dalla definizione che si sceglie. Se si accetta che i due lati di un angolo possano essere semirette opposte di una stessa retta allora l' angolo piatto esiste. Se esiste è convesso o concavo? Attenzione: se si dice, come spesso si fa, che un angolo è convesso quando non contiene i prolungamenti dei suoi lati allora l'angolo piatto non è convesso. E allora è concavo? Applicando la definizione generale di figura convessa, esso risulta convesso.

Se si dice che una coppia di semirette con un punto in comune danno origine a due angoli, uno convesso e l'altro concavo, allora l'angolo piatto è, contemporaneamente convesso e concavo. Assurdo.

Il terzo angolo di frontiera è "l'angolo giro".

Esiste? Ovviamente per Euclide ed Hilbert no. E per noi? Ci domandiamo: esiste una definizione accettabile di angolo che contempli l'esistenza dell'angolo giro? Si potrebbe pensare all'angolo come rotazione, ma… vedremo in seguito.

4 – Prima definizione di angolo: angolo come rotazione.

All'angolo come rotazione accennano brevemente i programmi del 1985. Ovviamente bisogna aver introdotto prima, almeno da un punto di vista intuitivo, la rotazione. Matematicamente le rotazioni sono le isometrie che hanno o tutti i punti fissi (identità) o un solo punto fisso, cioè il centro di rotazione.

Dopo di che possiamo dare questa definizione:

Definizione: Date due semirette a e b di origine O si chiama **angolo di vertice O e lati a** e **b** (e si può scrivere angolo **aÔb**) **la rotazione di centro O che trasforma a in b .**

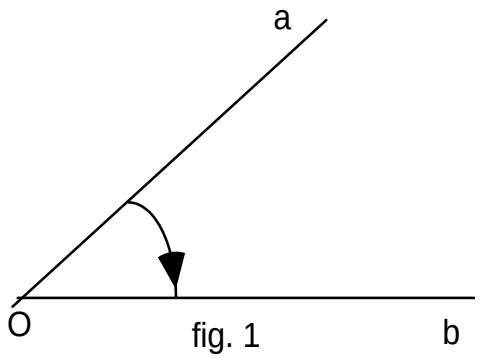


fig. 1

Gli angoli così definiti sono **orientati**. Questo significa che l'angolo aÔb è **diverso** dall'angolo bÔa perché la rotazione che porta b in a è diversa (è l'opposta) dalla rotazione che porta a in b.

4. 1 Angoli noti

- Se le due semirette a e b sono **perpendicolari** (cioè giacciono su rette perpendicolari) allora l'angolo aÔb è **retto.**

- Se le due semirette sono **opposte,** l'angolo aÔb è **piatto**. La rotazione che porta a in b è la **simmetria centrale di centro O**.

- Applicando due volte la simmetria centrale si ottiene l'**identità.** Allora le due semirette a e b coincidono e l'angolo aÔb è l'**angolo nullo**.

- Se le due semirette a e b sono nello stesso semipiano dei due generati dalla retta sulla quale sta la a, allora l'angolo è **convesso**; altrimenti è **concavo.**

4. 2 Alcune conseguenze

Non esiste l'angolo giro.

Intuitivamente l'angolo giro corrisponde ad una "rotazione completa" (rotazione di un giro completo) nella quale tutto torna al punto di partenza. Matematicamente questa rotazione è l'identità, cioè l' angolo nullo.

In questa impostazione, quindi, l'angolo giro coincide con l'angolo nullo.

Questo fatto è contro la nostra intuizione che distingue molto bene il fatto di rimanere fermi (angolo nullo) da quello di fare un giro completo su se stessi (angolo giro).

A questa difficoltà, matematicamente, non c'è rimedio.

Didatticamente ci si basa sull'intuizione e sul movimento di una lancetta dell'orologio e si vede la diversità tra l'angolo nullo e l'angolo giro.

La somma degli angoli esterni di un poligono è sempre l'angolo nullo.

Noi siamo abituati ad affermare che la somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono è sempre un angolo giro perché percorrendo gli angoli esterni fino a ritornare al punto di partenza facciamo un giro completo. Per quanto detto prima questo angolo è l'angolo nullo.

La somma degli angoli interni di un poligono è l'angolo nullo se il numero n dei suoi vertici è pari, l'angolo piatto se è dispari.

Noi siamo abituati a dire che la formula della somma degli angoli interni di un poligono è (n – 2) angoli piatti. Se n è pari, anche n – 2 è pari. Siccome due angoli piatti sono l'angolo nullo, allora (n – 2) piatti sono l'angolo nullo. Se n è dispari, anche n – 2 è dispari ed (n – 2) piatti è un angolo piatto.

L'insieme delle rotazioni di assegnato centro formano un **gruppo** rispetto alla operazione di addizione, ma questo gruppo non è ordinabile con un ordine compatibile con la addizione. Quindi gli angoli come rotazione **non sono fra loro confrontabili**, cioè non si può stabilire se un angolo è minore di un altro. Quindi non si può parlare di angoli acuti (minori di un angolo retto), e ottusi (maggiori di un angolo retto).

Per poter confrontare gli angoli bisogna introdurre delle drastiche limitazioni come:

- considerare un semipiano α di origine **r;**
- considerare **solo** le semirette di origine **O** contenute in **α**
- supporre che tutti gli angoli che si vogliono considerare abbiano un lato comune coincidente con x^+

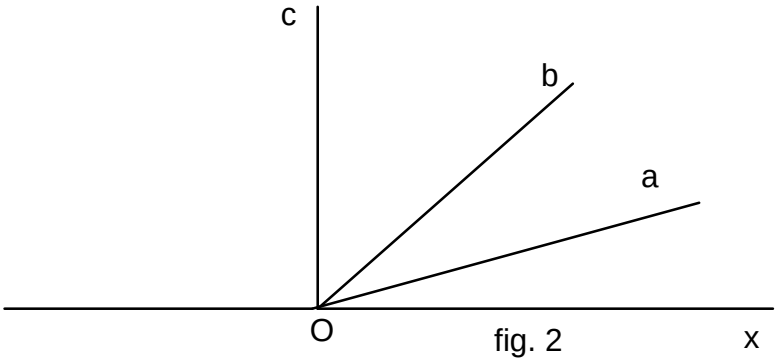


fig. 2

È necessario anche introdurre il concetto di **regione angolare:** è la parte di piano percorsa da una semiretta per sovrapporsi all'altra semiretta.

Dopo di che si può definire che l'angolo (x^+ a) è minore di (x^+ b) se la semiretta a è contenuta nella regione angolare (x^+ b).

Gli angoli **acuti** sono quelli minori dell'angolo retto e gli **ottusi** sono quelli maggiori dell'angolo retto e minori dell'angolo piatto.

In questo modo, però, si considerano solo gli **angoli convessi** e si perdono i vantaggi della definizione generale.

4 – 3 Qualche considerazione didattica

Un utile strumento per introdurre gli angoli come rotazioni è "l'orologio degli angoli" che ogni bambino può costruirsi usando cartone, compasso, riga e forbici. Le due lancette, fissate con un ferma-campione, sono i lati dell'angolo. Una di esse resta sempre fissa sulle 12 e l'altra ruota. Inizialmente le due lancette sono sovrapposte sulle ore 12 e non si compie nessuna rotazione. Abbiamo **l'angolo nullo.**

Nella posizione (12, 3) la lancetta ha compiuto ¼ di giro e si ha **l'angolo retto**; nella posizione (12, 6) la lancetta ha percorso mezzo giro e si ha **l'angolo piatto.**

Basandosi esclusivamente sull'intuizione, e ricorrendo all'idea di **tempo**, si possono confrontare gli angoli . Utilizzando la rotazione della lancetta dell'orologio possiamo dire che l'angolo (12,3) (angolo retto) è **maggiore** dell'angolo (12, 2) perché è maggiore il tempo impiegato dalla lancetta per andare da 12 a 3 che non per andare da 12 a 2. Questi angoli che sono minori di quello retto si chiamano **acuti.** Quelli che si ottengono dopo la posizione (12, 3) e prima della posizione (12, 6) si chiamano **ottusi**. Tutti gli angoli che vanno dalla posizione (12, 12) alla posizione (12, 6) si dicono **convessi**. Gli angoli che si ottengono dopo la posizione (12, 6) sono maggiori dell'angolo piatto e si chiamano **concavi**. Il loro confronto si effettua sempre con l'intervento del tempo. Quando la lancetta mobile arriva alle 12 si ha ancora l'angolo nullo e questo può aiutare a capire che l'angolo giro coincide con l'angolo nullo dato che le posizioni delle lancette sono identiche.

Negli esercizi si fanno confrontare angoli, definiti come rotazioni, non disegnati sullo stesso orologio.

Si può anche introdurre intuitivamente **la regione angolare** (r.a. segnata).

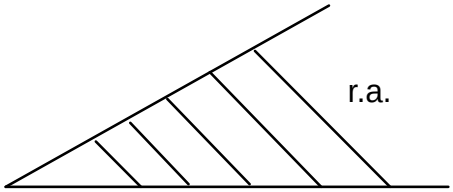


fig. 3

Per confrontare due angoli si portano a coincidere i vertici, un lato e sistemando gli altri due lati nello stesso semipiano e si ritorna a quanto ho detto prima. In questo modo si confrontano gli angoli convessi, ma non si possono confrontare un angolo convesso con un angolo concavo (b e c della figura 4 non sono nello stesso semipiano).

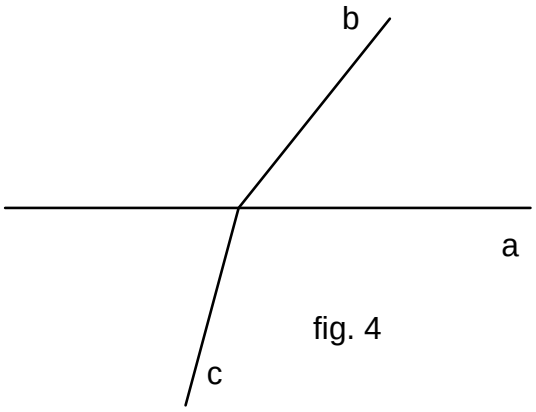


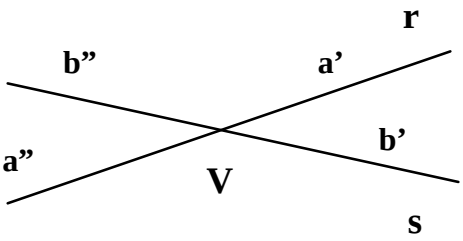
fig. 4

5 – Seconda definizione di angolo: angolo come parte di piano.

Il modo forse più familiare di introdurre gli angoli è quello di presentarli come parte di piano ottenuta intersecando due semipiani.

Questo modo si presta bene per il disegno, la coloritura della parte di piano, il ritaglio, il confronto. Ci sono naturalmente dei limiti che vedremo fra poco.

Consideriamo due rette r e s **incidenti in V.**



Esso determina su r due semirette a’ ed a” e su s le due semirette b’ e b”. Inoltre ciascuna delle due rette r ed s è origine di due semipiani.

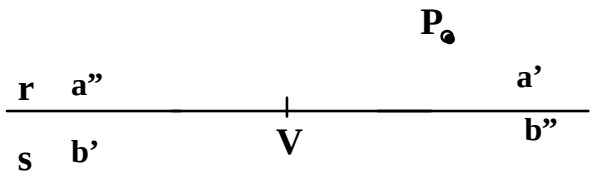
Definizione: Diciamo angolo di vertice V e lati a’ e b’ l’intersezione del semipiano di origine r che contiene b’ con il semipiano di origine s che contiene a’.

Osservazioni:

- Siccome i semipiani sono insiemi convessi e l'intersezione di due convessi è un convesso con la definizione data otteniamo **solo angoli convessi.**
- L'angolo così definito è un angolo **non** orientato perché coincide con quello che si ottiene scambiando il ruolo di a' con quello di b'.
- Se i due semipiani considerati sono **aperti** , la loro intersezione è **la regione angolare** ed i due lati a' e b', che non fanno parte dell'angolo, ne costituiscono la **frontiera** o **il bordo**.

  Se, invece, sono **chiusi** anche i due lati fanno parte dell'angolo.
- Siccome abbiamo richiesto che r e s siano **incidenti**, dalla nostra definizione restano esclusi gli **angoli piatti** che pure sono angoli convessi. Per poterli introdurre dobbiamo ricorrere ad una definizione apposita.

Siano r ed s due rette coincidenti, cioè r = s.



Consideriamo su di esse un punto V. Esso determina su r due semirette a' e a" e su s due semirette b' e b". Consideriamo il semipiano di origine r (o s) che contiene il punto P.

Definizione: Se le due semirette a' e b' sono opposte il semipiano di origine r (oppure s) che contiene il punto P si dice angolo piatto di vertice V e lati a' e b'.

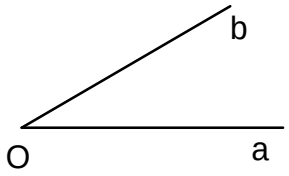
Osservazioni:

- Abbiamo introdotto il punto P per evitare ogni ambiguità fra il semipiano che lo contiene e il suo opposto, che pure è un angolo convesso di vertice V e lati a' e b'.
- L'angolo piatto è un angolo convesso dato che il semipiano è un insieme convesso.
- Se volessimo dare la definizione di angolo piatto seguendo passo passo la definizione precedente con le necessarie ipotesi su r ed s e a' e b' dovremmo considerare **chiusi** i due semipiani, altrimenti l'angolo piatto sarebbe vuoto.
- In questa impostazione **non** ha diritto di cittadinanza **l'angolo nullo**.
- Per quanto riguarda il confronto vale quanto detto nel paragrafo precedente per gli angoli convessi.

6 – Angolo come coppia non ordinata di semirette

La definizione di angolo del paragrafo precedente ci presenta l'angolo "pieno"cioè con la sua regione angolare. Potremmo limitarci a definire lo "scheletro" come facciamo ora.

Definizione: Si dice angolo di vertice O e lati a e b la coppia di semirette a e **b di origine O.**



Osservazioni:

- La coppia di semirette **non** è ordinata e quindi l'angolo ab è lo stesso dell'angolo ba. L'angolo, quindi, **non è orientato**.
- Se non richiediamo, come fa Hilbert, che le due semirette appartengano a rette diverse, allora le due semirette possono coincidere. In questo caso si ha l'angolo **nullo**; se sono perpendicolari l'angolo è **retto**; se sono opposte l'angolo è **piatto**.
- Per poter confrontare gli angoli ed introdurre la terminologia solita (acuti, ottusi) dobbiamo associare all'angolo una **regione angolare.** Di solito si associa quella che viene chiamata "la regione dei punti interni", cioè la regione formata dai punti che rispetto ad a stanno dalla parte di b e rispetto a b stanno dalla parte di a.
- Con questa scelta si ottengono solo gli angoli convessi per i quali vale tutto ciò che abbiamo detto nel paragrafo precedente.
- La regione dei punti interni dell'angolo nullo è l'insieme vuoto .

7 – Angolo come coppia ordinata di semirette.

Tutto procede come nel paragrafo precedente, solo che la coppia di semirette (a,b) è **ordinata**.

Siccome (a,b) ≠ (b,a) allora l'angolo ab è diverso dall'angolo ba. L'angolo, quindi, secondo questa definizione è **orientato**.

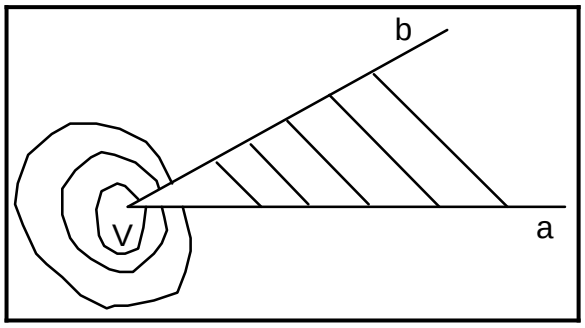
Per questo è facile stabilire un collegamento con gli angoli come rotazione quando si considerano solo angoli contenuti nello stesso semipiano.

All'angolo si associa una regione angolare al solito modo e si ottengono solo **angoli convessi**.

Per l'ordinamento non ci sono novità.

8 – Angolo come coppia ordinata vertice - regione

Descriviamo un'ultima presentazione del concetto di angolo. Non è molto usuale, ma conviene conoscerla per completezza.



Consideriamo due semirette **distinte** a e b incidenti nel punto V. La **linea** formata dall'**unione** delle due semirette divide i punti del piano **non appartenenti alla linea** in due regioni. Sia ***R*** una qualunque delle due regioni. Ecco la nuova definizione.

Definizione: Chiamiamo angolo la coppia (V, *R*).

Il punto V è **il vertice**, le semirette a e b sono i **lati,** la regione ***R*** è la **regione angolare.**

Siccome scambiando a con b non cambia nulla, l'angolo definito **non** è orientato.

Precisiamo che le semirette a e b non fanno parte delle due regioni angolari perchè esse sono formate dai punti del piano che non appartengono alle due semirette, ma ne costituiscono il bordo comune.

Per la definizione data ogni coppia di semirette distinte con la stessa origine determina due angoli. Possiamo introdurre una prima distinzione con la seguente

Definizione: Sia (V, *R*) un angolo. Diciamo che esso è

Piatto se *R* è un semipiano

Convesso se *R* è convessa

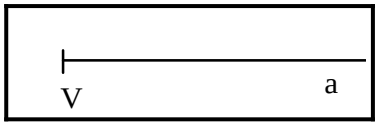
Concavo se *R* non è convessa.

Con questa definizione hanno diritto di cittadinanza anche agli angoli concavi.

Nella definizione data abbiamo supposto che a e b fossero **distinte;** ora possiamo estendere la nozione di angolo anche al caso di a = b.

Definizione: Sia V un punto e a = b una semiretta di origine V. La terna

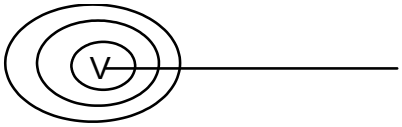
(V, a, Ø) è detta angolo nullo di vertice V e lato a.



Il simbolo Ø sta ad indicare che la regione angolare non ha alcun punto.

Il panorama viene completato con **l'angolo giro**.

Definizione : Sia ***G*** il complementare di a rispetto al piano cioè l'insieme dei punti del piano che non appartengono ad a. **La coppia (V, *G*) si dice angolo giro di vertice V e lato a**.



L'angolo giro è concavo, mentre quello nullo è convesso.

Gli angoli convessi possono essere classificati nel solito modo.

Un angolo convesso non piatto e non nullo è:

retto se i sui lati sono perpendicolari;

acuto se non è retto e la sua regione angolare è strettamente contenuta nella regione angolare di un angolo retto;

ottuso se non è retto e la sua regione angolare contiene strettamente la regione angolare di un angolo retto.

Osservazione finale

Si parla spesso di somma di angoli. Per esempio: la somma degli angoli interni di un poligono di n vertici è (n - 2) angoli piatti.

In tutte le definizioni riportate l'angolo "massimo", quando c'è, è l'angolo giro o l'angolo piatto.

Quindi la somma degli angoli interni di un pentagono, di un esagono, ecc. non è un angolo.

Meglio, allora, parlare sempre di **somma delle misure** di angoli, che si possono sempre fare perché si tratta di numeri, e non di somma di angoli.

Le unità di misura degli angoli sono diverse: **grado sessagesimale**, che possiamo definire come la novantesima parte dell'angolo retto; **grado centesimale**, che possiamo definire come la centesima parte dell'angolo retto. Spesso nei goniometri sono riportate le due unità di misura. I matematici preferiscono usare, come unità di misura, il **radiante**, il cui simbolo è "rad", perché semplifica i calcoli. Il radiante è definito come l'angolo al centro di una circonferenza di raggio unitario che intercetta sulla circonferenza un arco di lunghezza uguale al raggio. Il radiante corrisponde a circa 57,3 gradi sessagesimali. Nel sistema internazionale di unità di misura, il radiante è l'unità di misura degli angoli piani.

Consiglio didattico

Abbiamo più volte parlato di angoli convessi e di angoli non convessi o concavi. Come riconoscerli? Come distinguerli? Come definirli?

Sul libro di testo della Flaccavento citato all'inizio c'è questa definizione:

"Si dice angolo concavo quello che contiene i prolungamenti dei suoi lati. Si dice angolo convesso quello che non contiene i prolungamenti dei suoi lati".

L'autrice introduce l'angolo giro e l'angolo piatto, ma non si pronuncia sul fatto che siano concavi o convessi. Non parla dell'angolo nullo.

Sul libro di testo di Pellerey, citato anch'esso all'inizio, vi è questa definizione:

"Un angolo si dice concavo se contiene i prolungamenti dei suoi lati. In caso contrario si dice convesso."

Subito dopo l'autore prosegue: "Vi è un angolo particolare che non risulta essere né concavo, né convesso; esso è un po' un caso limite perché le due semirette che lo formano sono semirette opposte tra loro rispetto all'origine. Quest'angolo è chiamato angolo piatto." Introduca anche l'angolo giro senza pronunciarsi sulla sua convessità o concavità. Non parla dell'angolo nullo.

L'affermazione che l'angolo piatto non è né concavo né convesso è semplicemente assurda perché ogni figura geometria è o convessa o concava. Per la definizione data l'angolo piatto è concavo perché contiene i prolungamenti dei suoi lati.

Il mio consiglio quando si vuole parlare di angoli convesso e di angoli concavi è quello di ricorrere alla definizione generale di figura convessa e di figura concava. In base a questa definizione l'angolo piatto risulta convesso, l'angolo giro concavo e l'angolo nullo convesso.

Consiglio bibliografico

Una proposta di "un possibile itinerario didattico" sugli angoli si trova nel Quaderno didattico 15 – 16 del Centro Morin, pagine 5 – 30.

Attività sugli angoli fatte con il software Cabri si trovano nel Quaderno didattico 19 del Centro Morin, pagine 25 – 30.

Per saperne di più sui radianti consultare la parola "radiante" nel "Dizionario di matematica elementare" di Stella Baruk edito da Zanichelli.

9 – Uno sguardo allo spazio.

Nello spazio c'è qualcosa di analogo e qualcosa di diverso di ciò che succede nel piano.

Nel piano, per avere un angolo, bisogna considerare un punto V (il vertice) e due semirette di origine V (i lati). Nello spazio se sostituiamo al punto una retta t e alle due semirette due semipiani di origine t otteniamo un diedro. Possiamo descriverlo così.

Consideriamo nello spazio due piani α e β incidenti in una retta t. Ciascuno di essi dà origine a due semispazi e quindi lo spazio resta diviso in quattro regioni convesse ottenute intersecando coppie convenienti di questi semispazi. Ciascuna di queste regioni è individuata dalla retta t e da una coppia di semipiani. Ed ecco una possibile definizione formale di diedro:

"Si dice diedro una coppia di semipiani α' e β' che hanno la stessa origine t".

La retta t è lo **spigolo** del diedro mentre i due semipiani sono le sue **facce**.

Questa definizione ci dà lo “scheletro” del diedro. Se vogliamo riempirlo basta introdurre la regione diedrale, cioè lo spazio ottenuto intersecando il semispazio di origine il piano di α’ che contiene β’ con il semispazio di origine il piano di β’ che contiene α’.

Nello spazio c’è un “oggetto matematico” che non ha analogo nel piano: il triedro.

Consideriamo tre semirette non complanari uscenti da una stessa origine O. Nascono tre piani individuati da ciascuna delle coppie di rette che contengono semirette diverse. Per ciascuno di questi piani consideriamo il semispazio che contiene l’altra semiretta. L’intersezione di questi tre semispazi è una regione convessa che possiamo associare alle tre semirette. Ecco la definizione forma di triedro:

“ Si dice triedro una terna di semirette non complanari, aventi l’origine in comune”.

L’origine delle semirette è il **vertice** del triedro, mentre le semirette sono i suoi **spigoli.**

I diedri si vedono bene nel cubo ed i triedri nella piramide a base triangolare (tetraedro).

Nello spazio ci sono anche altre figure come gli angoloidi (generalizzano il concetto di triedro), gli angoli fra piani, gli angoli retta – piano, ma non è il caso di parlarne.

CAPITOLO SETTIMO

UN MONDO RIGIDO: I TRIANGOLI

1 – Introduzione

I poligoni sono figure molto familiari e da sempre sono oggetto di insegnamento nella scuola elementare. Essi sono certamente tra « le principali figure geometriche piane» che i Programmi, da quelli del 1985 a quelli del 2007, richiedono di «riconoscere in contesti diversi, disegnare e costruire». Fra i poligoni la famiglia dei triangoli è la prima ad essere studiata nella scuola elementare e nella scuola media ed è sempre esplicitamente nominata nei programmi.

Programmi del 1985: "Riconoscere eventuali simmetrie presenti in una figura piana e classificare triangoli rispetto alle simmetrie stesse".

Indicazioni del 2004: " Denominazione di triangoli con riferimento alle simmetrie presenti nelle figure, alla lunghezza dei lati e all'ampiezza degli angoli".

Indicazioni del 2007: "Determinare l'area di triangoli".

Nello studio dei poligoni possiamo seguire due strade:

A. Partire dallo studio dei poligoni in generale: definizione, convessità, diagonali, angoli, ecc. e poi studiare le singole famiglie (sostanzialmente triangoli e quadrilateri)

B. Incominciare a studiare i poligoni più semplici e più "popolari" per arrivare, alla fine, ai poligoni in generale.

Siccome questa è la strada seguita nelle attività in classe, la percorreremo anche noi.

2 - Le varie definizioni

Il triangolo può essere definito in modi diversi. Ogni definizione ha pregi e difetti.

La prima definizione che presento è la più semplice ed economica perché fa intervenire solo i concetti primitivi di punto e di retta. E' anche la più povera e non ci permette di parlare né di perimetro né di area di un triangolo. Ecco la definizione:

Definizione 1 : Si chiama triangolo una terna di punti non allineati .C

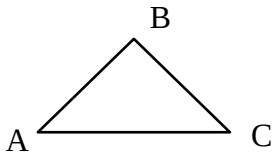
A. .B

In genere gli insegnanti rimangono sconcertati davanti a questa definizione, sia perché non è tradizionale, sia perché non si vede più la cara e familiare figura del triangolo.

Concettualmente è la definizione migliore, perché presenta il triangolo nei suoi elementi essenziali. Potremmo parlare di "scheletro" del triangolo. Dal punto di vista didattico, almeno per la scuola dell'obbligo, è poco efficace e da evitare.

Una definizione più familiare è la seguente:

Definizione 2: Dati tre punti non allineati A, B, C si chiama triangolo la figura formata dai tre punti e dai segmenti AB, BC, CA.

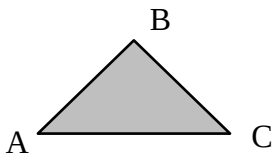


Con questa definizione si ottiene il triangolo "vuoto", cioè solo il suo contorno e possiamo, perciò, parlare di perimetro.

È una definizione più ricca della precedente perché fa intervenire, e quindi ne richiede la conoscenza, il concetto di segmento. Potremmo parlare di "nervatura" del triangolo.

Ancora più ricca ed elaborata è la seguente

Definizione 3: Dati tre punti non allineati A, B, C si chiama triangolo la figura formata dai punti comuni ai tre angoli ABC, BCA e CAB.



Con questa definizione si ottiene il triangolo "pieno" cioè si prende in considerazione anche la regione dei punti interni. Potremmo parlare del "corpo" del triangolo.

In questa definizione interviene anche il concetto di angolo che, come abbiamo visto, è uno dei più difficili della geometria elementare.

A questo punto della nostra trattazione possiamo scegliere una qualunque delle tre definizioni, ma possiamo anche, a seconda delle necessità, utilizzarle tutte.

Il triangolo della **definizione 3** è una **figura convessa** perché intersezione di tre angoli convessi. Si vede ancor meglio questa proprietà pensando il triangolo come intersezione di tre semipiani (esercizio 1).

Il **triangolo** dalla **definizione 2** è un **poligono rigido** perché se fissiamo nei vertici tre listelli di legno, la configurazione ottenuta non cambia più, non si deforma. Un triangolo di questo tipo, nel quale l'attenzione si concentra solo sui lati, si presta bene per far scoprire quando, dati tre segmenti, si può costruire il triangolo. Deve essere rispettata quella che viene chiamata la **"disuguaglianza triangolare"** cioè la somma di due lati deve essere maggiore del terzo lato. In simboli: $AB + BC > CA$. Nel caso in cui fosse: $AB + BC = CA$, i tre punti sono allineati e si parla di "triangolo degenere".

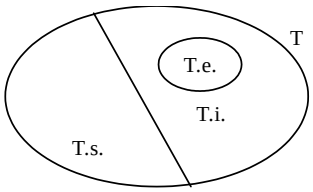
Nei triangoli ad ogni **vertice** sta **opposto** un lato (quello che congiunge gli altri due vertici). Questa nozione viene utilizzata quando si definisce l'**altezza** (di cui parleremo in seguito). Nei triangoli non ci sono vertici opposti né lati opposti. Per il calcolo dell'area ogni lato può essere scelto come base e l'altezza deve essere quella relativa alla base scelta.

3 - Classificazione in base ai lati

Già in Euclide (Def. XX del libro 1) troviamo la classificazione, diventata tradizionale, in base alla congruenza (uguaglianza) dei lati. Il concetto di congruenza è ben noto. Per definirlo matematicamente dovremmo introdurre le "isometrie". Diremo qualcosa fra poco anche se ciò esula dal nostro corso. Tuttavia facciamo subito la tradizionale classificazione:

- **Triangolo scaleno:** ha **tre lati diversi**
- **Triangolo isoscele**: ha **due lati congruenti**
- **Triangolo equilatero:** ha **tre lati congruenti.**

L'espressione "avere due lati congruenti", usata nella definizione di triangolo isoscele, va intesa nel senso di " avere **almeno** due lati congruenti". Sul terzo lato non ci si pronuncia: può essere o no congruente agli altri due. Quindi secondo la nostra definizione i triangoli equilateri sono anche isosceli. Coerentemente possiamo rappresentare questa classificazione con il seguente diagramma di Eulero – Venn:



Naturalmente si può definire, come faceva Euclide, isoscele un triangolo che ha **soltanto** due lati uguali.

In questo caso un triangolo equilatero non è isoscele e coerentemente la rappresentazione della classificazione con un diagramma di Eulero – Venn è la seguente.

Non mi sembrano cose difficili: basta un po' di coerenza a basso costo, ma capita di non trovarla su certi libri di testo per la scuola media. Il testo di Pellerey, già altre volte citato, definisce isosceli i triangoli che "hanno due lati congruenti ed uno no", ma adotta la prima rappresentazione con i diagrammi di Eulero – Venn.

Spesso si chiamano “obliqui” i due lati congruenti e “base” il terzo lato. E’ una terminologia inutile, anzi, dannosa perché esclude che ci siano triangoli isosceli rettangoli, nei quali i due lati congruenti non sono obliqui.

4 – Digressione sulla simmetria assiale.

Tutti i programmi richiedono di individuare “simmetrie nelle figure geometriche”

Siccome il discorso sulle simmetrie ricorrerà spesso, introduciamo il concetto di **simmetria assiale.** In questo modo diverrà completamente comprensibile la definizione di perpendicolarità tra rette.

Il concetto di simmetria è una delle idee fondamentali con cui l’uomo cerca di organizzare il proprio pensiero e di esprimerlo.

Di “cose” simmetriche è piena la natura: cristalli, vegetali, animali.

Molte opere dell’uomo presentano elementi di simmetria: basta pensare a case e palazzi. Molte attività quotidiane, come piegature di fogli, di tovaglioli, ecc. richiamano alla mente l’idea di simmetria.

Diverse lettere dell’alfabeto, scritte in stampatello maiuscolo, presentano elementi di simmetria.

Lo specchio è uno strumento formidabile per costruire simmetrie.

Cerchiamo ora di dare un senso matematico all’idea intuitiva di simmetria.

Incominciamo con l’introdurre il concetto di **isometria piana**.

Definizione: Si chiama **isometria piana** una trasformazione biunivoca del piano in sé che conserva le distanze.

In altre parole, se P e Q sono due punti del piano e P’ , Q’ sono i loro trasformati, allora $d(P', Q') = d(P,Q)$.

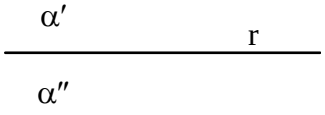
Senza dare la definizione matematica di distanza fra due punti P e Q (d(P,Q)) possiamo pensare tale distanza come la lunghezza del segmento PQ.

Il concetto familiare di figure congruenti (o uguali) è legato a quello di isometria secondo la seguente

Definizione Due figure piane F ed F’ si dicono **congruenti** se si corrispondono in una isometria.

Vediamo ora che cosa è una simmetria assiale.

Sia r una retta ed α' e α'' i due semipiani di origine r.



Definizione Si chiama **simmetria assiale** (o ribaltamento) di asse r l'isometria piana che ha queste caratteristiche:

1 - lascia fissi tutti e soli i punti di r

2 - trasforma α' in α" e α" in α'

3 - applicata due volte dà l'identità.

Qualche commento.

- La simmetria di asse r, di solito, viene indicata con il simbolo $\mathbf{S_r}$.
- I punti della retta r sono **punti uniti,** cioè ciascuno coincide con il proprio simmetrico.
- L'asse r, di conseguenza, è una **retta fissa**, **unita** cioè coincide con la propria simmetrica. Si dice anche che r è **retta unita** e di **punti uniti**. Questa frase lascia intravedere la possibilità che ci siano **rette unite,** ma **non di punti uniti** (commento alla definizione di perpendicolarità tra rette).
- La proprietà 2 - ci fa capire perché la simmetria assiale si chiami anche ribaltamento. Bisogna, però, distinguere questo ribaltamento che **avviene esclusivamente nel piano** con lo scambio dei due semipiani, dal ribaltamento fisico degli oggetti che avviene nello spazio.
- La terza proprietà si esprime dicendo che la S_r è **involutoria**.
- Osserviamo, anche, che lo studio dei punti e delle rette fisse in una isometria è importante perché serve per caratterizzare i vari tipi di isometrie.

5 – Classificazione dei triangoli in base agli assi di simmetria

Incominciamo col domandarci: che cosa significa per un triangolo ABC avere un asse di simmetria r ?

Significa che nella simmetria di asse r il triangolo si trasforma in se stesso, cioè S_r (ABC) = ABC.

Bisogna fare attenzione: questa uguaglianza non vuol dire che A va in A, B in B e C in C. Significa semplicemente che ogni vertice del triangolo va in un vertice del triangolo.

Il caso più semplice, ma meno interessante dal nostro punto di vista, è quello del triangolo che non ha **nessun asse di simmetria.** È il caso del **triangolo scaleno.**

Consideriamo, ora, un triangolo che **ha almeno un asse di simmetria.** Esso passa per un vertice. Infatti i tre vertici A, B, C devono trasformarsi uno nell'altro, per quanto abbiamo detto prima. Supponiamo che A vada in B e quindi che B vada in A perché la simmetria è involutoria. Allora il vertice C nella simmetria deve essere fisso, cioè trasformarsi in se stesso. Quindi C appartiene all'asse di simmetria.

Consideriamo, allora, ABC e supponiamo che l'asse di simmetria r passi per C. I vertici A e B sono simmetrici rispetto ad r, tale retta, quindi, passa per il punto medio M del segmento AB ed è perpendicolare alla retta AB.

Conclusione: **l'asse r di simmetria che passa per C è l'asse del segmento AB**.

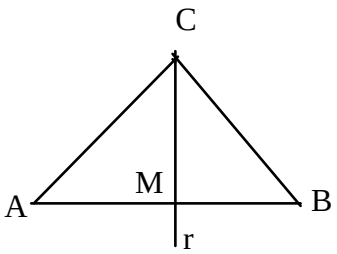


Fig.1

Così è completamente delineato l'identikit dell'asse r. Ebbene **un triangolo** che **ha almeno un asse di simmetria** si dice **isoscele**.

L'aggettivo non è usurpato perché il triangolo ABC (Fig.1) ha due lati congruenti, cioè CA e CB.

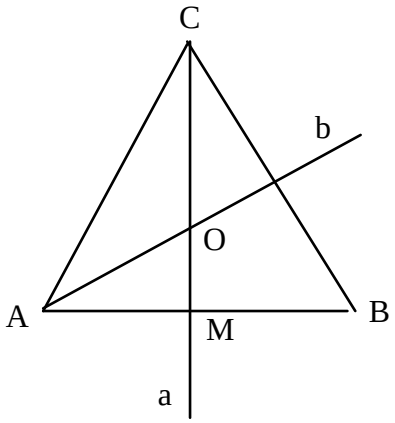
Vediamo ora il caso di **un triangolo** con **due assi di simmetria.**

Un asse passerà per C e ciò comporta CA = CB;l'altro passerà, per esempio, per A e ciò comporta AC = AB

Ne deriva che **i tre lati sono congruenti**.

Siccome AB = CB allora B appartiene all'asse di AC e quindi da B passa un terzo asse di simmetria del triangolo ABC.

Conclusione: **se un triangolo ha due assi di simmetria allora ne ha tre.**
Definiamo **equilatero un triangolo** che ha **tre assi di simmetria**



Osservazione.

Le due classificazioni che abbiamo presentato si fondano su criteri diversi, però coincidono, cioè danno origine agli stessi insiemi di triangoli. In altre parole i tre aggettivi scaleno-isoscele-equilatero, designano gli stessi triangoli nelle due classificazioni.

6 - Angoli di triangoli

È tradizionale la distinzione fra **angoli interni** e **angoli esterni.**

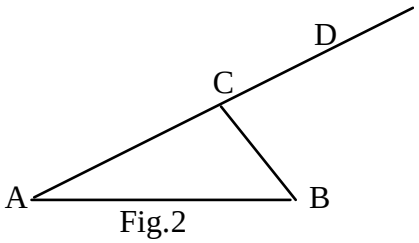


Fig.2

In relazione alla Fig.2 l'angolo CAB è interno e l'angolo DCB è esterno.

I due aggettivi, interno- esterno, a che cosa si riferiscono? Come vanno interpretati?

Essi si riferiscono alle **regioni angolari** ed alla **regione triangolare** cioè, intuitivamente, alla regione dei punti interni del triangolo.

Di solito si usa l'espressione: "angoli interni di un triangolo". Chi è interno? E' l'angolo ad essere interno ad un triangolo oppure è il triangolo ad essere interno ad un angolo? Di solito, complice anche la figura del triangolo ed il fatto che i lati di un angolo del triangolo vengono disegnati come segmenti (i lati del triangolo) e non come semirette, si pensa che sia l'angolo ad essere interno al triangolo. Basta un minimo di riflessione per convincerci che la regione angolare di $C\hat{A}B$ non può essere interna alla regione triangolare, perché "fuoriesce" abbondantemente. È vero esattamente l'opposto:

la regione triangolare è interna alla regione angolare di $C\hat{A}B$.

Quindi **angolo interno** di un triangolo è un angolo la cui regione angolare **contiene** la regione triangolare.

Sono interni gli angoli $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$.

Esterni, invece, sono gli **angoli** come $D\hat{C}B$, la cui regione angolare è **totalmente** esterna alla

regione triangolare, non ne contiene neppure un punto.

Osserviamo che un angolo esterno può essere formato dal prolungamento di un lato (CD) e dal suo lato consecutivo (CB, come in Fig.2), oppure da un lato (AC) e dal prolungamento del lato consecutivo (CD come in Fig.3).

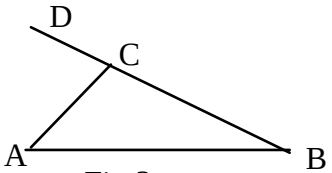


Fig.3

Gli angoli interni di un triangolo possono essere acuti, retti, ottusi. Il problema che sorge, anche in vista di una nuova classificazione dei triangoli, è il seguente: i tre angoli interni possono essere tutti acuti, tutti retti, tutti ottusi? La risposta è ben nota, ma si tratta di vedere il perché. Tutto dipende da quanto valgono, globalmente, i tre angoli interni. Nel caso del triangolo noi possiamo certamente parlare di "somma degli angoli interni" ed il risultato dovrà essere un angolo.

Per tutti, a cominciare da Euclide (proposizione 32 del primo libro) va bene dire che questa somma vale due angoli retti. Per chi accetta gli angoli piatti la risposta è: "la somma degli angoli interni di un triangolo vale un angolo piatto".

Le cose si complicano se vogliamo sommare gli angoli esterni di un triangolo. "Ufficialmente" questa somma vale un angolo giro. Abbiamo visto, però, che una sola delle varie definizioni di angolo, certamente non proponibile nella scuola elementare, dà diritto di cittadinanza all'angolo giro.

La stessa situazione si ritrova quando vogliamo sommare gli angoli interni di una quadrilatero e, ancor peggio, se parliamo di un pentagono o di un esagono.

Possiamo uscire dall'empasse se invece che di "somma degli angoli" parliamo di "somma delle misure degli angoli". Le misure sono numeri e i numeri possono sempre essere sommati.

Qui, però, sorgono due problemi: che cosa è la misura di un angolo? Quale unità di misura scegliamo?

Non rispondiamo alla prima domanda perché andremmo troppo fuori dai limiti di questo corso. Per la seconda domanda, abbiamo a disposizione tre unità di misura: grado sessagesimale, grado centesimale, radiante.

Siccome su ogni goniometro, strumento principe per la misura degli angoli, vi sono i gradi sessagesimali, scegliamo, come si fa di solito, il grado sessagesimale come unità di misura.

Fatta questa lunga premessa diciamo quanto vale la "somma delle misure degli angoli interni di un triangolo". Lo facciamo sotto forma di **Teorema:**

La somma delle misure degli angoli interni di un triangolo è 180

(se si prende il grado sessagesimale come unità di misura).

Non riporto la dimostrazione che ciascuno può vedere sul proprio libro di geometria. Voglio, però, sottolineare che essa dipende in modo essenziale dal fatto che da un punto ad una retta si possa condurre una **sola parallela**. Questa somma è **fissa** e vale per tutti i triangoli.

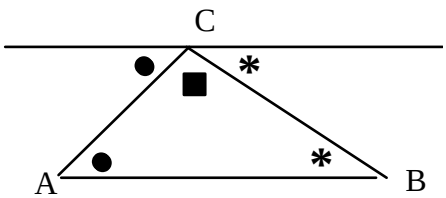


Fig.4

Nella **geometria non euclidea iperbolica,** nella quale non vale l'unicità della parallela, la somma delle misure degli angoli interni di un triangolo varia da **0** a **180** (escluso).

Nella geometria della **sfera** (la geometria del mappamondo) sulla quale non esistono rette parallele, la somma degli angoli interni di un triangolo non è fissa e vale sempre più di 180.

Che cosa possiamo dire, per i nostri triangoli euclidei, dei loro angoli esterni?

In **ogni triangolo** anche **la somma delle misure degli angoli esterni è fissa e vale 360.**

Basta pensare (Fig.2) che la somma delle misure di un angolo interno e di uno esterno relativi allo stesso vertice è 180. Quindi la somma delle misure relative ai tre vertici è 3x180. Sottraendo la somma delle misure degli angoli interni otteniamo 360.

Ricordiamo, però, che nella teoria degli angoli come rotazioni, l'angolo giro coincide con l'angolo nullo e, quindi, questa somma vale 0.

7 - Classificazione dei triangoli in base agli angoli.

È una classificazione che nella scuola elementare è fine a se stessa, non ha sbocchi. Inoltre questo criterio non ha la regolarità del precedente (0 , 1 , 3 assi di simmetria).

Triangoli **acutangoli :** **3** angoli acuti

Triangoli **rettangoli :** **1** angolo retto

Triangoli **ottusangoli :** **1** angolo ottuso

In forza del **Teorema** è ovvio che un triangolo non può avere due angoli interni retti o ottusi.

8 – Altezze dei triangoli

Negli Elementi di Euclide troviamo una definizione di altezza. E' la definizione IV del libro VI:

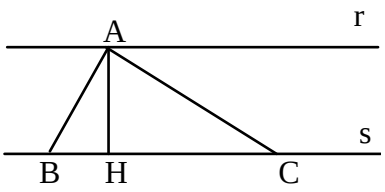
"In ogni figura, è altezza la perpendicolare condotta dal vertice sulla base".

Nello sviluppo del libro VI Euclide si riferisce solo all'altezza dei triangoli e dei parallelogrammi

Per dare un senso alla definizione di Euclide dobbiamo poter fissare in ogni figura (poligono) un lato come base ed individuare il vertice opposto da cui mandare l'altezza. Questo è indubbiamente facile per i triangoli e per i parallelogrammi nei quali ogni lato può essere assunto come base. Già ci sono difficoltà per i trapezi. I lati opposti paralleli si assumono facilmente come basi, ma gli altri due lati? E in un quadrilatero generico? E in un pentagono? E in un esagono? Può essere significativo riflettere sul fatto che nelle formule dell'area dei poligoni entrano la base e l'altezza solo per i triangoli, i trapezi ed i parallelogrammi.

Presentiamo un concetto di altezza che ci permetta di individuare in quali poligoni essa è presente. E' un concetto, come abbiamo già visto, legato al concetto di **striscia**.

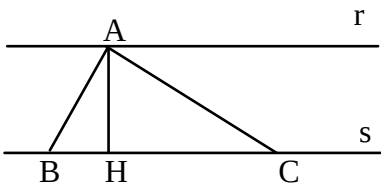
Abbiamo già visto che data una striscia (r,s) è immediato costruire un triangolo ABC prendendo un vertice (A) su un lato della striscia e gli altri due vertici (B,C) sull'altro lato.



L'altezza della striscia (AH) è l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC.

È possibile fare anche il cammino inverso.

Dato il triangolo ABC possiamo scegliere il lato BC come "base" (di appoggio) e pensare alla retta che lo contiene.

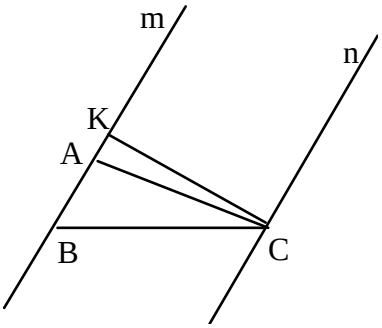


Dal vertice A mandiamo la parallela alla **retta** BC. Otteniamo così la striscia (r,s) che contiene completamente il triangolo ABC i cui **vertici stanno tutti sui lati della striscia.**

L'altezza AH della striscia è l'altezza del triangolo relativa alla base BC.

Come base possiamo scegliere un **qualunque lato** del triangolo ABC.

Se, per esempio, prendiamo come base il lato AB, dal vertice C possiamo mandare la parallela alla retta AB. Otteniamo così la striscia (m,n) che contiene completamente il triangolo ABC i cui **vertici stanno tutti** sulla striscia (m,n)



L'altezza CK della striscia è l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AB.

Senza ripetere il disegno, scegliendo AC come base, si ottiene una nuova striscia la cui altezza è l'altezza del triangolo relativa alla base AC.

In conclusione: **Ogni triangolo ha tre altezze, una per ogni lato scelto come base.**

L'altezza è sempre il **segmento** di perpendicolare che va **da un vertice alla retta del lato opposto** (base).

L'altezza relativa ad un lato può essere **interna** al triangolo, **coincidente** con un **lato,** esterna al triangolo. Precisiamo:

- in un **triangolo acutangolo** le **tre altezze** sono **interne al triangolo**
- in un **triangolo rettangolo** **due altezze** coincidono con i **due cateti** e la **terza** (quella relativa all'ipotenusa) è **interna al triangolo**

- in un **triangolo ottusangolo** **due altezze** sono **esterne** (quelle relative ai lati che individuano l'angolo ottuso) e **una è interna al triangolo**

In ogni caso **le rette delle tre altezze** si incontrano in un punto chiamato **ortocentro** che:

- è **interno** nel **triangolo acutangolo**
- è **esterno** nel **triangolo ottusangolo**
- è **coincidente** con il **vertice dell'angolo retto** nel **triangolo rettangolo.**

Ciascun lato del triangolo ha un **asse** che è la perpendicolare nel punto medio del lato. L'asse è formato dai punti del piano che sono equidistanti dagli estremi del segmento, cioè, in questo caso, dai vertici del triangolo. Anche gli assi dei lati del triangolo si incontrano in un punto che è detto **circocentro**. E' anch'esso un punto notevole del triangolo. Siccome esso è equidistante dai vertici è il centro del cerchio circoscritto al triangolo. Per questo si chiama circocentro.

9 – Criteri di congruenza.

Abbiamo visto che una figura F è **congruente** ad una figura F' quando esiste una isometria che trasforma F in F'. Ovviamente c'è anche la isometria inversa che trasforma F' in F. Per questo parliamo semplicemente di figure congruenti fra di loro.

In un triangolo ci sono 6 elementi: tre lati e tre angoli. Perché un triangolo ABC sia congruente ad un triangolo A'B'C' è necessario che siano congruenti i lati corrispondenti e congruenti gli angoli corrispondenti. Quindi dovremmo verificare la congruenza di 6 elementi. Il problema che si pone è il seguente: è proprio necessario verificare la congruenza fra sei elementi oppure possiamo accontentarci di meno? La risposta è data dai criteri di congruenza fra triangoli. Essi ci dicono che è sufficiente verificare la congruenza fra tre elementi a condizione che uno di essi sia un lato. I tre criteri, ben noti, dicono:

Primo criterio:

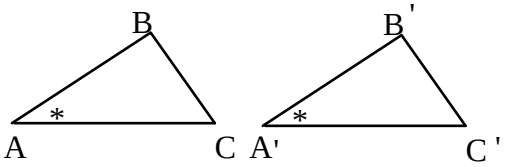
Due triangoli ABC e A'B'C' con AB = A'B', AC = A'C', $\hat{A} = \hat{A}'$ sono congruenti.

Dimostrazione.

Notiamo che AB, A'B', ecc. denotano i lati e il simbolo « = » la congruenza. Siccome $\hat{A} = \hat{A}'$ esiste

una isometria che trasforma $\hat{A}$ in $\hat{A}'$.

Essa trasforma la semiretta AB in A'B' ed AC in A'C'. Siccome per i **lati** vale AB = A'B' e AC = A'C', allora questa isometria trasforma B in B' e C in C'.



Quindi l'isometria trasforma ABC in A'B'C', cioè i due triangoli sono congruenti.

I vincoli imposti ai tre elementi sono evidenti: l'angolo interessato non è qualunque, ma quello determinato dai due lati congruenti.

Riportiamo ora l'enunciato del secondo e del terzo criterio di congruenza, senza dimostrazioni.

Secondo criterio

Due triangoli ABC e A'B'C' con AB =A 'B', $\hat{A} = \hat{A}'$ **e** $\hat{B} = \hat{B}'$

sono congruenti.

Anche qui i vincoli imposti ai tre elementi sono evidenti: congruenti devono essere gli angoli adiacenti ai lati congruenti.

Terzo criterio

Due triangoli ABC e A'B'C' con AB = A'B', AC = A'C' e BC = B'C'

sono congruenti.

Osservazione.

Osserviamo che la dimostrazione di questi criteri non dipende dalla esistenza ed unicità della parallela e, quindi, neppure dal teorema sulla somma delle misure degli angoli interni di un triangolo.

Utilizzando questo teorema, il secondo criterio può essere "indebolito" ed enunciato in questo modo:

« **Due triangoli che hanno congruenti un lato e due angoli qualunque sono congruenti** ».

Consiglio bibliografico

Interessanti attività sui triangoli con il geopiano si trovano nel Quaderno didattico N. 15 – 16.

Nel quaderno didattico N. 19 sono proposti problemi di costruzione di triangoli con l'intervento di Cabri.

Si trovano anche proposte didattiche nel Quaderno: Figure geometriche e definizioni (disponibile solo in fotocopia)

19 - Esercizi

1. Definire il triangolo ABC facendo intervenire i semipiani.

2. Dimostrare che in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

3. Dare la definizione di mediana di un triangolo. Le tre mediane si incontrano in un punto. Come si chiama? [è anch'esso un punto notevole]

4. Dare la definizione di bisettrice di un angolo. Le tre bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in una punto. Come si chiama? Perché? [anche questo è un punto notevole]

5. Che cosa succede dei punti notevoli di un triangolo quando il triangolo è equilatero? E se è isoscele?

CAPITOLO OTTAVO

UN MONDO PIU' DUTTILE E VARIO: I QUADRILATERI

1 – Introduzione

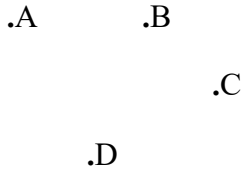
Il mondo dei quadrilateri è molto più vario, complesso e ricco di quello dei triangoli. Basti pensare che ci sono quadrilateri convessi e quadrilateri concavi, quadrilateri semplici e quadrilateri intrecciati. Qui nasce un nuovo "oggetto matematico", le diagonali, con una enorme varietà di situazioni. Scompare, inoltre, ogni rigidità: i quadrilateri possono essere deformati con poco sforzo.

Abbiamo visto, a suo tempo, le definizioni di Euclide. Ora vediamo le nostre.

2 – Le varie definizioni.

A proposito dei quadrilateri possiamo procedere come nel caso dei triangoli, ma ci sono delle sorprese. Volendo escludere quadrilateri "degeneri" possiamo dare questa definizione:

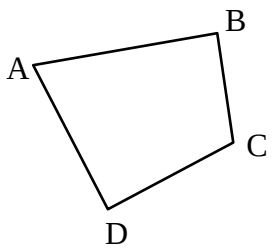
Definizione 1: Chiamiamo quadrilatero una quaterna ordinata di punti (A,B,C,D) a tre a tre non allineati.



È la definizione più economica perché fa entrare in gioco solo i concetti primitivi di punto e di retta. E' la definizione più semplice perché mette in risalto gli elementi essenziali del quadrilatero, cioè i vertici, lo "scheletro" del quadrilatero. E' la definizione più "povera" perché non ci permette di parlare di perimetro e di area.

Possiamo dare anche una definizione più ricca che faccia intervenire anche i lati.

Definizione 2: Data una quaterna ordinata di punti (A, B, C, D), a tre a tre non allineati, chiamiamo quadrilatero la figura formata dai punti A, B, C, D e dai segmenti AB, BC, CD, DA.



È una definizione che mette in risalto l'intelaiatura, la "nervatura", il contorno del quadrilatero. Con questa definizione si può parlare di perimetro del quadrilatero.

E se volessimo il quadrilatero "pieno", il suo "corpo"?

Qui troviamo la sorpresa: il metodo utilizzato per i triangoli (fare l'intersezione di semipiani) non sempre funziona.

Nel caso della figura 1 funziona. Fallisce invece nelle figure 2 e 3 .

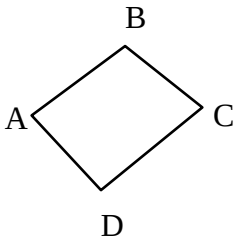


fig.1

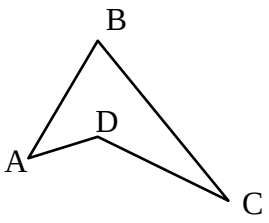


fig.2

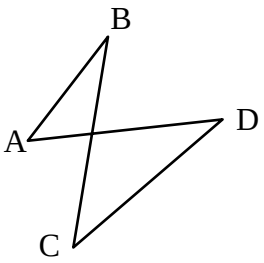


fig.3

La condizione perché il metodo funzioni è la seguente:

la retta che unisce due vertici consecutivi deve lasciare gli altri due nello stesso semipiano. In questo caso si ottiene la regione dei punti interni del quadrilatero facendo l'intersezione dei quattro semipiani che, in ciascun caso, contengono gli altri due vertici (fig.4).

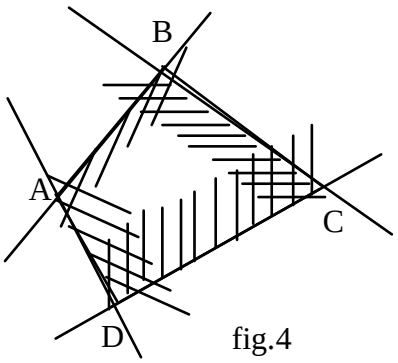


fig.4

Per i quadrilateri, quindi, non vale una definizione analoga a quella data per i triangoli, a meno di introdurre qualche ulteriore condizione come si vede nella

Definizione 3: Data la quaterna ordinata (A,B,C,D), se la retta che unisce due vertici consecutivi lascia gli altri due nello stesso semipiano, allora chiamiamo **quadrilatero convesso** la figura ottenuta intersecando i quattro semipiani aventi per origine la retta che unisce due vertici consecutivi e che contengono i restanti due vertici.

3 – Una prima importante distinzione

Con la definizione 3 abbiamo introdotto una prima distinzione nel mondo dei quadrilateri, distinzione assente in quello dei triangoli, e cioè la distinzione tra **quadrilateri convessi** e **quadrilateri concavi.**

Un **quadrilatero convesso** è una figura convessa secondo la definizione generale di figura convessa data nel capitolo quarto. E questo va sempre ricordato. Ci sono, però, dei "criteri" che ci permettono di verificare quando una quadrilatero è convesso.

- Un primo criterio è quello dato dalla definizione 3.

- Un secondo criterio fa entrare in gioco le rette dei lati: un quadrilatero è convesso se nessuna retta dei suoi lati attraversa il quadrilatero

- Un terzo criterio fa entrare in gioco le diagonali: è **convesso** un quadrilatero le cui diagonali si tagliano in un punto interno.

Un **quadrilatero concavo** è una **figura concava** nel senso della negazione della definizione data nel capitolo quarto (c'è almeno una coppia di punti del quadrilatero uniti da un segmento che non è tutto contenuto nel quadrilatero). Ci sono, però, dei "criteri" che ci permettono di verificare se un quadrilatero è concavo:

- Un primo criterio è quello che si può desumere dalla definizione 3: non sempre la retta che unisce due vertici consecutivi lascia gli altri due nello stesso semipiano.

- Un secondo criterio fa entrare in gioco le rette dei lati: un quadrilatero è concavo se una retta passante per i suoi lati attraversa il quadrilatero

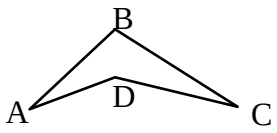
- Un terzo criterio fa entrare in gioco le diagonali: è **concavo** un quadrilatero le cui diagonali si tagliano in un punto esterno al quadrilatero.

4 – Una seconda (meno importante) distinzione

Nel mondo dei quadrilateri possiamo introdurre un'altra classificazione distinguendo:

- **quadrilateri semplici:** sono quelli in cui una coppia di lati si incontra al più in un vertice.

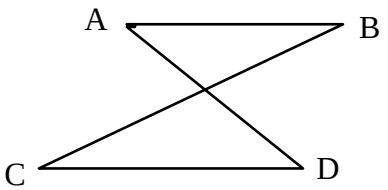
  Sono semplici tutti i quadrilateri convessi; ma ci sono anche quadrilateri concavi semplici, come quello in figura;



- **quadrilateri intrecciati**: sono quelli in cui una coppia di lati si incontra in un punto che non è un vertice.

  Si veda la figura qui accanto.

  Osserviamo esplicitamente che questa figura, per la scelta dei vertici che abbiamo fatto, **non rappresenta due triangoli uniti per un vertice**.



  Se lo volessimo dovremmo considerare il punto d'incrocio come un vertice e dargli un nome. In questo caso, però, non sarebbe un pentagono perché avrebbe tre vertici allineati.

5 - Quadrilateri convessi

Nell'insegnamento della geometria la parte del leone, e giustamente, la fanno i quadrilateri convessi. Di essi noi ora ci occupiamo.

5.1 Trapezi

Un trapezio è un quadrilatero **convesso** con **una** coppia di lati paralleli.

Dicendo "una" si può intendere, ed è meglio, "**almeno una**", mentre sull'altra coppia non si fa alcuna ipotesi. In questo caso i **parallelogrammi sono trapezi** perché avendo **due** coppie di lati paralleli ne hanno almeno una.

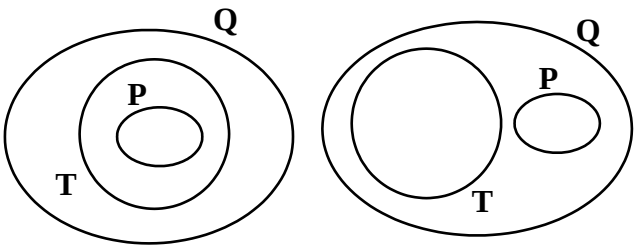
Ma si può intendere anche "**esattamente una**", cioè "**una sola**" e allora i **parallelogrammi non sono trapezi.** E' la scelta operata, per esempio, dalla Flaccavento che dà questa definizione: "Un quadrilatero avente due soli lati opposti paralleli si chiama trapezio". Definizione ovviamente legittima che permette di definire il trapezio isoscele basandosi sulla congruenza dei lati non paralleli. Questi lati sono spesso chiamati "obliqui". Scelta infelice perché esclude dal mondo dei trapezi il trapezio rettangolo che ha un lato non obliquo, ma perpendicolare.

Rappresentando le due situazioni con i diagrammi di Eulero-Venn si hanno le figure a fianco disegnate nelle quali

Q è l'insieme dei quadrilateri,

T è l'insieme dei trapezi e

P è l'insieme dei parallelogrammi.



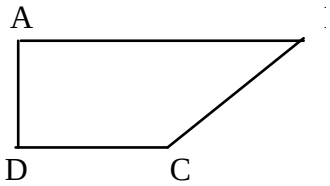
Trapezi speciali

Nella famiglia dei trapezi ve ne sono alcuni che presentano caratteristiche particolari rispetto agli angoli . Li presentiamo, facendo riferimento alla definizione di trapezio che include nell'insieme dei trapezi l'insieme dei parallelogrammi.

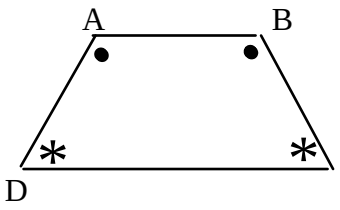
Trapezi rettangoli

Sono rettangoli i trapezi con **un angolo retto** (di conseguenza hanno retti due angoli).

Possiamo anche dire che sono i trapezi nei quali un lato è **perpendicolare** alla coppia di lati paralleli.



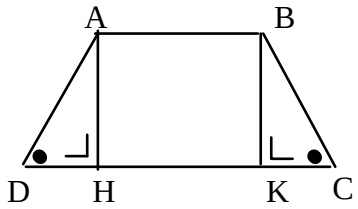
Trapezi isosceli



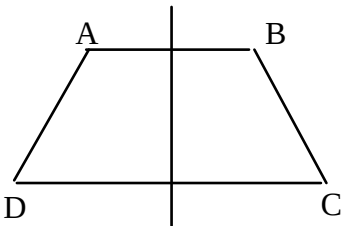
Sono isosceli i trapezi che hanno **congruenti** gli

"**angoli alla base**", cioè i due angoli che hanno come lato comune uno dei due lati paralleli.

- Una conseguenza è che i romboidi e i rombi non sono trapezi isosceli, mentre lo sono i rettangoli e i quadrati.
- Un'altra conseguenza è che i lati AD e BC sono congruenti perché sono congruenti (2° criterio di congruenza) i triangoli AHD e BKC.



I **trapezi isosceli** possono essere definiti anche in termini di **simmetria assiale.**

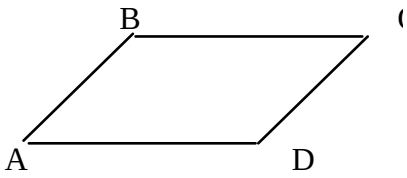


È isoscele un trapezio che possiede **un asse di simmetria** che sia asse di una coppia di lati paralleli.

È la definizione più semplice, più operativa e più forte. Adottando questa definizione è immediato dimostrare che sono congruenti gli angoli alla base e i lati AD, BC.

5 – 2 Parallelogrammi generici o romboidi.

Dei parallelogrammi noi possiamo dare varie definizioni facendo intervenire il parallelismo dei lati opposti, oppure la congruenza dei lati opposti o degli angoli opposti, oppure il fatto che le diagonali si intersecano nel rispettivo punto medio. Scelta una definizione le altre diventano proprietà tipiche, caratteristiche del parallelogramma. La definizione più gettonata fa ricorso al parallelismo dei lati opposti:



" I parallelogrammi generici sono i quadrilateri che hanno **due coppie di lati paralleli**."

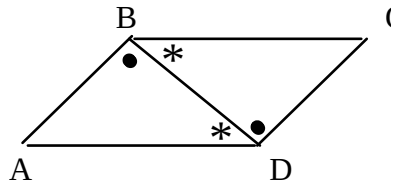
Nei teoremi che seguono con il termine "**parallelogramma**" intenderemo sempre "parallelogramma generico".

Dimostriamo che la **congruenza dei lati opposti** è una **proprietà caratteristica** per i parallelogrammi, cioè dimostriamo che:

1) In un parallelogramma sono congruenti i lati opposti, cioè AD = BC e AB = DC.

2) Un quadrilatero convesso con i lati opposti congruenti è un parallelogramma.

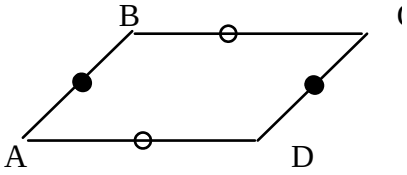
1) Consideriamo i due triangoli **ABD** e **CDB**.



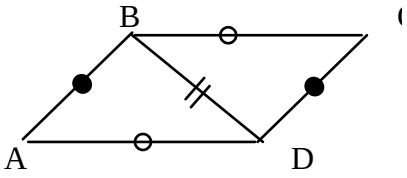
Essi **sono congruenti** per il 2° criterio di congruenza dei triangoli (si ricordi la congruenza degli angoli alterni interni di due rette parallele con una loro retta secante).

Quindi **AB = CD** e **AD = CB**.

2) Supponiamo, per ipotesi, AB = DC e AD = BC e dimostriamo che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma, cioè che le rette dei lati opposti sono parallele.



Consideriamo ancora i triangoli ABD e CDB. Essi sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli.



Quindi : $\mathbf{A\hat{B}D = C\hat{D}B}$.

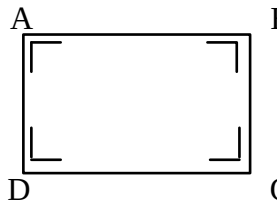
Allora le rette AB e CD sono parallele perché con la trasversale BD formano angoli alterni interni congruenti. Inoltre, siccome anche $\mathbf{A\hat{D}B = D\hat{B}C}$, pure le rette AD e BC sono parallele per lo stesso motivo. Quindi **ABCD è un parallelogramma**.

Con questa dimostrazione si vede che il romboide di Euclide è lo stesso che il nostro, anche se le due definizioni, nostra e di Euclide, sono diverse.

5 . 3 **Parallelogrammi speciali**

5 .3. 1 Rettangolo

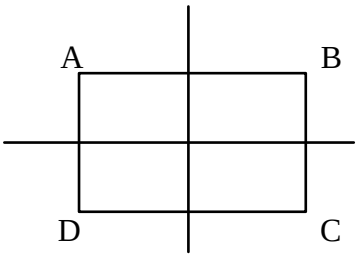
Il rettangolo è un parallelogramma con gli **angoli retti.**



È sufficiente richiedere che abbia **un** angolo retto perché gli altri tre lo saranno di conseguenza.

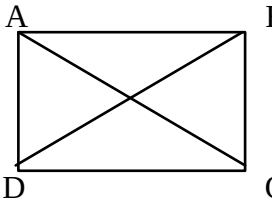
Con questa definizione i **quadrati sono rettangoli.**

Il **rettangolo** può essere caratterizzato mediante **gli assi di simmetria** dicendo che un rettangolo è un parallelogramma con due assi di simmetria che passano per i punti medi dei lati opposti.



Quest'ultima precisazione è necessaria per distinguere il rettangolo dal rombo.

Una **proprietà caratteristica** del rettangolo è di avere le **diagonali congruenti.**

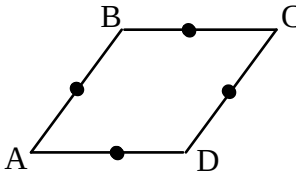


Potremmo quindi definire rettangolo un parallelogramma con le diagonali congruenti.

Come si vede abbiamo una grande libertà di scelta.

5. 3. 2 Rombo

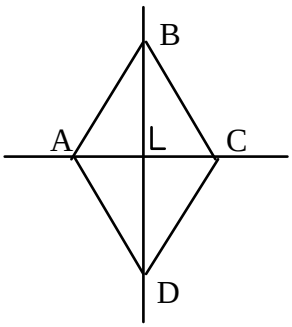
Il rombo è un parallelogramma con i **lati congruenti.**



In realtà sarebbe sufficiente richiedere che siano congruenti **due lati consecutivi**.

Con questa definizione i **quadrati sono rombi.**

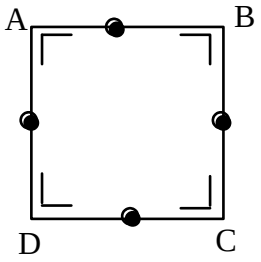
Anche i **rombi** possono essere caratterizzati con gli **assi di simmetria** dicendo che il rombo è un parallelogramma con due assi di simmetria che passano per i vertici opposti.



Una **proprietà caratteristica** del rombo è quella di avere le **diagonali perpendicolari.**

Potremmo quindi definire rombo un parallelogramma con le diagonali perpendicolari.

5. 3. 3 **Quadrato**



Abbiamo tanti modi diversi di definire il quadrato a seconda degli strumenti concettuali che possediamo.

Conoscendo i parallelogrammi possiamo dire che il quadrato è un parallelogramma con due lati consecutivi congruenti e con un **angolo retto.** Tutto il resto viene di conseguenza.

Conoscendo i rettangoli possiamo dire che il quadrato è un rettangolo con due lati consecutivi congruenti.

Conoscendo il rombo, possiamo dire che il quadrato è un rombo con un angolo retto.

Conoscendo semplicemente i quadrilateri convessi possiamo dire che il quadrato è un quadrilatero con le diagonali congruenti, perpendicolari e che si tagliano nel rispettivo punto medio.

Possiamo anche dire che è un quadrilatero con quattro assi di simmetria.

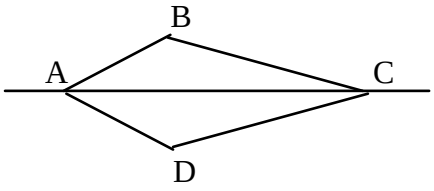
Possiamo anche dire che è un quadrilatero con i lati congruenti e gli angoli congruenti.

Quest'ultima definizione ci dice che

Il quadrato è il quadrilatero regolare.

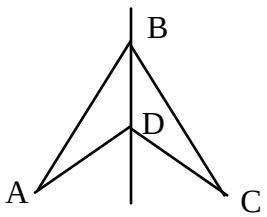
6 - Quadrilateri generici

Merita ricordare che ci sono quadrilateri con **un asse di simmetria** che passa per due vertici opposti: è la famiglia dei **deltoidi.** La presenza dell'asse di simmetria garantisce che AB = AD e BC = DC.

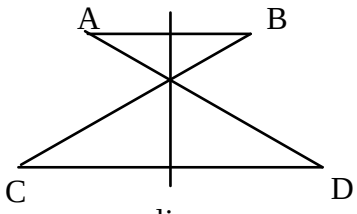


7 - Quadrilateri concavi

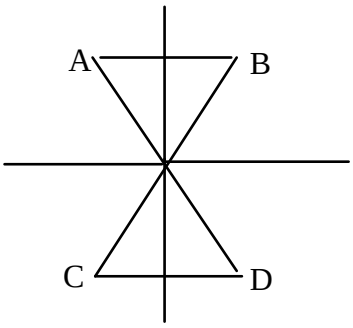
Abbiamo già visto che ce ne sono di semplici e di intrecciati. Alcuni hanno anche assi di simmetria, come:



coda di rondine



calice



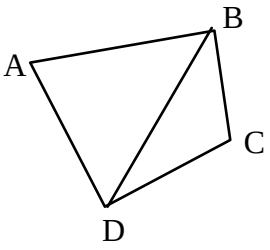
doppio calice

8 - Angoli interni - Angoli esterni

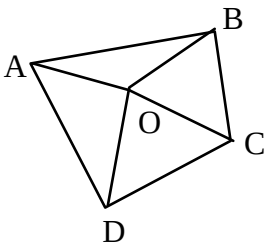
Nulla di nuovo, rispetto ai triangoli, per quanto riguarda le definizioni.

Nulla di nuovo per la somma delle misure degli angoli esterni: vale sempre 360, se si prende il grado sessagesimale come unità di misura.

La somma delle misure degli angoli interni vale 360, se si prende il grado sessagesimale come unità di misura. Lo si vede immediatamente dividendo il quadrilatero in due triangoli.



Il risultato non cambia se dividiamo diversamente il quadrilatero perché alla somma delle misure degli angoli interni dei 4 triangoli (4x180) dobbiamo sottrarre la somma delle misure degli angoli di vertice O (360).



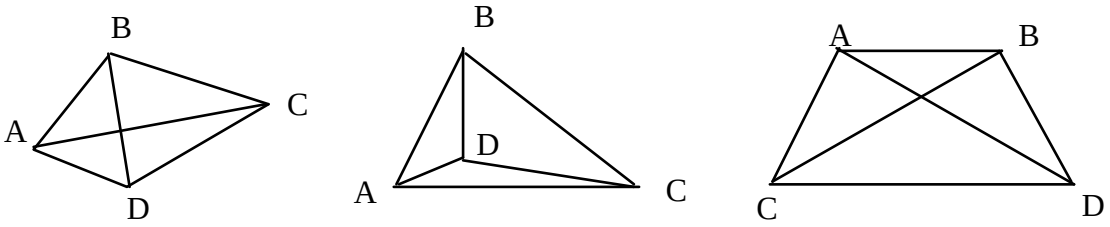
9 - Diagonali - Diagonali perpendicolari

Con i quadrilateri incomincia a diventare significativa la nozione di diagonale.

Definizione: Dato un qualunque quadrilatero ABCD si chiama diagonale il segmento che unisce A e C, B e D, cioè i vertici non consecutivi.

Il quadrilatero ABCD è qualunque: può essere convesso o concavo, semplice o intrecciato.

Le diagonali esistono sempre e sono due.



Nei quadrilateri convessi le diagonali si tagliano sempre in un punto interno ad entrambe; in quelli concavi esse non si tagliano mai in un punto interno: una può tagliare il prolungamento dell'altra, oppure si tagliano i due prolungamenti, oppure neppure essi si tagliano (doppio calice)

Particolarmente interessante, per la formula dell'area, è il caso in cui le **diagonali** sono **perpendicolari.**

- Diagonali congruenti che si tagliano nel punto medio : quadrato.
- Diagonali non congruenti che si tagliano nel punto medio: rombo

Questi sono i due casi più noti, ma ci sono altre situazioni come:

- Diagonali congruenti che non si tagliano nel punto medio, fig.4.
- Diagonali congruenti che si tagliano in parti rispettivamente congruenti (trapezio isoscele), fig.5.
- Diagonali **non** congruenti che non si tagliano nel punto medio, fig.6.
- Diagonali **non** congruenti con una che taglia l'altra nel punto medio, fig.7.

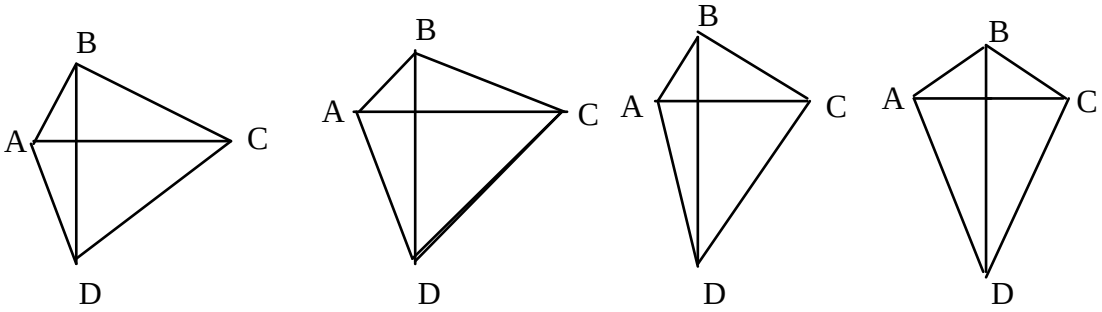


fig.4 fig.5 fig.6 fig.7

Lasciamo al lettore di esaminare altre situazioni.

Ci sono anche i quadrilateri concavi:

- Diagonali congruenti e il prolungamento di una taglia l'altra nel punto medio, fig.8.
- Diagonali congruenti e il prolungamento di una taglia l'altra non nel punto medio, fig.9.

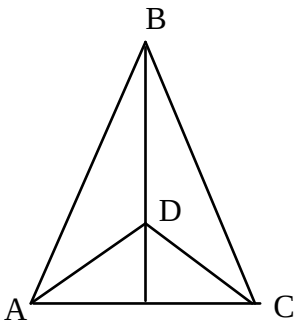


fig.8

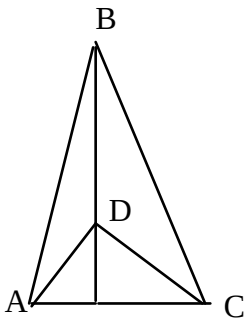


fig:9

Lasciamo al lettore il completamento della ricerca.

La cosa interessante è che **tutti** questi quadrilateri con le **diagonali perpendicolari** hanno la **stessa formula per il calcolo della misura dell'area**:

dove A indica la misura dell'area e d_1 e d_2 la misura delle lunghezze delle diagonali.

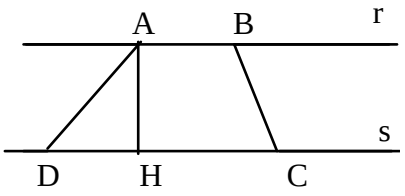
10 – L'altezza nei quadrilateri

10. 1 Incominciamo con i **trapezi.**

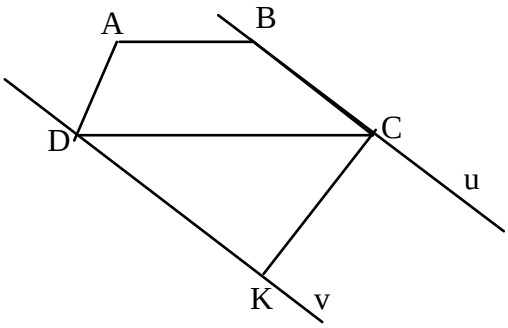
Abbiamo visto che, data una striscia (r,s), è immediato costruire un trapezio ABCD. L'altezza AH della striscia, è l'altezza del trapezio relativa alla base DC.

È immediato anche il **cammino inverso.**

Un trapezio ABCD, per la sua stessa definizione (quadrilatero con due lati paralleli), individua una striscia (r,s) che contiene il trapezio e i cui vertici si distribuiscono sui due lati della striscia.



L’altezza AH della striscia è l’altezza del trapezio relativa ad uno dei due lati paralleli scelto come base. Quindi il trapezio ha **almeno una altezza.**



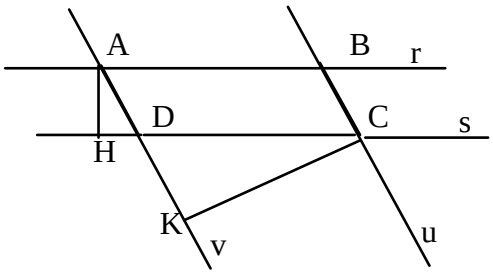
Ne avrà un’altra?

Scegliamo come base BC. La striscia (u,v) contiene tutto il trapezio, ma il vertice A non sta su un lato della striscia. La sua altezza CK **non** è altezza del trapezio. Un fenomeno analogo succede se prendiamo AD come base.

10. 2 **Parallelogrammi**

Comunque lo si definisca un parallelogramma è un quadrilatero con due coppie di lati paralleli.

Ciascuna coppia dà origine ad una striscia che contiene tutto il parallelogramma i cui vertici si distribuiscono sui due lati della striscia.



Le altezze delle strisce, AH e CK nel disegno, sono le altezze del parallelogramma.

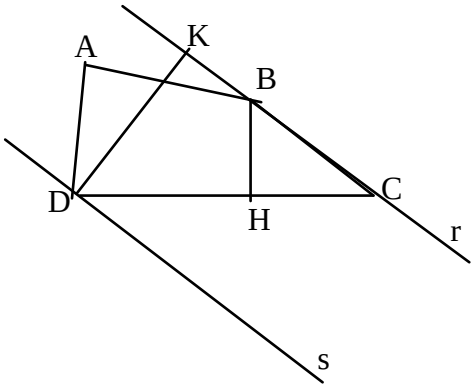
Una, AH, relativa alla base DC e l’altra , CK, relativa alla base AD.

Nel parallelogramma generico, o romboide, **le due altezze** sono diverse come nel rettangolo; sono invece congruenti nel rombo e nel quadrato.

10. 3 **Quadrilatero generico**

Con il termine “**generico**” indichiamo un quadrilatero convesso che non possiede nessuna coppia di lati paralleli, come quello in figura.

Di strisce che contengono tutto il quadrilatero ce ne sono quattro (una è disegnata in figura), ma in nessuna di esse i 4 vertici del quadrilatero stanno **tutti** sui lati della striscia.



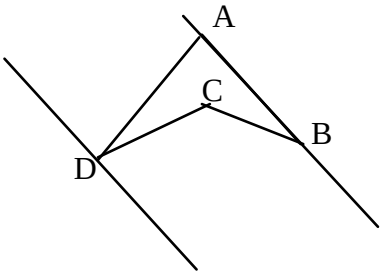
Quindi un **quadrilatero generico non ha altezze**.

Tuttavia si può sempre parlare di **distanza** di un vertice dal lato opposto.

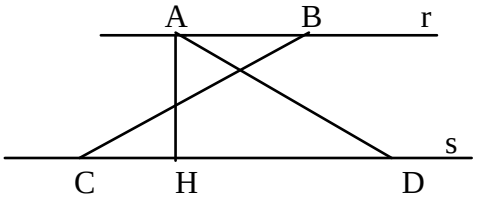
In figura abbiamo disegnato la distanza BH del vertice B dal lato DC. Il segmento DK è la distanza del vertice D dal lato CB e coincide con l'altezza della striscia (r,s), ma **non** è un'altezza del quadrilatero.

10. 4 **Quadrilateri concavi**

Normalmente un quadrilatero concavo non ha altezze per il motivo descritto nel numero precedente.



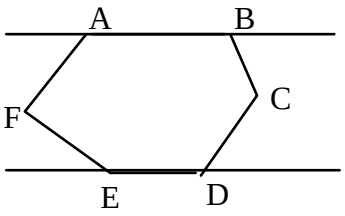
Tuttavia un quadrilatero concavo intrecciato come quello in figura nel quale i lati AB e CD sono paralleli, ha un'altezza, AH, quella della striscia (r,s) che contiene tutto il quadrilatero i cui vertici si distribuiscono tutti sui lati della striscia.



10. 5 **Altri poligoni**

Sono quelli con un numero di lati **maggiore di quattro**: pentagoni, esagoni, ettagoni, ecc. .

Nessuno di essi ha un'altezza perché nessuna striscia che contiene tutto il poligono è tale che tutti i vertici del poligono si distribuiscono sui lati della striscia.



11 – Consiglio bibliografico.

C. Colombo Bozzolo e A. Costa (a cura di), Nel mondo della geometria, volume 3, Erikson 2004 (dedicato ai poligoni).

AA.VV, Fare matematica con Cabri nel primo ciclo scolastico, Quaderno didattico N. 19. Interessanti attività sui quadrilateri con Cabri.

AA.VV, I modelli dinamici: costruzioni di immagini mentali e avvio alla deduzione, IMSI, novembre – dicembre 2003

AA.VV, Parallelogrammi inscritti in quadrilateri, Parte prima, IMSI, settembre 2007; parte seconda, gennaio 2008

Esercizi

1. Dare la definizione di vertici opposti in un quadrilatero.

2. Dare la definizione di lati opposti in un quadrilatero.

3. Può esistere un quadrilatero con tre soli lati congruenti?

E un trapezio con tre soli lati congruenti? Se la risposta è sì , disegnarli.

4. Un trapezio rettangolo può essere isoscele? Perché?

5. Dimostrare che se il trapezio isoscele ABCD ha un asse di simmetria, allora ha congruenti gli angoli alle basi, i lati AD e BC e le diagonali.

6. Dimostrare che le diagonali di un parallelogramma si tagliano scambievolmente a metà.

7. È corretto dire che un parallelogramma è un quadrilatero con i lati a due a due paralleli?

8. Ottenere tutti i parallelogrammi come intersezione di due strisce

9. Un quadrilatero con tre lati congruenti e due angoli retti è necessariamente un quadrato?

CAPITOLO NONO

GUARDIAMO DALL'ALTO: IL MONDO DEI POLIGONI

1. Introduzione

Dopo aver affrontato le due famiglie più note dei poligoni, quella dei triangoli e quella dei quadrilateri, incominciamo lo studio dei poligoni in generale. Sarà uno studio breve anche perché nelle attività in classe non si parla molto dei poligoni in generale.

Etimologicamente la parola "poligono" significa "con molti angoli", ma non è questo il significato che ora si dà a questo termine.

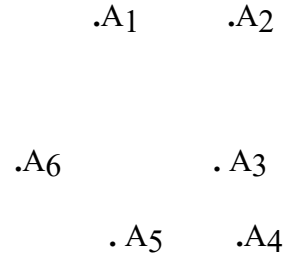
Al concetto di poligono sono legati altri concetti come quello di "spezzata" e di "poligonale" con le solite distinzioni di "semplice o non semplice" e di "chiusa e aperta". Ci sono autori che distinguono le spezzate dalle poligonali e altri che le identificano. Per qualcuno una poligonale chiusa è un poligono, per altri no. Quando si legge un libro di testo bisogna sempre accertare il significato attribuito a questi termini.

Noi seguiremo la falsariga di quanto abbiamo detto sulle due famiglie già esaminate.

2. Le varie definizioni

Una prima definizione mette in risalto lo "**scheletro**" del poligono.

Definizione 1: Chiamiamo poligono di n vertici la ennupla ordinata $A_1, A_2, \ldots A_n$ di punti complanari a tre a tre non allineati.

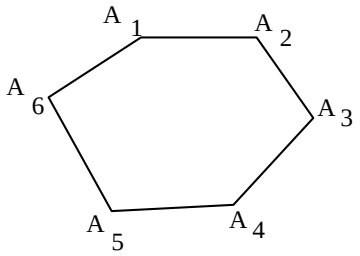


È la definizione più semplice e più economica perché fa entrare in gioco solo i concetti primitivi di punto e di retta. E' anche la più "povera" che dovrà essere integrata con l'introduzione di nuovi elementi se vogliamo, per esempio, calcolare perimetro e area del poligono.

Una seconda definizione che mette in risalto "l'intelaiatura", la "nervatura" del poligono è la seguente

Definizione 2: Data, nel piano, una ennupla ordinata di punti $A_1, A_2, \ldots A_n$ a tre a tre non allineati chiamiamo poligono l'insieme punti $A_1, A_2, \ldots A_n$ e dei segmenti

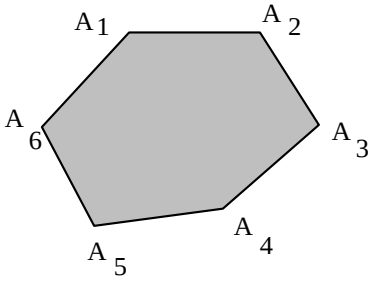
$A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n, A_nA_1$.



L'occhio incomincia ad essere appagato ed è possibile calcolare il perimetro ma non ancora l'area del poligono.

Per avere un poligono "**pieno**", il "corpo" ecco la nuova definizione

Definizione 3: Data, nel piano, una ennupla ordinata di punti $A_1, A_2, \ldots A_n$ a tre a tre non allineati, se la retta individuata da due vertici consecutivi lascia tutti gli altri nello stesso semipiano, chiamiamo **poligono convesso** l'intersezione di tutti questi semipiani.

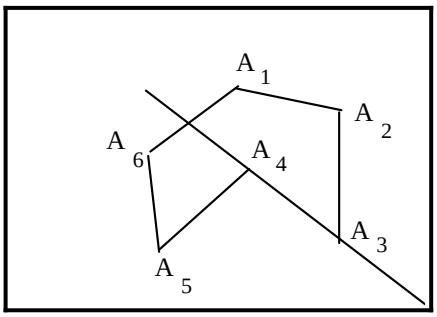


Qui il **poligono è pieno** perché abbiamo vertici, lati e **regione poligonale**

Il poligono della **definizione 3** è una figura convessa, nel senso della definizione data nel capitolo quattro, essendo intersezione di insiemi convessi.

Naturalmente ci sono anche poligoni non convessi o concavi.

Ricalcando la **definizione 3** possiamo dire che sono quelli nei quali c'è almeno una retta, che unisce due vertici consecutivi, che lascia i restanti vertici un po' in un semipiano e un po' nell'altro.



Osservazioni.

Potremmo introdurre anche la distinzione fra poligoni semplici e poligoni non semplici, ma non è il caso di farlo.

I nomi dei poligoni sono basati sul **numero degli angoli**: **triangolo, quadrangolo, pentagono, esagono, ettagono, ecc.**

Come già triangoli e quadrilateri anche i rimanenti poligoni possono avere o no assi di simmetria.

Il **numero massimo di assi di simmetria**, per ciascuna classe di poligoni, **è posseduto dal poligono regolare.**

3. Diagonali

La definizione è quella ben nota: **diagonale di un poligono è il segmento che unisce due vertici non consecutivi**.

Una prima interessante attività, per bambini e insegnanti, è quella di scrivere e "leggere" la tabella delle diagonali.

Riporto dall'articolo "Matematica e creatività" di Ferrari - Sforzini, Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, vol 18A, n°1

« L'attività sulle diagonali è sfociata nella costruzione della tabella scritta, con il calcolatore, da una bambina a casa.

FIGURA	**N. DEI LATI**	**N.DIAGONALI**
TRIANGOLO	3	0
QUADRATO	4	2
PENTAGONO	5	5
ESAGONO	6	9
ETTAGONO	7	14
OTTAGONO	8	20
ENNAGONO	9	27
DECAGONO	10	35
UNDECAGONO	11	44
DODECAGONO	12	54

Sulla tabella i bambini non hanno avuto difficoltà a "leggere" come aumenta il numero delle diagonali all'aumentare del numero dei lati del poligono. Dopo il primo scatto di 2, nel passare dal triangolo al quadrato, la sequenza dell'aumento del numero delle diagonali è +3, +4, +5, ecc.

Sulla tabella si possono fare anche altre osservazioni.

- Il pentagono è un poligono di "confine" perché separa i poligoni nei quali il numero dei lati è maggiore del numero delle diagonali da quelli per i quali si verifica la situazione opposta.
- A partire dal pentagono, nel quale c'è parità fra numero dei lati e delle diagonali, per ogni aumento di 2 del numero dei lati, il numero delle diagonali diventa doppio (ettagono), triplo (nonagono), quadruplo (undecagono).
- Se si vuole andare un po' più nel fine, e nel riposto, si può anche osservare che il rapporto fra numero delle diagonali e numero dei lati nel pentagono è 1 e nell'ettagono è 2. La media aritmetica di questi due rapporti è 1,5. L'esagono ha 6 lati e 6 è la media aritmetica fra 5 e 7. Ebbene il rapporto fra numero delle diagonali e numero dei lati nell'esagono è 1,5.

  Procedendo si trova che questo rapporto, nell'ottagono, è 2,5; nel decagono è 3,5; nel dodecagono è 4,5.

Come si vede si tratta di regolarità non essenziali, forse, alla comprensione dei concetti matematici, ma la cui scoperta rivela l'armonia profonda della matematica.

Alla tabella vista, può essere affiancata un'altra tabella come quella riportata qui, che mette in risalto il numero di diagonali "nuove" che partono dai singoli vertici e, quindi, la strategia da seguire per non commettere errori».

numero vertici	numero delle diagonali "nuove" per ogni vertice											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
3	0	0	0									
4	1	1	0	0								
5	2	2	1	0	0							
6	3	3	2	1	0	0						
7	4	4	3	2	1	0	0					
8	5	5	4	3	2	1	0	0				
9	6	6	5	4	3	2	1	0	0			
10	7	7	6	5	4	3	2	1	0	0		
11	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	
12	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0

La strategia consiste nel partire da un vertice qualunque tracciando tutte le possibili diagonali.

Se il poligono ha n vertici, dal primo scelto partono (n-3) diagonali. Si sceglie, poi, il vertice consecutivo. Da esso partono altre (n-3) diagonali "nuove".

Proseguendo il numero delle diagonali nuove diminuisce ogni volta di uno fino ad arrivare a zero.

La prima tabella descrive come varia il numero delle diagonali al variare del numero dei lati del poligono. Tutto può essere desunto dalla formula che fornisce il numero delle diagonali di un poligono di n lati.

Per trovare la formula dobbiamo considerare

- il numero n dei vertici
- il numero delle diagonali che partono da ogni vertice

- il fatto che una diagonale che unisce A_i con A_{i+2} unisce anche A_{i+2} con A_i $(1 \leq i \leq n)$.

Siccome da ogni vertice A_i partono (n-3) diagonali perché da A_i **non** possiamo mandare diagonali né ad A_i , né ad A_{i+1} , né ad A_{i-1} , allora la formula è:

$$\mathbf{N = \frac{n(n-3)}{2}}$$

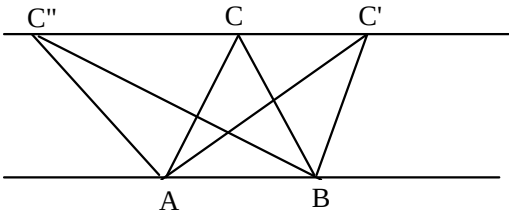
4. Problemi di massimo e di minimo

Quelli di massimo e di minimo sono problemi riguardanti i poligoni nei quali si ricerca, sotto determinate condizioni, quale poligono ha perimetro minimo (o massimo) o area minima (o massima).

Si tratta di problemi interessanti studiati dall'antichità fino a tempi recenti. Alcuni sono di facile risoluzione, altri no. Noi daremo solo qualche risultato.

a. Fra tutti i triangoli di cui è assegnata la misura di un lato (base) e la misura dell'area, quello isoscele ha il perimetro minimo.

Si può intuire il risultato osservando la figura e facendo le necessarie misurazioni.



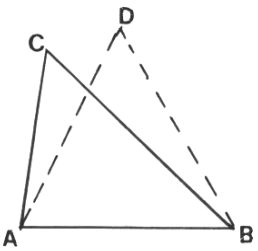
b. Fra tutti i triangoli isoperimetrici di cui è fissato un lato, quello isoscele ha area massima.

c. Fra tutti i triangoli isoperimetrici quello equilatero ha area massima.

Sia, infatti, il triangolo ABC di assegnato perimetro p che ha area massima (e che supponiamo esistente).

Supponiamo, per assurdo, che non sia equilatero. Quindi AB≠AC.

Fissiamo il lato AB. Fra tutti i triangoli isoperimetrici, per quanto detto al punto 2., quello isoscele ha area massima. Quindi esiste un punto D tale che il triangolo ABD è isoscele ed ha area massima, cioè maggiore dell' area di ABC. **Assurdo.** Quindi il triangolo di area massima non può avere due lati diversi. Perciò è equilatero.



d. Fra tutti i triangoli di assegnata area quello equilatero ha il perimetro minimo.

e. Fra tutti i quadrilateri isoperimetrici il quadrato è quello che ha area massima.

Anche i bambini possono intuire il risultato osservando ed integrando una tabella come quella che segue:

«

Rettangoli	Misura in cm delle lunghezze del			Misura in cm^2
	lato a	lato b	Perimetro	Area
R_1	13	1	28	13
R_2	12	2	28	24
R_3	11	3	28	33
R_4	10,5	3,5	28	36,75
R_5	10	4	28	40
R_6	9,5	4,5	28	42,75
R_7	9	5	28	45
R_8	8,5	5,5	28	46,75
R_9	8	6	28	48
R_{10}	7	7	28	49

Osservando l'ultima colonna, si nota che i 10 rettangoli, pur avendo uguale perimetro, hanno aree diverse. Fra essi, quello che ha **area maggiore è il quadrato.**

f. **Teorema di Zenodoro** (vissuto fra il 200 e il 100 a.C.)

Fra tutti i poligoni isoperimetrici di n lati quello regolare ha area massima.

5 - Esercizi

1. Dare la definizione di vertici consecutivi e di lati consecutivi in un poligono.
2. Dare una possibile definizione di vertice e lato opposti in un poligono di n lati con n dispari.
3. Dare una possibile definizione di vertice e lato opposti in un poligono di n lati con n pari.
4. Trovare tutti i poligoni che hanno il numero delle diagonali uguale al numero dei lati.
5. Come si chiama il poligono con 15 lati?

CAPITOLO DECIMO

CIRCONFERENZA E CERCHIO

1 - Introduzione

Circonferenza e cerchio sono figure notissime.

Le "cose" a forma di circonferenza e di cerchio sono importantissimi nella tecnologia e nella nostra vita quotidiana. Basta pensare alle automobili, alle moto e alle biciclette.

L'invenzione della ruota è stata senz'altro una delle più grandi dell'umanità.

La terminologia su cerchio e circonferenza non è univoca.

Per **Euclide** (def. 15, libro 1°) " Cerchio è una figura compresa da una sola linea (la quale si dice periferia) tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto dentro al figura, sono uguali fra loro".

"Quel punto si dice centro del cerchio" (def. 16).

Euclide usa spesso la parola cerchio anche per indicare la sua "periferia", cioè quella che noi chiamiamo circonferenza.

Nella tradizione scolastica italiana usiamo di solito "**circonferenza**" per indicare la figura "vuota" cioè il contorno, mentre "**cerchio**" designa la figura "piena".

In matematica si preferisce usare rispettivamente "**cerchio**" e "**disco**".

Questa terminologia è più vicina al linguaggio comune. I bambini giocano a "cerchietti" e non a "circonferenziette"; le ruote hanno i "cerchioni" e non i " circonferenzioni".

Noi compriamo un "disco" di musica e non un "cerchio " di musica, vediamo il "disco" solare e non il "cerchio" solare.

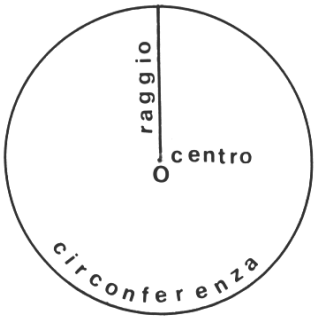
Per non creare pericoli di confusione e drammi di coscienza noi continueremo a parlare di circonferenze e di cerchi.

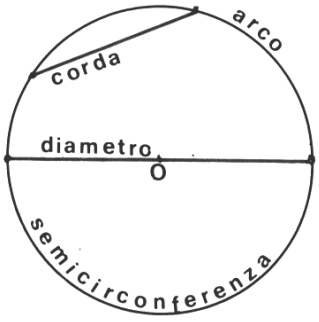
2 – Le definizioni

Usando il concetto di **distanza** possiamo dare la seguente

Definizione 1: Fissato un punto O ed un numero positivo r, si dice **circonferenza** di centro O e raggio r l'insieme dei punti del piano tali che **d(OP) = r**.

E' ben nota la terminologia legata alla circonferenza come si può vedere nella figura:





Le definizioni degli altri termini che compaiono nella figura sono le seguenti.

Raggio: distanza del centro da un punto qualunque della circonferenza.

Corda: segmento che unisce due punti della circonferenza.

Diametro: corda che passa per il centro.

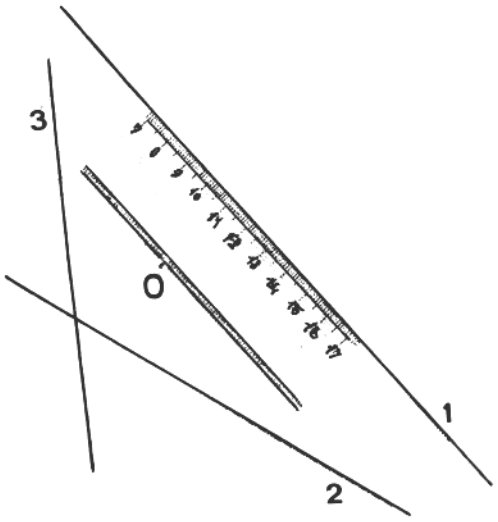
Arco: parte di circonferenza compresa fra due punti.

Semicirconferenza: arco i cui estremi stanno su un diametro.

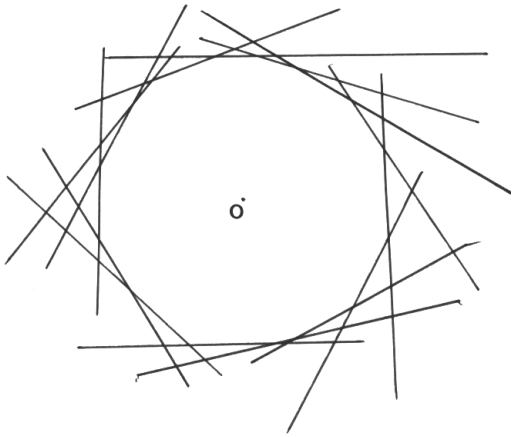
Lo strumento principe per disegnare una circonferenza è il compasso.

Una circonferenza, però, può essere costruita usando una semplice riga. Basta seguire queste istruzioni.

1. Disegna un punto, che in figura è detto O, all'incirca in mezzo al foglio.
2. Prendi una riga e appoggia uno dei suoi due lati più lunghi al punto che hai disegnato: tieni ben ferma la riga (la graduazione della riga non serve; si può quindi usare una qualsiasi striscia rigida a lati paralleli).
3. Fai scorrere la matita lungo tutto il lato opposto a quello passante per O e traccia così una retta (nella figura la retta **1.**)
4. Cambia la direzione della riga, tenendola sempre a contatto col punto O che hai disegnato e traccia una nuova retta colla matita (nella figura la retta **2**).
5. Cambia ancora direzione e traccia ancora una retta…ancora una…ancora una…Continua così fino a che ne hai voglia, tracciando delle rette ben chiare e distinte le una dalle altre.



Dopo aver tracciato un po' di segmenti incomincerà a delinearsi una circonferenza.



Ognuna delle rette tracciate è una tangente alla circonferenza. Un solo punto di ognuna contribuisce alla formazione della circonferenza: **il punto di tangenza.**

Il punto O segnato è il **centro**, la larghezza della riga è il **raggio** e la circonferenza nasce come **inviluppo delle tangenti.**

(Si vedano queste attività sul Quaderno didattico N. 15 -16, del Centro Morin, articolo di C. Sitia "Alla scoperta del cerchio)

Utilizzando il concetto di distanza possiamo dare la definizione di cerchio.

Definizione 2: Si dice cerchio di centro O e raggio r l'insieme dei punti P del piano tali che $d(OP) \leq r$.

La circonferenza è una linea chiusa.

La regione interna insieme ai punti della circonferenza, forma il **cerchio**, come vedi nella figura 7.

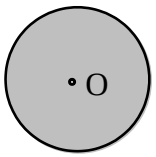


fig.7

I punti del cerchio hanno tutti una distanza da O minore o uguale al raggio.

Questa è la caratteristica del cerchio.

E' ben nota la terminologia legata al cerchio come si può vedere nelle figure:

Nota. *In ciascuna figura il nome è scritto in una sola delle due parti ma, evidentemente, vale anche per l'altra parte.*

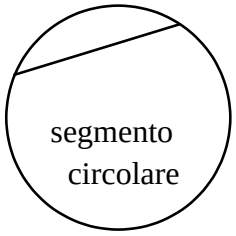


fig.8

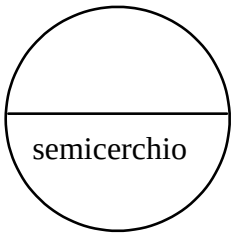


fig.9

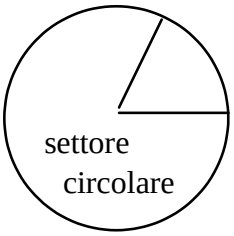


fig.10

Ed ecco le definizioni:

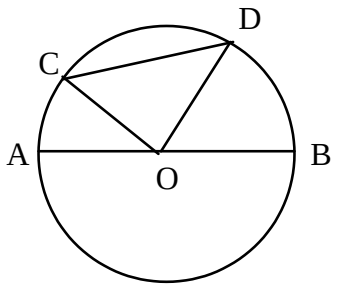
Semicerchio: ognuna delle due parti in cui un cerchio è diviso da un diametro.

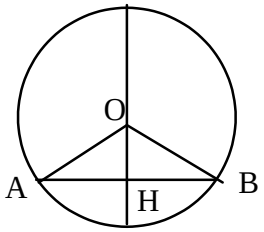
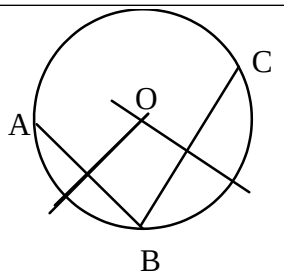
Settore circolare: parte di cerchio delimitata da due raggi e dall'arco da essi individuato.

Segmento circolare: parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco individuato dai suoi estremi.

3 – Alcune proprietà di circonferenza e cerchio

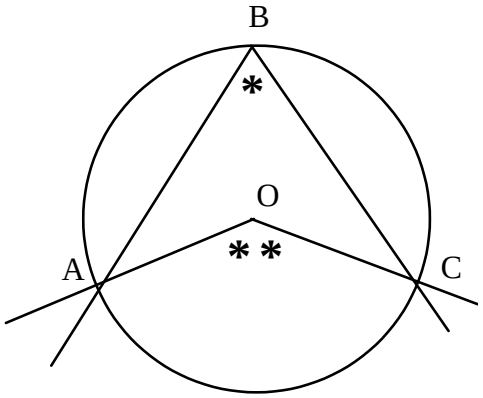
Ci sono alcune proprietà che riguardano queste figure in se stesse, altre che riguardano i loro rapporti con una retta ed altre ancora che riguardano i rapporti fra due circonferenze. Illustriamo brevemente alcune delle prime proprietà.

3.1 In ogni circonferenza il diametro è maggiore di qualsiasi corda. Basta ricordare che il diametro è il doppio del raggio ed applicare la disuguaglianza triangolare al triangolo OCD.	

3.2 In una circonferenza il diametro perpendicolare ad una corda la divide a metà; viceversa il diametro che divide a metà una corda è ad essa perpendicolare. Basta ricordare le proprietà di altezze e mediane in un triangolo isoscele (AOB).	
3.3 Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza. Questa proprietà è chiamata « postulato di Bolyai Farkas» ed è logicamente equivalente al postulato della unicità della parallela.	

3.4 Si chiama **angolo al centro** ogni angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.

Si chiama **angolo alla circonferenza** un angolo convesso avente il **vertice sulla circonferenza** e **i due lati secanti** la circonferenza, oppure uno **secante e l'altro tangente.**



La proprietà principale è la seguente:

ogni angolo alla circonferenza è congruente alla metà del corrispondente angolo al centro. Ci accontentiamo della figura.

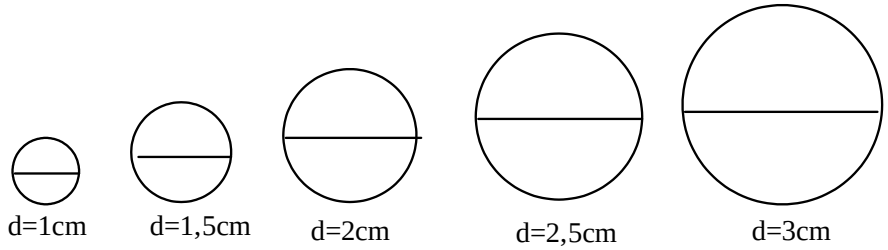
4 – Lunghezza della circonferenza

Questo paragrafo non rientra strettamente nell'argomento del corso, ma ci conviene ugualmente dire qualcosa.

Il concetto di lunghezza è associato a quello di segmento. Ogni segmento ha una lunghezza e segmenti congruenti hanno la stessa lunghezza. Possiamo, però, calcolare anche la lunghezza di linee curve che non sono segmenti; prima, però, dobbiamo "**rettificarle**" cioè trasformarle in segmenti. Anche per la circonferenza dobbiamo agire nello stesso modo e parleremo allora di "circonferenza rettificata".

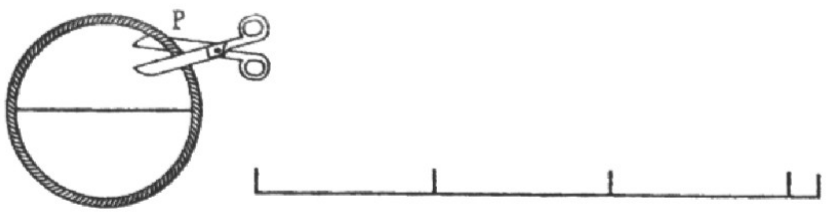
Quando si calcola la lunghezza della circonferenza non si usano più le unità di misura di lunghezza, come il metro o il centimetro, ma la lunghezza del raggio o del diametro. E' una rottura del "contratto didattico" che deve essere giustificata ai bambini. Un modo è quello che ora illustro e che ho preso di peso dal sussidiario "Base" per la quinta elementare. Il paragrafo, quindi, assume anche un carattere didattico.

« Se osservi queste circonferenze ti accorgi subito che, **aumentando la lunghezza del diametro, aumenta anche la lunghezza della circonferenza.**



Possiamo dire che la lunghezza della circonferenza **dipende** da quella del diametro e quindi possiamo pensare, conoscendo la lunghezza del diametro, di calcolare quella della circonferenza. Cerchiamo, quindi, di calcolare la lunghezza della circonferenza, prendendo come unità di misura il diametro.

- Un primo modo per calcolare la lunghezza della circonferenza consiste nel prendere una cordicella, farla aderire con precisione alla circonferenza di cui vuoi calcolare la lunghezza, dopo aver fissato un punto P che sarà la partenza e l'arrivo.

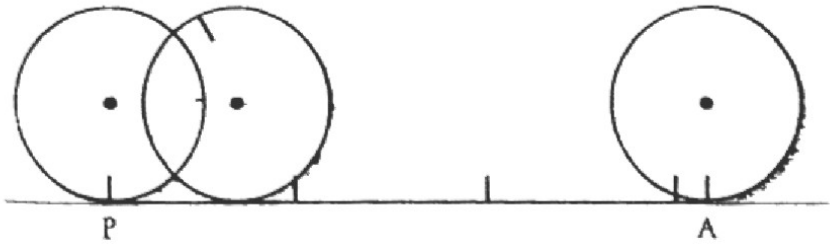


- Dopo aver tagliato la cordicella, distendila per bene e calcola la lunghezza del segmento ottenuto, usando il diametro come unità di misura. Anche se questo calcolo non è molto preciso, vedi subito che ci vogliono 3 diametri e un pezzetto per coprire la circonferenza.

  Se indichiamo con **C** la lunghezza della circonferenza e con **d** quella del diametro, possiamo scrivere:

  $$\mathbf{3} \times \mathbf{d} < \mathbf{C} < \mathbf{4} \times \mathbf{d}$$

- Un altro modo per calcolare la lunghezza di una circonferenza è questo. Procurati un cerchio di cartone e fissa su di esso un punto. Fai ruotare il cerchio, lungo un segmento, incominciando dal punto fino a ritornare su di esso come vedi nella figura.



Il segmento PA, così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza e viene chiamato **circonferenza rettificata.**

Se calcoli la lunghezza del segmento, usando il diametro come unità di misura, vedi subito che, come prima, puoi scrivere:

$$\mathbf{3} \times \mathbf{d} < \mathbf{C} < \mathbf{4} \times \mathbf{d}$$

Se, con un po' di pazienza, dividi il diametro in 10 parti congruenti cioè trovi i decimi, allora puoi scoprire che C è compresa fra 3 più 1/10 di diametro e 3 più 2/10 di diametro.

Quindi scriviamo

$$\mathbf{3{,}1} \times \mathbf{d} < \mathbf{C} < \mathbf{3{,}2} \times \mathbf{d}$$

Usando anche i centesimi di diametro, potremmo trovare che:

$$\mathbf{3{,}14} \times \mathbf{d} < \mathbf{C} < \mathbf{3{,}15} \times \mathbf{d}$$

Come vedi a ogni passo troviamo una misura più precisa.

Potremmo continuare senza mai finire e trovare sempre nuove cifre dopo la virgola. Con i moderni calcolatori ne hanno trovate più di un miliardo.

A questo problema di determinare quante volte il diametro "sta" nella circonferenza, gli uomini si sono interessati fin dall'antichità.

Per i **Babilonesi** e gli **Ebrei**, il diametro "stava" tre volte nella circonferenza e quindi il rapporto tra circonferenza e diametro era **3.**

Per i **matematici egizi** questo rapporto era **3,16**. Il grande matematico greco Archimede aveva trovato, invece questa formula:

Al numero che misura quante volte il diametro "sta" nella circonferenza, cioè alla misura della lunghezza della circonferenza rispetto alla lunghezza del diametro, i matematici hanno assegnato il simbolo $\boldsymbol{\pi}$ che si legge **pi-greco**.

Questo è il numero più famoso della Storia della Matematica e ha infinite cifre dopo la virgola.

Adesso ti scriviamo le prime quattro cifre dopo la virgola:

$$\boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{3{,}1415}$$

Il simbolo $\sim$ sta ad indicare che 3,1415 è un **valore approssimato** (per difetto) del numero π. Per le nostre necessità ci accontentiamo del valore di π approssimato ai centesimi. Per questa scelta, e sapendo come stanno le cose, scriviamo:

Ora, finalmente, possiamo scrivere la formula della circonferenza. Indichiamo con **C** la lunghezza della circonferenza e con **d** quella del suo diametro.

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{d}$$

Siccome d = 2r, dove r è la lunghezza del raggio, possiamo anche scrivere questa formula:

$$\mathbf{C} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{r}$$

Come vedi, basta conoscere la lunghezza del diametro o del raggio per calcolare la lunghezza della circonferenza. Per fare i nostri calcoli prendiamo sempre $\pi = 3{,}14$.

Quindi useremo le formule:

»

Osserviamo esplicitamente che queste sono le formule della **lunghezza** della circonferenza.

La formula della **misura della lunghezza** della circonferenza , essendo **1** la misura di **r**, cioè prendendo **r come unità di misura**, è

$$C = 2\pi$$

Osservazione

Il rapporto costante tra lunghezza della circonferenza e lunghezza del diametro è stato "battezzato" π, iniziale della parola greca “periferia (circonferenza) nel 1706 dal matematico inglese William Jones. Adottato da Eulero nel 1737, da allora è entrato nell’uso comune.

Nel 1767 J.H. Lambert (1728-1777) dimostrò che **π è irrazionale** e C.L.F. Lindemann (1852-1939), nel 1882, dimostrò che **π è trascendente**, cioè non può essere soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi. La conseguenza immediata é che **non si può costruire un segmento di misura π con riga e compasso**.

5 - ESERCIZI

1. Per due punti quante circonferenze complanari passano? Perché?
2. Una retta può intersecare una circonferenza in tre punti?
3. Dare la definizione di retta esterna, tangente, secante di una curva.
4. Disegna un cerchio. Se sulla circonferenza segni un solo punto A non puoi tracciare nessuna corda; se ne segni due, A e B, puoi tracciare una corda; se ne segni tre, A, B e C… continua tu completando la tabella. Nella seconda colonna osservi qualche regolarità?

Punti della circonferenza	Numero corde
1	……
2	……
3	……
4	……
…….	……

CAPITOLO UNDICESIMO

IL MONDO DEI POLIGONI REGOLARI

1. Introduzione

I poligoni regolari erano un piatto forte della scuola elementare anche per l'apparizione di quel termine un po' esotico "apotema" e dei "mitici" numeri fissi sull'apprendimento dei quali i programmi del 1985 dicevano di "non insistere troppo". Nei programmi successivi (2004 e 2007) non vi è nessun accenno, neppure implicito, ai poligoni regolari. Ne facciamo ugualmente una breve presentazione sia perché essi sono interessanti per la cultura dell'insegnante, sia perché, seppure non previsti dai programmi, non è proibito fare qualcosa a scuola.

Prima , però, di arrivare alla presentazione dei poligoni regolari dobbiamo fare una breve tappa sui rapporti poligoni - circonferenze cioè sul problema della loro inscrivibilità e circoscrivibilità.

2. Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

2.1 Incominciamo con due definizioni

Le definizione che ora riportiamo si trovano, sostanzialmente identiche, all'inizio del Libro IV degli Elementi di Euclide.

Definizione 1: Un **poligono** i cui vertici appartengono ad una medesima circonferenza si dice ad essa **inscritto** e la circonferenza si dice **circoscritta** al poligono (Fig.1).

Definizione 2: Un poligono i cui lati sono tangenti ad una medesima circonferenza si dice ad essa **circoscritto** e la circonferenza dicesi **inscritta** nel poligono (Fig.2).

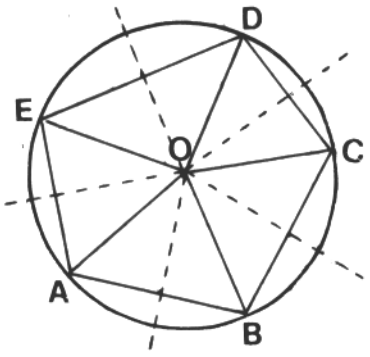


Fig.1

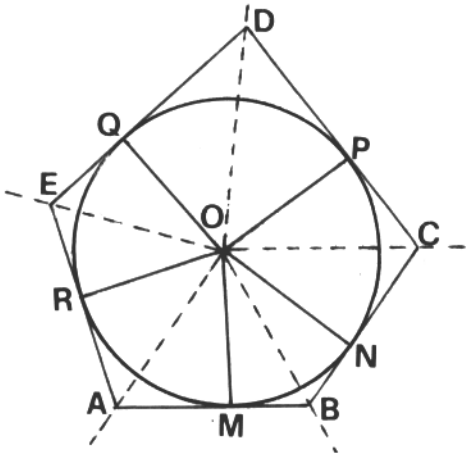


Fig.2

Il raggio della circonferenza circoscritta ad un poligono si dice il **raggio** del poligono; il raggio della circonferenza inscritta in un poligono dicesi il suo **apotema.**

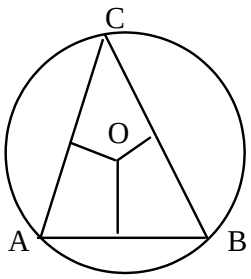
Come si vede, l' apotema (in greco significa abbassamento) non è una prerogativa dei poligoni regolari, ma dei poligoni circoscritti ad una circonferenza. L' apotema è sempre perpendicolare al lato del poligono circoscritto.

Un poligono per cui **esiste** una circonferenza circoscritta oppure una circonferenza inscritta dicesi rispettivamente **inscrittibile** o **circoscrittibile**.

Il problema che nasce è di vedere se tutti i poligoni sono inscrittibili in una circonferenza e se tutti i poligoni sono circoscrittibili a una circonferenza; in caso contrario vedere a quali condizioni devono soddisfare. Noi esamineremo solo il caso dei triangoli e dei quadrilateri, per passare poi al caso dei poligoni regolari.

2.2 La situazione dei triangoli

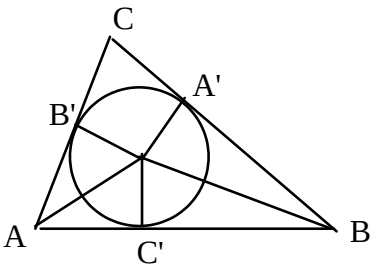
Abbiamo visto che per tre punti non allineati passa sempre una e una sola circonferenza. Quindi ad **ogni triangolo si può sempre circoscrivere una circonferenza**.



Il suo centro è equidistante dai 3 vertici. Quindi è il **circocentro** del triangolo. Il nome di questo punto, punto d'incontro dei tre assi, deriva proprio da questo fatto.

Inoltre **ad ogni triangolo si può sempre inscrivere una circonferenza.**

Basta prendere la circonferenza che ha come centro l'**incentro,** punto d'incontro delle bisettrici, che è equidistante dai lati del triangolo.



Possiamo quindi concludere con il **Teorema 1 :**

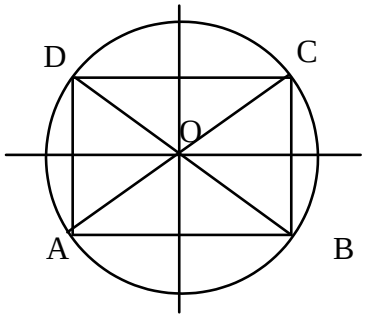
Ad ogni triangolo si può circoscrivere ed inscrivere una circonferenza.

2.3 La situazione dei quadrilateri

La situazione dei triangoli è irripetibile.

Nei quadrilateri la musica cambia.

Per esempio si vede che **un rettangolo è inscrittibile in una circonferenza**. Infatti il punto O, punto di incontro delle diagonali, è equidistante dai vertici A, B, C, D. Quindi è il centro di una circonferenza circoscritta al rettangolo.



Si noti che gli angoli opposti del rettangolo sono **supplementari** cioè la loro somma è uguale a due angoli retti.

È difficile immaginare una circonferenza inscritta dato che nessun punto del rettangolo è equidistante dai lati.

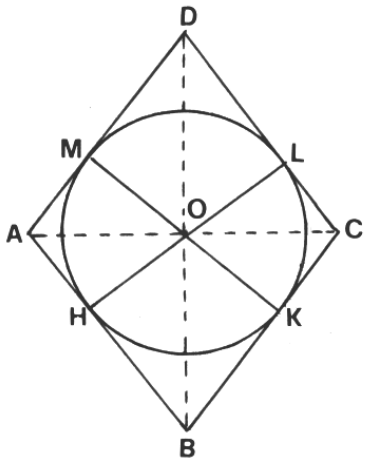
Per il **rombo** la situazione si rovescia.

Un rombo è circoscrittibile ad una circonferenza.

Basta pensare che i 4 triangoli rettangoli in cui le diagonali dividono il rombo ABCD sono congruenti. Quindi sono congruenti le altezze relative alle ipotenuse:

OL = OM = OH = OK.

Perciò **la circonferenza di centro O e raggio OL è inscritta nel rombo.**



Si noti che le somme delle lunghezze dei lati opposti sono uguali.

Come corollario si ha che il **quadrato**, essendo un rettangolo e un rombo, **è inscrittibile e circoscrittibile a una circonferenza.**

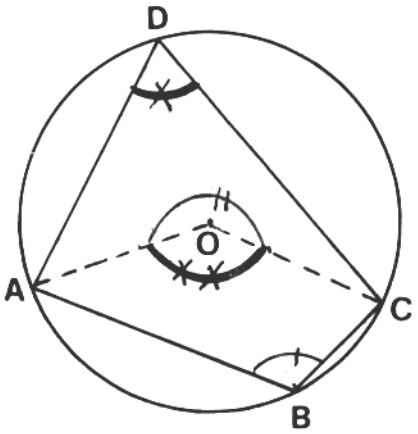
I problemi che ora ci poniamo sono i seguenti:

- esiste un criterio che ci assicura quando un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza?
- esiste un criterio che ci assicura quando un quadrilatero è circoscrittibile in una circonferenza?

La risposta è positiva in entrambi i casi. La enunciamo con due teoremi di cui, però, non diamo la dimostrazione.

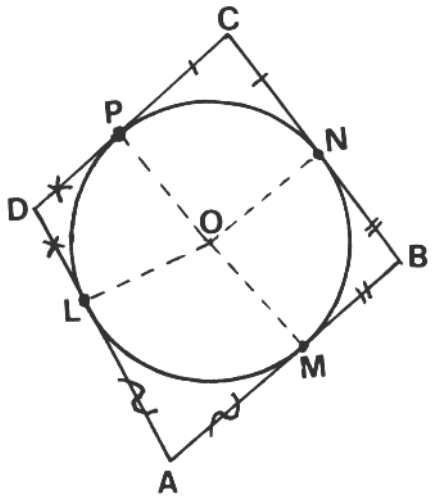
Teorema 2

Un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari.



Teorema 3

Un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza se e solo se le somme dei lati opposti sono congruenti.



Conseguenze

- Un parallelogramma generico non è né inscrittibile né circoscrittibile
- Un rettangolo non è circoscrittibile
- Un rombo non è inscrittibile
- Un quadrato è inscrittibile e circoscrittibile.

3 – Poligoni regolari

Dei poligoni regolari noi possiamo dare diverse definizioni, tutte fra loro equivalenti. La prima si ispira direttamente al libro IV degli Elementi di Euclide.

Definizione 3:

Un poligono si dice **regolare** quando **è equilatero ed equiangolo.**

Per ogni numero naturale $n \geq 3$ esiste il poligono regolare di n lati.

Alcuni di essi sono costruibili esattamente con riga e compasso come i poligoni con numero di lati $n = 2^m$ (cioè i poligoni con 4, 8, 16, 32,ecc… lati), ma anche i poligoni con n = 3, 5, 6, 10, 12, 15, 17,ecc…; altri, invece, non sono costruibili con riga e compasso, come i poligoni con n = 7, 9, 11, 13, 19,ecc. Di essi si può fare una costruzione approssimata.

Euclide ha fatto la costruzione del triangolo, del quadrato, del pentagono, dell'esagono e del pentadecagono.

È stato C.F. Gauss (1777 - 1855) a studiare a fondo il problema e a risolverlo completamente nel 1801.

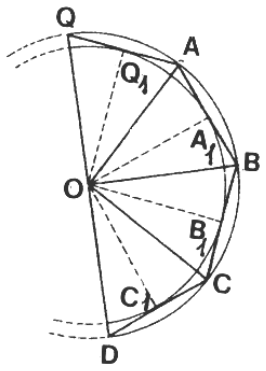
Il problema dei rapporti poligoni regolari - circonferenza è illustrato da questo

Teorema 4

Ogni poligono regolare è inscrittibile e circoscrittibile rispetto a due circonferenze concentriche.

La figura ci dà un'idea di come vanno le cose.

Il **centro O** delle due circonferenze è il centro del poligono; il raggio OA_1 della circonferenza inscritta è il **suo apotema**, mentre OA, raggio della circonferenza circoscritta, è il **raggio del poligono.**



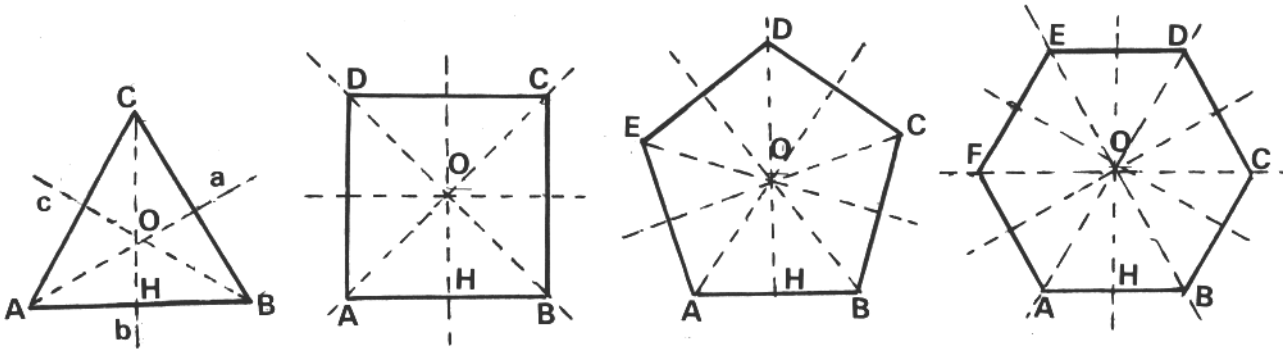
Abbiamo visto a suo tempo che un triangolo equilatero, che è anche equiangolo, cioè è un poligono regolare, ha tre assi di simmetria. Abbiamo visto anche che il quadrato, che è un quadrilatero regolare, ha quattro assi di simmetria. Questo fatto ci suggerisce un'altra definizione di poligono regolare.

Definizione 4: Un **poligono di n lati** ($n \geq 3$) è **regolare** se ha **n assi di simmetria.**

Questa definizione è diversa da quella precedente, ma ad essa equivalente. In altre parole: un poligono regolare secondo la definizione 3 lo è anche secondo la 4 e viceversa.

Gli assi di simmetria dei poligoni regolari hanno una diversa "posizione" a seconda che il numero dei lati sia pari o dispari.

Osserviamo, ora, questi quattro disegni di poligoni regolari:



- tutti gli assi passano per O che è il centro del poligono
- nel triangolo e nel pentagono (n dispari) gli assi passano per un vertice ed il punto medio del lato opposto; nel quadrato e nell'esagono (n pari) metà assi passano per una coppia di vertici opposti e l'altra metà per una coppia di lati opposti.

Questi fenomeni sono generali, cioè valgono per ogni $n \geq 3$.

Il teorema 4 suggerisce un'altra definizione di poligono regolare.

Definizione 5: Si dice **regolare** un poligono convesso A_1, A_2,… A_n, quando esiste una **rotazione** che manda **ogni vertice nel successivo**, cioè A_1 in A_2, A_2 in A_3,… A_{n-1} in A_n, A_n in A_1.

Il **centro della rotazione** si chiama **centro del poligono.**

Ci sono poligoni che sono trasformati in sé da una rotazione, come il rettangolo e il rombo, ma non sono regolari perché queste rotazioni non trasformano ogni vertice nel successivo, ma in un altro.

Un poligono regolare secondo la definizione 5 lo è anche secondo la 3 e la 4 e viceversa.

4 - Perimetro e area dei poligoni regolari

Per il perimetro non c'è niente di nuovo. Se n è il numero dei lati ed l la misura della lunghezza di un lato, la misura del perimetro è

Per quanto riguarda l'area, mi sembra sufficiente quanto ho scritto su "Base 5", ed.Elmedi e che qui riporto.

«Esaminiamo solo l'esagono come esempio che vale per tutti i poligoni regolari.

Come hai già visto e come puoi osservare nella fig.11, nell'esagono regolare vi è il centro O, punto di incontro degli assi di simmetria, e **l'apotema OH** perpendicolare al lato ED.

L'esagono è diviso in 6 triangoli equilateri congruenti. Quindi l'area dell'esagono è 6 volte l'area del triangolo DOE.

Siccome 6 volte la lunghezza di ED è il perimetro dell'esagono possiamo dire che l'area dell'esagono si ottiene moltiplicando il perimetro per l'apotema e dividendo il risultato per 2.

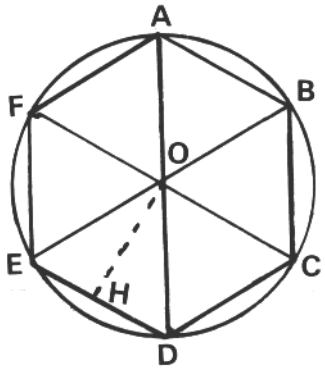


Fig.11

Indicando con **p** la misura del perimetro e con **h** la misura dell'apotema, la formula della misura dell'area dell'esagono regolare è:

oppure

Questa formula vale per tutti i poligoni regolari. Come vedi, per calcolare l'area di un poligono regolare basta conoscere il lato e il suo apotema.

In realtà basta conoscere solo il lato.

I matematici, infatti, hanno trovato che in un triangolo regolare, dividendo la misura dell'apotema per quella del lato, cioè eseguendo **h : l**, si ottiene sempre lo stesso numero, che viene chiamato **numero fisso.**

Lo stesso succede per il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare,…

Nella tabella riportiamo il numero fisso di alcuni poligoni regolari, fermandoci alla terza cifra decimale.

Moltiplicando la misura del lato per il numero fisso trovi la misura dell'apotema e puoi calcolare l'area.»

Poligono	h:l = n.fisso
Triangolo	0,288
Quadrato	0,500
Pentagono	0,688
Esagono	0,866
Ottagono	1,207

Osserviamo che questi numeri fissi sono tutti irrazionali tranne quello del quadrato che è razionale.

5 - Esercizi

1. Un triangolo con due assi di simmetria è regolare. Perché?
2. Come devono essere i due assi di simmetria di un quadrilatero perché esso sia regolare?
3. Quante sono le rotazioni che trasformano in sé un triangolo equilatero? E un quadrato? E un pentagono?
4. Un trapezio isoscele è inscrittibile in una circonferenza?

.

CAPITOLO DODICESIMO

POLIEDRI - SOLIDI ROTONDI

1 – Introduzione

Riporto alcune considerazioni tratte dal volumetto "*La geometria: dallo spazio al piano*" che contiene le lezioni del professor Vinicio Villani ad un corso di aggiornamento per insegnanti elementari e le esercitazioni curate da M. Sainati Nello e M. Sciolis Marino.

"L'esperienza geometrica concreta avviene nello spazio tridimensionale; proprio da ciò deriva l'importanza dello studio delle figure solide fin dai primi anni della scuola elementare. D'altra parte tutte le rappresentazioni grafiche, anche quelle di figure solide, vengono fatte nel piano; è allora essenziale saper passare dalle figure spaziali alle loro immagini piane e saper risalire dalle immagini piane alle figure rappresentate.

Le figure, che meglio si prestano per iniziare uno studio della geometria tridimensionale, sono indubbiamente i poliedri. Infatti una attività sui poliedri è significativa, dal punto di vista didattico, sotto molteplici aspetti:

a) l'osservazione di un modello concreto educa all'intuizione spaziale;

b) la sua descrizione verbale favorisce la formazione di un linguaggio ricco e preciso;

c) la sua rappresentazione mediante un disegno comporta abilità di tipo grafico e promuove un processo di schematizzazione della realtà;

d) la costruzione di modelli in cartoncino, in polistirolo, con cannucce da bibita,… consente di finalizzare attività di tipo manipolativo alla realizzazione di un progetto organico;

e) il riconoscimento di forme geometriche nella natura, nell'architettura, nelle realizzazioni della tecnica ha una notevole valenza interdisciplinare."

2 – Poliedri: la definizione

La definizione di poliedro non è semplice. Di solito i libri di testo iniziano con alcune considerazioni al termine delle quali enunciano la definizione di poliedro. Lo facciamo anche noi.

Consideriamo un **numero finito** di piani e le intersezioni dei semispazi che hanno questi piani come bordi. Si possono presentare situazioni molto diverse:

- L'intersezione può essere l'insieme vuoto;
- L'intersezione può essere ridotta ad un solo punto;

- L’intersezione può essere ridotta ad una retta;
- L’intersezione può essere una figura piana;
- L’intersezione può essere una regione illimitata dello spazio;
- L’intersezione può essere una regione limitata dello spazio.

In ogni caso l’intersezione sarà sempre una **regione convessa** perché intersezione di semispazi che sono figure convesse.

Notiamo che nel fare le intersezioni può accadere che un semispazio risulti **inutile**, nel senso che esso contiene già l’intersezione di tutti gli altri. Pensiamo, per fare un esempio, ad un cubo che nasce dalla intersezione di 6 semispazi. Consideriamo, ora, un piano parallelo ad una faccia del cubo e che non tagli il cubo. Questo piano determina due semispazi uno dei quali contiene il cubo. Facendo l’intersezione del cubo con questo semispazio otteniamo esattamente il cubo. Il semispazio considerato, quindi, è inutile, non dà nessun apporto alla definizione di cubo. Nel fare la intersezione di semispazi, quindi, possiamo togliere i semispazi che risultano superflui, in modo da ottenere quella che viene detta una **famiglia minimale** di semispazi.

Per dare una definizione di poliedro che corrisponda alla nostra intuizione dobbiamo

- Escludere che l’intersezione dei semispazi si riduca all’insieme vuoto, ad un punto, ad una retta, ad una regione piana;
- Escludere che la regione solida ottenuta sia illimitata

Con queste precisazioni possiamo dare la seguente

Definizione 1: **Si chiama poliedro convesso un sottoinsieme limitato dello spazio che sia intersezione di una famiglia minimale di semispazi.**

Se ci si spaventa davanti alla espressione “famiglia minimale di semispazi” si può adottare quest’altra definizione.

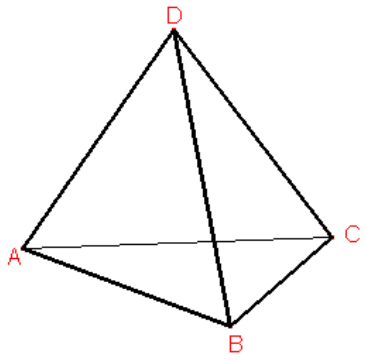
Definizione 2: Si chiama poliedro convesso una porzione limitata di spazio ottenibile come intersezione di un numero finito di semispazi.

Fissato un piano, le intersezioni di tale piano con i semispazi determinati dagli altri piani individuano un poligono. Tutti i poligoni che così si ottengono sono dette **facce** del poliedro. Il **numero minimo** di facce che un poliedro può possedere è **quattro**.

I lati dei poligoni che formano le facce del poliedro sono detti **spigoli** del poliedro. Ogni spigolo è comune a due facce ed il numero minimo degli spigoli di un poliedro è **sei**.

I vertici dei poligoni che formano le facce del poliedro sono detti i **vertici** del poliedro. Ogni vertice è comune ad almeno tre facce ed il numero minimo dei vertici di un poliedro è **quattro**.

Il poliedro che possiede questi numeri minimo è detto **tetraedro**, come si può vedere in figura.



La famiglia dei poliedri è quanto mai ricca e variegata. Oltre ai poliedri convessi, quelli delle nostre definizioni, ci sono poliedri non convessi, poliedri regolari e non regolari, poliedri archimedei e non archimedei, poliedri euleriani e non euleriani, ecc. Noi diremo qualcosa solo di alcuni tipi di poliedri convessi, fra i quali sono da annoverare quelli regolari.

3 – Prismi

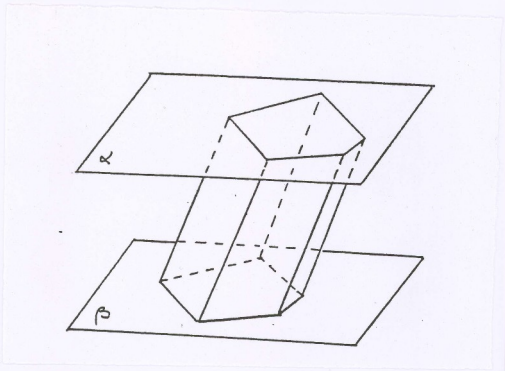
I prismi sono poliedri convessi caratterizzati dal fatto di avere **2 facce che sono poligoni di n lati congruenti e paralleli**, cioè giacenti su piani paralleli. Su queste due facce si distribuiscono tutti i vertici del prisma (metà sull'una e metà sull'altra). Queste due facce sono le **basi** del prisma. I due piani paralleli sui quali stanno le basi determinano uno **strato**. **La sua altezza**, che è anche la distanza fra le due basi, è **l'altezza del prisma.** Nella formula del volume del prisma entrano precisamente l'area di una base e l'altezza.

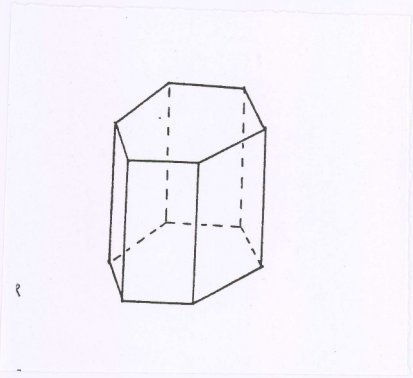
Le altre facce del prisma, cioè le sue facce laterali, sono **parallelogrammi**. Se sono rettangoli il prisma si dice **retto**. Se, inoltre, le basi sono poligoni regolari, il prisma si dice **regolare.** Questo non significa che il prisma sia un poliedro regolare nel senso che diremo fra poco. I prismi vengono contraddistinti in relazione alle loro basi. Così si parla di prisma triangolare, rettangolare, pentagonale, esagonale, ecc.

Se le facce del prisma sono tutte dei parallelogrammi, il prisma è un **parallelepipedo**. Il caso più familiare è quello del parallelepipedo con tutte le facce rettangolari. Conviene osservare che nei parallelepipedi due qualunque facce parallele sono congruenti e su di esse si ripartiscono tutti i vertici del parallelepipedo. Quindi sono le **basi** del parallelepipedo. Questo non succede in nessun altro prisma.

Il **cubo** è un parallelepipedo che tutte le facce quadrate congruenti.

Diagonale di un prisma è un segmento che congiunge due vertici non appartenenti alla stessa faccia.


α
β



4 – Piramidi

Una possibile definizione è la seguente:

Definizione: dato un poligono convesso A, B, C, D,….R ed un punto V esterno al suo piano, l'insieme dei segmenti che uniscono V con tutti i punti del poligono si chiama **piramide.**

Essa può essere vista anche come intersezione dei semispazi generati dai piani delle terne (A,B,V), (B,C,V), (C,D,V),ecc. che contengono gli altri vertici del poligono con il semispazio generato dal piano del poligono contenente V.

Il poligono di partenza è la **base** della piramide ed il punto V è il **vertice.**

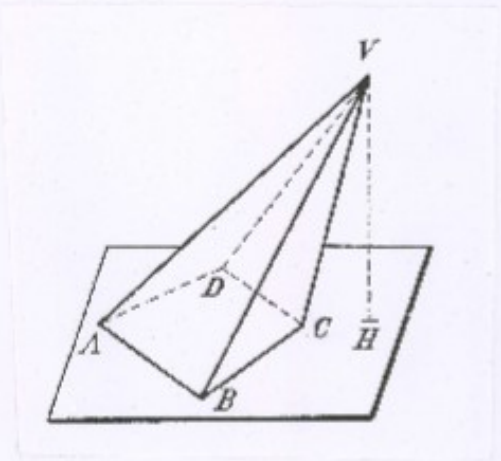
Se la base è un triangolo si ottiene il **tetraedro**. Le piramidi prendono il nome dal poligono di base. Ci sono, quindi, piramidi a base triangolare, a base quadrangolare, a base pentagonale, ecc.

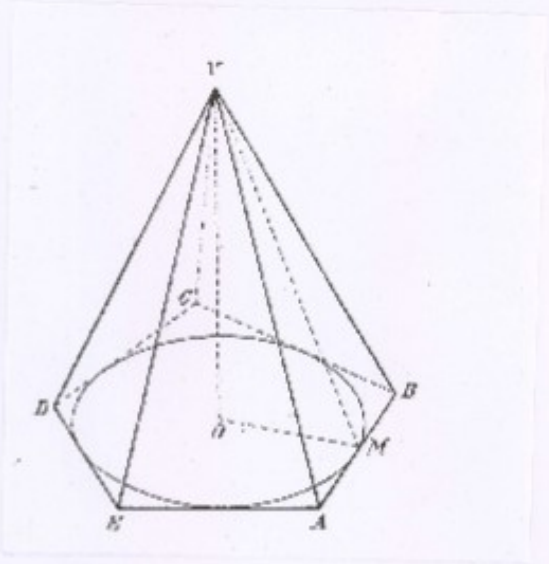
La **distanza** del vertice dal piano della base è l'altezza della piramide. Essa è la distanza fra il piano della base ed il piano ad esso parallelo passante per il vertice V. Questi due piani paralleli danno origine ad uno **strato**. La piramide è tutta contenuta nello strato ed i suoi vertici sono tutti distribuiti sui due piani dello strato. **L'altezza dello strato è l'altezza della piramide.**

La piramide della seconda figura (vedi pagina seguente) è **retta** perché la sua base è circoscritta ad un cerchio il cui centro è il piede della altezza.

Il segmento VM che unisce il vertice V con un punto di tangenza del poligono di base con il cerchio è l'**apotema** della piramide.

Se, inoltre, la base è un poligono regolare, la piramide si dice **regolare.**


V
D
C
H
A
B


V
C
D
B
O
M
E
A

5 – Poliedri regolari

La definizione di poliedro regolare è piuttosto delicata.

Si sarebbe tentati di dire che un poliedro è regolare quando le sue facce sono tutte poligoni regolari. Questo non è sufficiente. Per esempio, una piramide a base quadrata e con le facce laterali costituite da triangoli equilateri non è un poliedro regolare.

Si sarebbe tentati di aggiungere che le facce devono essere poligoni regolari tutti uguali fra di loro. E' la definizione data nel testo del Pellerey. La si trova anche nel volumetto di L. Prosperini e B. Isonni, Storie di matematica, Ghisetti e Corvi, 2000. Anche questa definizione è insufficiente. Per esempio il poliedro ottenuto incollando per la base due tetraedri con tutte le facce triangoli equilateri uguali, ha sei facce formate da triangoli regolari uguali, ma non è un poliedro regolare, perché in alcuni vertici concorrono tre facce, mentre in altri vertici ne concorrono quattro.

Una prima definizione corretta è la seguente:

Definizione 1: E' regolare il poliedro limitato da facce che sono poligoni regolari tutti uguali fra di loro e tali che in ogni vertice concorra lo stesso numero di facce.

Il fatto che tutte le facce siano congruenti suggerisce una seconda definizione di poliedro regolare nella quale intervengono le isometrie.

Definizione 2: Un poliedro si dice regolare se esiste una isometria che trasforma una qualunque faccia in un'altra qualunque faccia, trasformando uno spigolo della prima in un fissato spigolo della seconda.

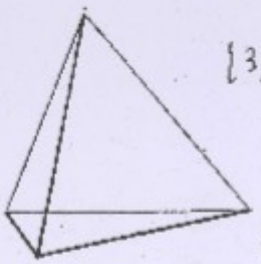
Altre definizioni fanno intervenire anche la congruenza dei diedri, ma non è il caso di riportarle.

Comunque si definiscano i poliedri regolari, essi sono caratterizzati da due numeri:

- Il numero p dei lati delle facce
- Il numero q degli spigoli (o delle facce) che concorrono in un dato vertice.

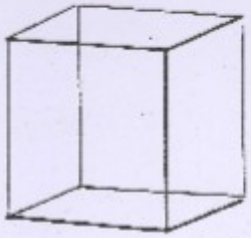
Considerazioni geometriche che non possiamo riportare ci dicono che i numeri p e q possono assumere solo alcuni valori. Questo fa si che, contrariamente alle aspettative e contrariamente a quello che succede per i poligoni regolari, i poliedri regolari siano soltanto 5 come si vede nelle figure della prossima pagina. Vicino ad ogni figura è scritta la coppia caratteristica dei numeri p e q. Nell'altra pagina è riportato lo **sviluppo piano** dei poliedri regolari.

TAVOLA DEI POLIEDRI REGOLARI



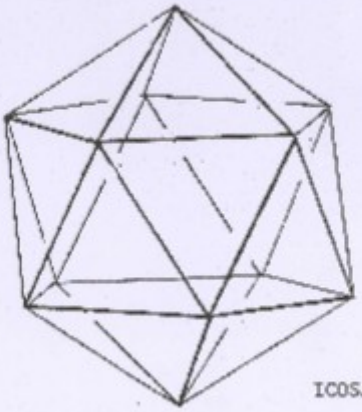
{3,3}

TETRAEDRO



{4,3}

CUBO

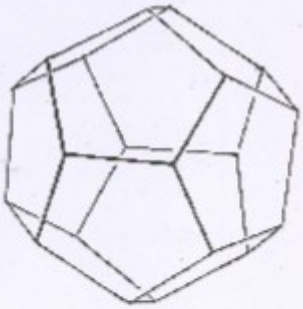


{3,5}

ICOSAEDRO

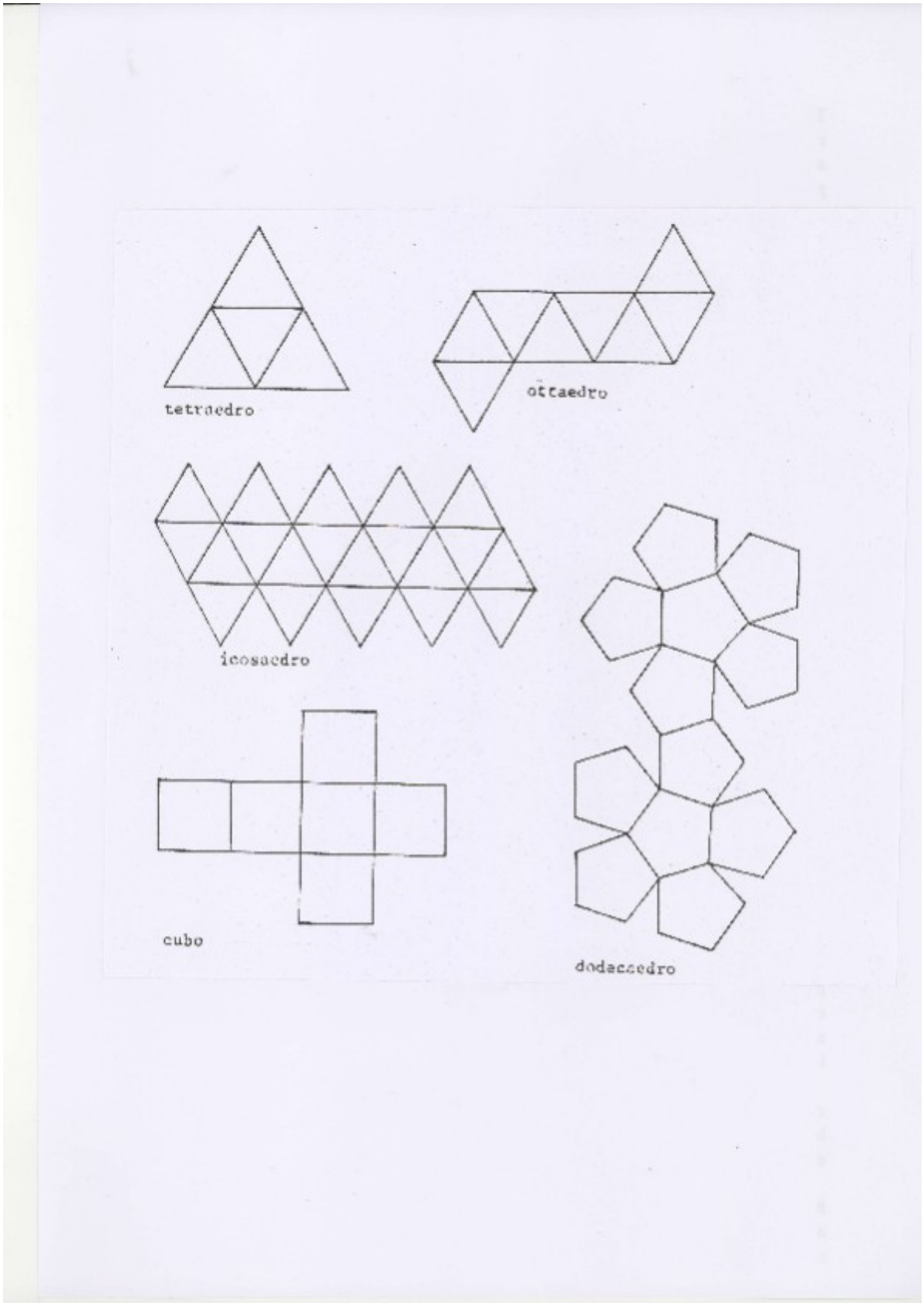
{3,4}

OTTAEDRO



{5,3}

DODECAEDRO



I poliedri regolari sono detti anche poliedri o corpi platonici perché Platone ne tratta nei suoi Dialoghi, in particolare nel Timeo nel quale accosta i poliedri regolari ai principi costitutivi del

cosmo e precisamente: alla terra è associato il cubo perché più solido e meno mobile, al fuoco è associato il tetraedro perché è la forma più aguzza e più mobile, all'aria e all'acqua le forme intermedie dell'ottaedro e dell'icosaedro, mentre al cosmo è associato il dodecaedro.

6 – Alcuni conteggi

Sui poliedri regolari si possono eseguire alcuni conteggi riguardanti facce, spigoli e vertici.

- Conoscendo, per esempio, il numero f delle facce del poliedro ed in numero n degli spigoli di ciascuna faccia e tenendo presente che ogni spigolo è comune a due facce, si può trovare il numero s degli spigoli del poliedro. Si ha infatti:

$$s = (f \times n)/ 2 \qquad (1)$$

Questa formula vale anche per i poliedri non regolari nei quali le facce hanno tutte lo stesso numero di spigoli come la piramide triangolare ed il parallelepipedo

- Nel tetraedro regolare, nel cubo e nel dodecaedro regolare ogni vertice è comune a tre facce. Conoscendo il numero complessivo f delle facce ed il numero m dei vertici di ciascuna faccia si può calcolare il numero complessivo v dei vertici del poliedro con la formula

$$v = (f \times m)/ 3 \qquad (2)$$

Questa formula vale anche per i poliedri non regolari nei quali tutte le facce hanno lo stesso numero di vertici e in ogni vertice concorrono tre facce, come la piramide a base triangolare ed il parallelepipedo.

- La formula più celebre è certamente quella di Eulero che lega fra loro il numero f delle facce, il numero v dei vertici ed il numero s degli spigoli. Eccola:

$$f + v = s + 2$$

  Questa formula vale per tutti i poliedri convessi.

Dal volumetto citato all'inizio del capitolo riporto i due prossimi paragrafi.

7 – La rappresentazione dei solidi.

Lo studio dei poliedri rende inevitabile affrontare il problema della loro rappresentazione grafica con disegni sufficientemente espressivi.

Una buona **rappresentazione prospettica** di una figura solida presuppone conoscenze matematiche e tecniche grafiche non indifferenti. Si possono superare le difficoltà di tale tipo di rappresentazione, ricalcando i contorni dei solidi da immagini fotografiche oppure ricorrendo alle ombre di "scheletri" di solidi proiettate su uno schermo da una sorgente di luce "puntiforme" (lampadina).

Un altro tipo di rappresentazione, chiamato **assonometria**, si ottiene sempre col metodo delle ombre, usando una sorgente di luce ancora "puntiforme", ma posta a distanza "infinita"(sole).

A differenza di ciò che accade nella rappresentazione prospettica, nella rappresentazione assonometrica, a spigoli paralleli sul solido corrispondono immagini piane ancora parallele; in entrambi i casi la relazione di perpendicolarità e le distanze non vengono rispettate (vedere la fig. 7)

8 – Sistema di riferimento nello spazio.

Spesso è utile introdurre nello spazio un sistema di riferimento cartesiano monometrico: si scelgono cioè tre assi *x, y, z,* a due a due perpendicolari, passanti per uno stesso punto O, origine del sistema di riferimento; su ciascuno degli assi si fissa la stessa unità di misura.

E' allora necessario affrontare il problema della rappresentazione piana di siffatto sistema di riferimento. In una generica rappresentazione assonometrica (e quindi, a maggior ragione, in una rappresentazione prospettica) le immagini degli assi possono formare reciprocamente angoli arbitrari e le immagini delle unità di misura su ciascun asse possono risultare diverse.

E' particolarmente comoda la **rappresentazione assonometrica** in cui il piano *yz* viene visto di fronte, con l'asse *z* posto in verticale e l'asse *y* in orizzontale; in tale modo le immagini delle unità di misura sui due assi *y* e *z* sono uguali. La direzione dell'asse *x* è arbitraria e così pure la lunghezza dell'immagine dell'unità di misura su tale asse. Per ottenere una buona "lettura" delle figure, conviene scegliere per l'asse *x* la direzione data dalla diagonale del rettangolo 2x3, come indicato nella figura 8, e assumere come immagine dell'unità di misura sullo stesso asse un segmento di lunghezza uguale alla metà dell'unità di misura sugli altri due assi.

Questo tipo di rappresentazione viene chiamato **assonometria Cavaliera**.

Una volta disegnato il sistema di riferimento secondo le convenzioni sopra stabilite, è pressoché immediato rappresentare un qualsiasi punto di cui siano date le coordinate. Per esempio ecco le immagini dei punti P(4,5,3) e Q(5,0,-1) (vedere figura 9).

Sempre seguendo le convenzioni stabilite per l'assonometria Cavaliera, ecco un cubo di spigolo 3 e un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3, 5, 2 (vedere figura 10).

immagine prospettica

immagine assonometrica

fig. 7

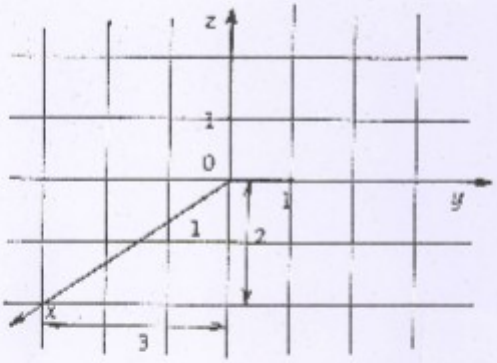


fig. 8

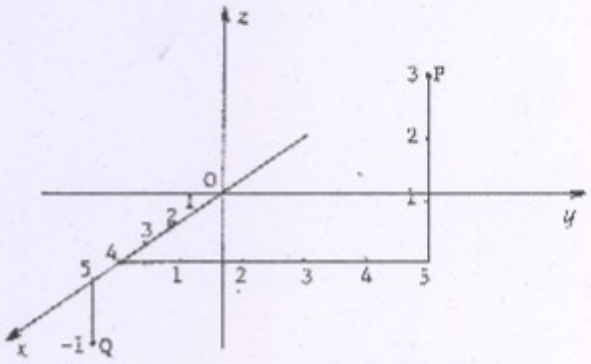


fig. 9

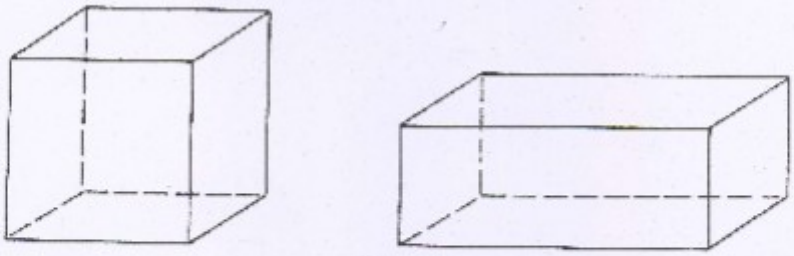


fig. 10

9 – Solidi rotondi

I solidi rotondi più familiari sono la sfera, il cilindro e il cono.

Con queste parole si possono intendere due figure diverse:

- **Il solido**. Intuitivamente qualcosa di pieno.
- **La superficie**. Intuitivamente qualcosa di cavo.

9. 1 – La sfera.

Una sfera di centro O e raggio r è l'insieme dei punti dello spazio che distano r da O.

Se vogliamo la sfera come solido basta considerare i punti dello spazio che da O hanno una distanza minore o uguale ad r.

Un po' di terminologia.

Una sfera tagliata da un piano risulta divisa in due **calotte sferiche**.

Il solido, invece, viene diviso in due **segmenti sferici ad una base**.

Se tagliamo la sfera con due piani paralleli, la parte della sfera fra essi compresa è la **zona sferica.**

Nel caso del solido otteniamo un **segmento sferico a due basi.**

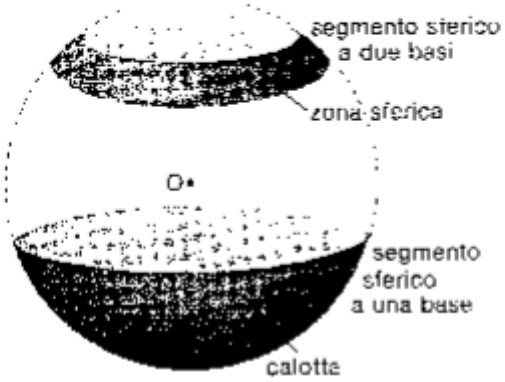
Tagliando la sfera con un diedro che ha come spigolo un diametro si ottiene il **fuso sferico**; nel caso del solido, in vece, lo **spicchio sferico**. (Si vedano le figure alla pagina seguente)

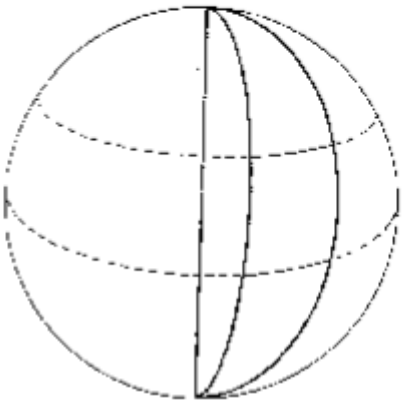
9. 2 – Il cilindro

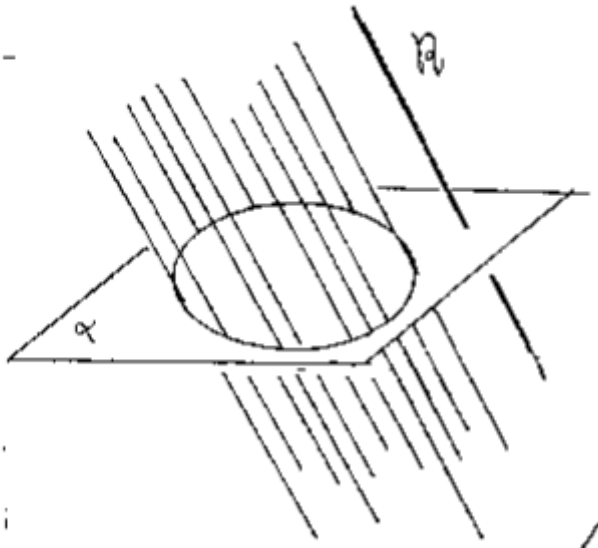
Per definire il cilindro pensiamo ad una circonferenza in un piano α ed una retta $\mathbb{R}$ incidente ad α. Il **cilindro indefinito** è l'insieme delle rette parallele ad $\mathbb{R}$ passanti per i punti della circonferenza. Le rette dell'insieme sono le **generatrici** del cilindro. Se $\mathbb{R}$ è perpendicolare al piano α il cilindro è **retto** e la parallela ad $\mathbb{R}$ passante per il centro della circonferenza è **l'asse** del cilindro. (Si vedano le figure alla pagina seguente)

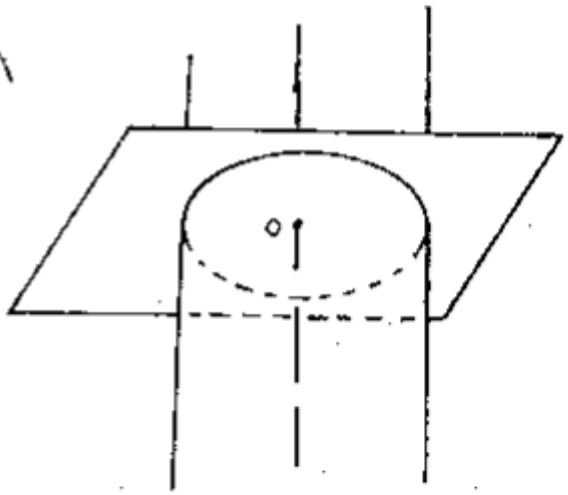
Per ottenere il solido basta considerare un **cerchio** invece di una circonferenza e l'insieme delle parallele ad $\mathbb{R}$ passanti per i punti del cerchio.

Se tagliamo il cilindro indefinito con una coppia di piani paralleli, la parte di cilindro contenuta nello strato si dice **cilindro definito** (o semplicemente **cilindro**).


segmento sferico
a due basi
zona sferica
O
segmento
sferico
a una base
calotta




π
α


O

9. 3 – Cono

Per definire il cono pensiamo ad una circonferenza in un piano α e a un punto P fuori di α.

L'insieme delle semirette di origine P che passano per i punti della circonferenza si dice **cono indefinito**. Le semirette dell'insieme sono le **generatrici**, P è il **vertice**. La semiretta che unisce P al centro della circonferenza è l'**asse** del cono. Se l'asse è perpendicolare al piano α il cono è **retto**.

Se tagliamo il cono indefinito con un piano parallelo ad α, la parte di cono contenuta nel semispazio dove sta il vertice P si dice **cono definito** (o semplicemente **cono**).

Per ottenere il **solido** basta prendere un **cerchio** invece che una circonferenza e considerare l'insieme delle semirette di origine P che passano per i punti del cerchio.

I tre solidi considerati si chiamano anche **solidi di rotazione** (superficie di rotazione) perché si possono ottenere ruotando opportune figure piane attorno ad opportuni assi.

Il cilindro si ottiene ruotando un rettangolo attorno ad un suo lato.

Il cono si ottiene ruotando un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto.

La sfera si ottiene ruotando una semicirconferenza attorno al suo diametro.

10 – Esercizi

1 – Quanti piani di simmetria possiede un cubo?

2 – Quante sono le diagonali di un cubo?

3 - Disegnare un cilindro ed il suo sviluppo piano. Fare la stessa cosa per un cono.

4 – Usando cubetti tutti uguali costruire un solido a forma di L. Per esso vale la formula di Eulero?

5 – Conoscendo la base di un prisma, possono conoscere il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli? Perché?

6 – Con quale figura si può ottenere il tronco di cono come solido di rotazione?

BIBLIOGRAFIA

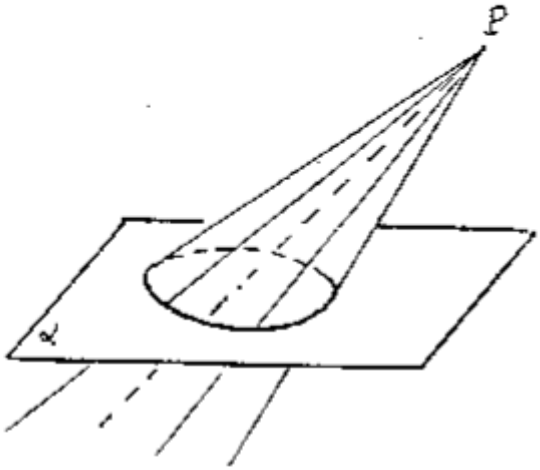
1 – C. Colombo Bozzolo e A. Costa (a cura di), Nel mondo della geometria, Vol. 2 e Vol. 3

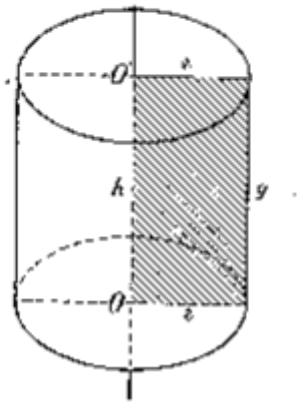
2 – AA.VV, Geometria, Quaderno 2, Editore Battagin

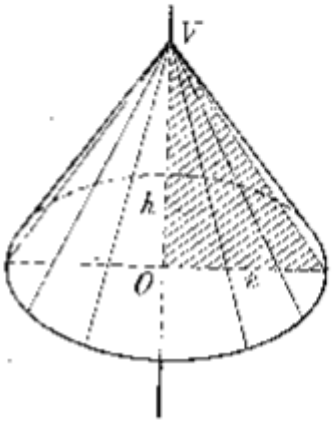
3 – AA.VV, La geometria nel secondo ciclo: antologia di proposte didattiche, Quaderno 15-16

4 – AA.VV, Geometria in città. Centro Ricerche Didattiche U. Morin

5 – AA.VV, Figure geometriche e definizioni, CRDU Morin (solo in fotocopia).


P
α


O
h
g
O


V
h
O