I.er MÉMOIRE

LU À LA PREMIÈRE CLASSE DE L'INSTITUT, EN FÉVRIER 1811;

PAR A. L. CAUCHY, *Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

RECHERCHES SUR LES POLYÈDRES.

Le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à la Classe, contient diverses recherches sur la géométrie des solides. La première partie offre la solution de la question proposée par M. *Poinsot*, sur le nombre des polyèdres réguliers que l'on peut construire; la seconde partie renferme la démonstration d'un théorème nouveau sur les polyèdres en général.

PREMIÈRE PARTIE.

M. *Poinsot*, dans son *Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*, après avoir donné la description de quatre polyèdres d'une espèce supérieure à celle que l'on a coutume de considérer, pose la question suivante : « Est-il impossible qu'il existe des polyèdres réguliers, dont le nombre de faces ne serait pas un de ceux-ci, 4, 6, 8, 12, 20 ? Voilà, ajoute-t-il, une question qui mériterait d'être approfondie, et qu'il ne paraît pas facile de résoudre en toute rigueur. »

Il est vrai que la diversité des méthodes dont M. *Poinsot* s'est servi pour faire dériver les trois nouveaux dodécaèdres, et le nouvel icosaèdre du dodécaèdre et de l'icosaèdre ordinaire, laisse en doute la possibilité de résoudre la question précédente ; mais, en généralisant quelques principes renfermés dans le mémoire même de M. *Poinsot*, on parvient à faire dériver les polyèdres réguliers d'espèces supérieures de ceux de première espèce, par une méthode simple et analytique qui conduit immédiatement à la solution de la question proposée.

Il est facile de voir, et M. *Poinsot* en a fait l'observation, n.° [15.] de son mémoire, qu'on peut former tous les polygones d'espèces supérieures, en prolongeant les côtés des polygones réguliers de même espèce.

Les polyèdres réguliers d'espèces supérieures dérivent d'une manière analogue des polyèdres réguliers de première espèce, et l'on peut former tous les nouveaux polyèdres réguliers, en prolongeant les arêtes ou les faces des polyèdres réguliers déjà connus.

Ainsi, par exemple, en prolongeant dans le dodécaèdre ordinaire les arêtes qui forment les côtés des douze pentagones, on obtient le dodécaèdre étoilé de seconde espèce.

Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge le plan qui contient chaque face jusqu'à la simple rencontre des plans des cinq faces qui entourent la face opposée, on obtiendra le dodécaèdre de troisième espèce, compris comme le dodécaèdre ordinaire sous des pentagones de première espèce.

Enfin, si l'on prolonge les arêtes qui, dans le dodécaèdre de troisième espèce, forment les côtés des douze pentagones, on obtiendra le dodécaèdre de quatrième espèce.

On obtiendra l'icosaèdre de septième espèce, en prolongeant chaque face de l'icosaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans des trois triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère.

Ce que nous venons d'observer relativement aux quatre polyèdres d'espèces supérieures, a lieu en général; c'est-à-dire, qu'on ne pourra construire des polyèdres réguliers d'espèces supérieures, qu'autant qu'ils résulteront du prolongement des faces ou des arêtes de polyèdres réguliers de même ordre et de première espèce.

En effet, supposons que l'on soit parvenu d'une manière quelconque à construire un polyèdre régulier d'espèce supérieure. Transportons-nous par la pensée au centre de la sphère inscrite. Les plans qui comprennent les différentes faces du polyèdre, présenteront à l'œil de l'observateur placé à ce centre, la forme d'un polyèdre convexe de première espèce, qui sert comme de noyau au polyèdre donné d'espèce supérieure. Je dis de plus, que la régularité du polyèdre d'espèce supérieure entraîne nécessairement la régularité du polyèdre de première espèce qui lui sert de noyau.

Pour le prouver, revenons à la définition des polyèdres réguliers. Un polyèdre régulier d'une espèce quelconque, est celui qui est formé par des polygones égaux et réguliers, également inclinés l'un sur l'autre, et assemblés en même nombre autour de chaque sommet. Il suit de cette définition, que si l'on construit un second polyèdre régulier égal au premier, et que l'on désigne par des numéros 1, 2, 3, 4, &c. les faces correspondantes des deux polyèdres, on pourra faire coïncider le second polyèdre avec le premier, en plaçant l'une quelconque des faces du second sur une face déterminée, par exemple sur la face n.° 1 du premier, et en commençant par faire coïncider dans ces deux faces deux quelconques de leurs arêtes. Réciproquement, si deux polyèdres égaux satisfont à la condition précédente, on pourra en conclure avec sûreté qu'ils sont réguliers : car, puisqu'on pourra faire alors coïncider chacune des faces du second avec une face déterminée du premier, en commençant par faire coïncider deux arêtes quelconques de ces deux faces, il s'ensuivra que les différentes faces sont des polygones égaux et réguliers ; et puisqu'en faisant coïncider deux faces quelconques prises à volonté, on fait coïncider toutes les autres, on en conclura que les différens angles dièdres sont égaux, ou ce qui revient au même, que les faces sont également inclinées l'une à l'autre, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet.

Cela posé, considérons un polyèdre régulier d'espèce supérieure, ayant pour noyau un polyèdre de première espèce et de même ordre, dont la régularité n'est pas encore démontrée. Construisez un second polyèdre d'espèce supérieure égal au premier; vous construirez en même temps un second polyèdre de première espèce égal à celui qui formait le noyau du polyèdre régulier donné; désignez maintenant par des numéros 1, 2, 3.... les différentes faces correspondantes des deux polyèdres d'espèce supérieure, et par les mêmes numéros 1, 2, 3... les faces des polyèdres de première espèce qui sont renfermées dans les mêmes plans que celles affectées de ces numéros dans les polyèdres d'espèce supérieure. De quelque manière que vous fassiez coïncider les deux polyèdres d'espèce supérieure, les deux polyèdres de même espèce, compris sous les mêmes faces, coïncideront aussi; et comme l'on peut faire coïncider les deux polyèdres réguliers d'espèce supérieure, en plaçant une face quelconque du second sur une face déterminée du premier, il s'ensuit qu'on peut faire coïncider de la même manière les deux polyèdres de première espèce. Par suite, les différentes faces des deux polyèdres de première espèce sont toutes égales entre elles, également inclinées l'une sur l'autre, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet.

Il nous reste à prouver que les différentes faces de chaque polyèdre de première espèce sont des polygones réguliers. Pour y parvenir, il suffit d'observer, que si l'on fait coïncider d'une manière quelconque une des faces du second polyèdre d'espèce supérieure avec une face déterminée du premier polyèdre de même espèce, les deux faces qui portent les mêmes numéros dans les polyèdres de première espèce coïncideront aussi : or, supposons que le nombre des côtés de chaque face soit égal à n dans les deux polyèdres d'espèce supérieure. Il y aura n manières différentes d'opérer la coïncidence de deux faces de ces polyèdres; et par suite, il y aura aussi n manières d'opérer la coïncidence des faces correspondantes des deux polyèdres de première espèce. Or, on ne peut satisfaire à cette condition, qu'en supposant les faces des polyèdres de première espèce égales, ou à des polygones réguliers de l'ordre n, ou à des polygones semi-réguliers d'un ordre au moins égal à $2n$; d'ailleurs, il est facile de voir que ce dernier cas ne peut exister : car, comme on ne peut supposer $n = 2$, il faudrait que l'on eût au moins $2n = 6$; et dans ce cas, l'on aurait des polyèdres de première espèce, dont toutes les faces auraient au moins six côtés, ce qui est impossible.

Il est donc prouvé maintenant, que dans un ordre quelconque on ne peut construire de polyèdres réguliers d'une espèce supérieure, qu'autant qu'ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers de même ordre et de première espèce qui leur servent de noyau; et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèces supérieures doivent avoir le même nombre de côtés que celles des polyèdres de première espèce.

Il suit d'abord de ce qui précède, que, comme il n'y a que cinq ordres de polyèdres qui fournissent des polyèdres réguliers de première espèce, on ne peut chercher que dans ces cinq ordres des polyèdres réguliers d'espèce supérieure. Ainsi tous les polyèdres réguliers, de quelque espèce qu'ils soient, doivent être des tétraèdres, des hexaèdres, des octaèdres, des dodécaèdres, ou des icosaèdres. De plus, tous les tétraèdres, octaèdres et icosaèdres, de quelque espèce qu'ils soient, doivent avoir pour faces des triangles équilatéraux, les hexaèdres des carrés, les dodécaèdres des pentagones réguliers de première ou de seconde espèce. Voyons maintenant combien chaque ordre renferme d'espèces différentes.

Afin de répandre plus de jour sur cette discussion, j'observerai,

1.° Qu'on ne peut, des polyèdres réguliers de première espèce, déduire des polyèdres réguliers d'espèces supérieures, qu'en prolongeant les arêtes des faces déjà existantes, ou en formant de nouvelles faces;

2.° Que le dodécaèdre est le seul polyèdre régulier duquel on puisse

obtenir

obtenir des espèces différentes, en prolongeant les arêtes des faces, parce qu'il existe deux espèces de pentagones, tandis qu'il n'existe qu'une espèce de triangle et une espèce de carré ;

3.° Que, dans le cas où l'on forme de nouvelles faces, on ne peut les obtenir qu'en prolongeant chacune des faces du polyèdre de première espèce, jusqu'à la rencontre de plans qui comprennent des faces non voisines de celles que l'on considère ;

4.° Que ces dernières doivent être en nombre égal à celui des faces voisines de celles que l'on considère, et avoir toutes sur celle-ci et entre elles une égale inclinaison.

Dans le tétraèdre, chacune des quatre faces est voisine des trois autres, d'où il suit qu'on ne peut obtenir de nouvelles faces, en prolongeant celles qui existent : il n'y a donc qu'un seul tétraèdre, celui de première espèce.

Dans l'hexaèdre, les faces qui ne sont pas voisines sont parallèles, et par conséquent ne peuvent se rencontrer : il n'y a donc aussi qu'un hexaèdre, celui de première espèce.

L'octaèdre ordinaire peut être considéré comme formé par deux faces opposées et comprises dans des plans parallèles, dont chacune est avoisinée par trois autres faces également inclinées sur elle et sur son opposée. Si donc on peut espérer de former un nouvel octaèdre régulier, ce ne peut être qu'en prolongeant jusqu'à la rencontre de chacune des faces les plans qui contiennent les trois faces voisines de celle qui lui est opposée : or cette construction, au lieu de donner un octaèdre régulier d'espèce supérieure, donne un solide double formé par deux tétraèdres qui se traversent mutuellement. C'est ainsi qu'en prolongeant les côtés de l'hexagone ordinaire, on obtient deux triangles équilatéraux en croix l'un sur l'autre, au lieu d'un hexagone de seconde espèce.

Si dans le dodécaèdre ordinaire on prolonge les côtés des douze pentagones, on aura, ainsi que M. *Poinsot* l'a observé, un dodécaèdre régulier de seconde espèce.

Pour obtenir d'autres dodécaèdres, il faut trouver le moyen de prolonger, jusqu'à la rencontre de chaque face du dodécaèdre ordinaire, cinq faces non voisines et également inclinées sur elle. Or, le dodécaèdre ordinaire peut être considéré comme formé par deux faces opposées situées dans des plans parallèles, et dont chacune est avoisinée par cinq autres faces également inclinées sur elle et sur son opposée. Si donc on peut construire d'autres dodécaèdres que ceux décrits ci-dessus, ce ne peut être qu'en prolongeant chaque face du dodécaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans qui contiennent les cinq voisines de la face opposée. Les intersections de ces cinq plans avec la face que l'on considère, forment deux pentagones réguliers, l'un de première et l'autre de seconde espèce. Ces deux pentagones représentent les faces des dodécaèdres réguliers de troisième et de quatrième espèce.

Dans l'icosaèdre ordinaire, en choisissant pour base une des faces prise à volonté, on trouve, comme dans les trois ordres précédens, une autre face opposée et située dans un plan parallèle. Si l'on classe les triangles compris entre ces deux faces par séries, en renfermant dans une même série ceux qui sont également inclinés sur la base, ou, ce qui revient au même, sur la face opposée; on trouvera que les dix-huit triangles restant forment quatre séries; savoir :

1.° Une série de trois triangles voisins de la base;

2.° Une série de trois triangles voisins de la face opposée;

3.° Une série de six triangles, dont chacun n'a qu'un sommet de commun avec la base;

4.° Une série de six triangles, dont chacun n'a qu'un sommet de commun avec la face opposée.

Désignons les triangles de la troisième et de la quatrième série par des numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6; en sorte que deux numéros consécutifs indiquent deux triangles qui se touchent par une arête ou par un sommet. La base d'un nouvel icosaèdre régulier ne pourra être formée que par l'intersection de la base de l'icosaèdre donné avec trois triangles de la même série, également inclinés l'un sur l'autre. Cela posé, il est facile de voir qu'on ne peut espérer d'obtenir la base d'un nouvel icosaèdre que de cinq manières ; savoir, en prolongeant, jusqu'à la rencontre du plan de la base donnée,

1.° Les plans qui contiennent les trois triangles de la seconde série ;

2.° Les plans qui contiennent les triangles 1, 3, 5 de la troisième série;

3.° Les plans qui contiennent les triangles 2, 4, 6 de la troisième série;

4.° Les plans qui contiennent les triangles 1, 3, 5 de la quatrième série;

5.° Les plans qui contiennent les triangles 2, 4, 6 de la quatrième série.

Si l'on étend de proche en proche les cinq constructions précédentes aux différentes faces de l'icosaèdre ordinaire, on obtiendra les résultats suivans :

1.° En suivant la première construction, on passera sur toutes les faces, et on obtiendra l'icosaèdre de septième espèce, décrit par M. *Poinsot ;*

2.° En suivant la seconde ou la troisième construction, on ne passera que sur huit faces, et on obtiendra simplement un octaèdre régulier de première espèce ;

3.° En suivant la quatrième et la cinquième construction, on ne passera que sur quatre faces, et on formera simplement un tétraèdre régulier.

Il suit de ce qu'on vient de dire, qu'on ne peut former d'autres polyèdres réguliers d'espèces supérieures que les quatre décrits par M. *Poinsot.*

La théorie précédente fournit encore le moyen de calculer l'angle compris entre deux faces quelconques d'un polyèdre régulier, lorsqu'on connaît les angles formés par les faces adjacentes dans le tétraèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre de première espèce.

En effet, soient α, β, γ ces trois angles;

L'angle compris entre deux faces du tétraèdre sera toujours α.

Dans l'hexaèdre, deux faces adjacentes se coupent à angle droit, deux faces non adjacentes sont parallèles.

Dans l'octaèdre, les faces sont parallèles deux à deux. L'angle compris entre deux faces non parallèles, est représenté par

$$\pi - \alpha$$

quand les deux faces sont adjacentes, et par α quand elles ne le sont pas.

Dans le dodécaèdre, les faces sont parallèles deux à deux. L'angle compris entre deux faces non parallèles, est représenté par β quand les deux faces sont adjacentes, et par

$$\pi - \beta$$

quand elles ne le sont pas.

Dans l'icosaèdre, les faces sont encore parallèles deux à deux. L'angle compris entre une face et les faces voisines étant γ, l'angle compris entre la même face et celles qui avoisinent la face opposée, sera

$$\pi - \gamma;$$

enfin, l'angle compris entre deux faces, dont l'une n'est pas adjacente à l'autre, ni à la face opposée, sera représenté ou par α ou par

$$\pi - \alpha.$$

SECONDE PARTIE.

Euler a déterminé le premier dans les *Mémoires* de Pétersbourg, année 1758, la relation qui existe entre les différens élémens qui composent la surface d'un polyèdre ; et M. *Legendre*, dans ses *Élémens de géométrie*, a démontré d'une manière beaucoup plus simple le théorème d'*Euler*, par la considération des polygones sphériques. Ayant été conduit par quelques recherches à une nouvelle démonstration de ce théorème, je suis parvenu à un théorème plus général que celui d'*Euler*, et dont voici l'énoncé.

THÉORÈME.

Si l'on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra, en prenant à volonté dans l'intérieur de nouveaux sommets; que l'on représente par P le nombre des nouveaux polyèdres ainsi formés, par S le nombre total des sommets, y compris ceux du premier polyèdre, par F le nombre total des faces, et par A le nombre total des arêtes, on aura

$$S + F = A + P + 1; \qquad (1)$$

c'est-à-dire, que la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpassera d'une unité la somme faite du nombre des arêtes et de celui des polyèdres.

Il est facile de voir que le théorème d'*Euler* est un cas particulier du théorème précédent; car si l'on suppose tous les polyèdres réduits à un seul, on aura

$$P = 1,$$

et l'équation (1) se réduira à celle-ci,

$$S + F = A + 2. \qquad (2)$$

On déduit encore de l'équation (1) un second théorème rélatif à la géométrie plane; car si l'on suppose que tous les polyèdres étant réduits à un seul, on détruise ce dernier en prenant une de ses faces pour base, et transportant sur cette face tous les autres sommets sans changer leur nombre, on obtiendra une figure plane composée de plusieurs polygones renfermés dans un contour donné. Soit F le nombre de ces polygones, S le nombre de leurs sommets, A celui de leurs côtés, on obtiendra la relation qui existe entre ces trois nombres, en faisant, dans la formule générale, $P = 0$, et l'on aura alors

$$S + F = A + 1, \qquad (3)$$

d'où l'on conclut que la somme faite du nombre des polygones et de celui des sommets surpasse d'une unité le nombre des droites qui forment les contours de ces polygones. Ce dernier théorème est, dans la géométrie plane, l'équivalent du théorème général dans la géométrie des polyèdres.

Nous pourrions démontrer immédiatement le théorème général renfermé dans l'équation (1), et en déduire comme corollaires les deux autres théorèmes. Mais afin de faire mieux connaître l'esprit de cette démonstration, nous allons commencer par démontrer d'une manière analogue le dernier théorème renfermé dans l'équation (3).

Il est d'abord facile de faire, dans les divers cas particuliers, l'application de ce théorème.

Supposons, par exemple, que le contour donné soit le périmètre d'un triangle, que l'on prenne un point dans l'intérieur, et que de ce point aux trois sommets on mène trois droites, on formera trois triangles dans le contour donné. Ces trois triangles formeront quatre sommets, et le nombre des droites qui forment leurs côtés, sera égal à 6 : or 6, augmenté de l'unité, donne la même somme que 4 plus 3, ce qui vérifie le théorème.

Supposons, en second lieu, que le contour donné soit un quadrilatère, que l'on prenne un point dans l'intérieur, et que de ce point aux quatre sommets on mène quatre droites, on formera quatre triangles dans le contour donné. Ces quatre triangles formeront cinq sommets et huit côtés : or,

$$8 + 1 = 4 + 5,$$

ce qui vérifie le théorème.

Supposons enfin que le contour donné soit un polygone de n côtés, et que l'on prenne dans l'intérieur un point que l'on joigne aux n sommets du polygone par n droites. Les n triangles que l'on formera par ce moyen, fourniront un nombre de sommets égal à $n+1$, et un nombre de côtés égal à $2n$: or $2n$, augmenté de l'unité, est égal à la somme faite de n et de $n+1$, ce qui vérifie le théorème.

Passons maintenant au cas général, et supposons un nombre F de polygones renfermés dans un contour donné. Soit S le nombre des sommets de ces polygones, et A le nombre des droites qui forment leurs côtés. Décomposons chacun des polygones en triangles, en menant d'un de ses sommets aux sommets non voisins des diagonales. Soit n le nombre des diagonales tracées dans les différens polygones, $F+n$ sera le nombre des triangles résultant de la décomposition des polygones, et $A+n$ sera le nombre des côtés de ces triangles. Le nombre de leurs sommets sera le même que celui des sommets du polygone, ou S. Supposons maintenant que l'on enlève successivement les différens triangles, de manière à n'en laisser subsister à la fin qu'un seul, en commençant par ceux qui avoisinent le contour extérieur, et n'enlevant dans la suite que ceux dont un ou deux côtés auront été réduits, par les suppressions antérieures, à faire partie du même contour. Soit h' le nombre des triangles qui ont un côté compris dans le contour extérieur au moment où on les enlève, et h'' le nombre des triangles qui ont alors deux côtés compris dans le même contour. La destruction de chaque triangle sera suivie, dans le premier cas, de la destruction d'un côté, et, dans le second cas, de la destruction de deux côtés et d'un sommet. Il suit de là, qu'au moment où on aura détruit tous les triangles, à l'exception d'un seul, le nombre des triangles détruits étant de

$$h' + h'',$$

celui des côtés détruits, sera

$$h' + 2h'',$$

et celui des sommets détruits,

$$h''.$$

Le nombre des triangles restans sera donc alors

$$F + n - (h' + h'') = 1,$$

celui des côtés restans,

$$A + n - (h' + 2h'') = 3,$$

et celui des sommets restans,

$$S - h'' = 3.$$

Si l'on ajoute la première équation à la troisième, et qu'on retranche la seconde, on aura

$$S + F - A = 1,$$

ou

$$(3) \qquad S + F = A + 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut encore arriver à la même équation, sans employer la décomposition des polygones en triangles. En effet, supposons les divers polygones réunis successivement autour de l'un d'entre eux pris à volonté. Soient a et s les nombres de côtés et de sommets du premier polygone, a' et s' les nombres de côtés et de sommets du second polygone qui ne lui sont pas communs avec le premier, a'' et s'' les nombres de côtés et de sommets du troisième polygone qui ne lui sont pas communs avec les deux premiers, &c., vous aurez les équations suivantes :

$$a = s,$$
$$a' = s' + 1;$$
$$a'' = s'' + 1,$$
&c.

En ajoutant toutes ces équations qui sont en nombre égal à F, et observant que

$$a + a' + a'' + \text{\&c.} = A, \quad s + s' + s'' + \text{\&c.} = S,$$

on aura l'équation

$$A = S + F - 1,$$

équivalente à celle trouvée ci-dessus.

Corollaire. Si l'on représente par a et par s les côtés et sommets compris dans le contour extérieur, par $a_{,}$ et $s_{,}$ les côtés et sommets renfermés dans l'intérieur du même contour, on aura

$$s + s_{,} = S, \quad a + a_{,} = A;$$

et

et comme l'on aura aussi $s = a$, l'équation (3) deviendra

$$s_{,} + F = a_{,} + 1,$$

d'où il résulte que le nombre des sommets intérieurs, augmenté du nombre des polygones, est égal au nombre des côtés intérieurs augmenté de l'unité.

Le théorème d'*Euler* est une conséquence immédiate du théorème renfermé dans l'équation

$$S + F = A + 1.$$

En effet, supposons que F représente le nombre des faces qui composent la surface convexe d'un polyèdre, et que S et A soient les nombres de sommets et d'arêtes renfermées dans cette même surface. Si, dans la surface du polyèdre, on supprime une des faces, les faces restantes, dont le nombre sera $F - 1$, pourront être considérées comme formant une suite de polygones renfermés dans le contour de la face supprimée; et par suite les nombres S, A et $F - 1$ devront satisfaire au théorème démontré. En effet, soit que les polygones soient compris dans un seul et même plan, ou dans des plans différens, le théorème n'en existe pas moins, puisqu'il ne dépend que du nombre des polygones et du nombre de leurs élémens. On aura donc, en considérant la surface d'un polyèdre,

$$S + (F - 1) = A + 1,$$

ou

$$S + F = A + 2, \qquad (2)$$

ce qui renferme le théorème d'*Euler*.

Je reviens maintenant au théorème général dont les deux théorèmes précédens ne sont que des cas particuliers, et je vais commencer par en faire l'application à quelques cas simples.

Supposons d'abord que l'on prenne un point dans l'intérieur d'une pyramide triangulaire, et que de ce point aux quatre sommets, on mène quatre droites, on séparera la pyramide donnée en quatre nouvelles pyramides triangulaires, qui formeront cinq sommets, dix faces et dix arêtes. Dans ce cas, la somme faite du nombre des arêtes et du nombre des polyèdres est quatorze; celle du nombre des sommets et du nombre des faces étant quinze, surpasse quatorze d'une unité; ce qui vérifie le théorème.

Supposons, en second lieu, que d'un point pris dans l'intérieur d'un hexaèdre, on mène huit droites aux huit sommets, l'hexaèdre sera partagé en six pyramides quadrangulaires, qui formeront neuf sommets, dix-huit faces et vingt arêtes. Dans ce cas, le nombre des arêtes et celui des polyèdres forment une somme égale à vingt-six; la somme faite du nombre des faces et de celui des sommets étant vingt-sept, surpasse la première d'une unité, ce qui vérifie le théorème.

Supposons enfin que l'on prenne un polyèdre quelconque, dont la surface renferme un nombre f de faces, un nombre a d'arêtes, et un nombre s de sommets; et que d'un point pris dans l'intérieur du polyèdre on mène s droites aux différens sommets. On divisera le polyèdre en autant de pyramides qu'il y avait de faces; et l'on formera à l'intérieur autant de faces qu'il y avait d'arêtes à l'extérieur, et autant d'arêtes qu'il y avait de sommets à l'extérieur. On aura donc en tout f pyramides qui formeront $s+1$ sommets, $f+a$ faces, et $a+s$ arêtes. Dans ce cas, le nombre des pyramides et celui des arêtes forment une somme égale à

$$f+(a+s),$$

et le nombre des faces forme avec celui des sommets une somme égale à

$$(f+a)+(s+1).$$

Cette dernière somme surpasse la première d'une unité, ce qui vérifie le théorème.

Considérons maintenant le théorème dont il s'agit dans le cas le plus général, et supposons un nombre P de polyèdres renfermés dans un polyèdre donné. Soient S le nombre des sommets de ces divers polyèdres, F le nombre de leurs faces, A le nombre de leurs arêtes. Divisons toutes les faces en triangles par des diagonales, et soit n le nombre de ces diagonales, le nombre total des triangles dans lesquels les faces des différens polyèdes seront divisées, sera $F+n$. Supposons maintenant que l'on décompose chaque polyèdre en pyramides triangulaires, en faisant passer par un des sommets et les côtés des triangles non adjacens des faces triangulaires. Soient $P+p$ le nombre des pyramides ainsi formées dans les différens polyèdres, a le nombre des nouvelles arêtes qui en résultent. Le nombre des nouveaux triangles qui forment les faces de ces pyramides sera $p+a$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que si, parmi ces différentes pyramides, on construit d'abord celles qui avoisinent la surface de chaque polyèdre, on n'aura jamais, pour former chaque pyramide, qu'une ou deux faces nouvelles à construire; et qu'il en résultera, dans le premier cas, une nouvelle pyramide seulement; dans le second cas, une nouvelle pyramide et une nouvelle arête. Il suit de là, qu'après la décomposition des polyèdres en pyramides triangulaires, le nombre total des pyramides étant

$$P+p,$$

et celui des arêtes étant

$$A+n+a,$$

celui des faces sera

$$F+n+a+p.$$

Quant à celui des sommets, il sera toujours égal à S.

Supposons maintenant que l'on enlève successivement du polyèdre total les diverses pyramides triangulaires qui le composent, de manière à n'en laisser subsister à la fin qu'une seule, en commençant par celles qui ont des triangles situés sur la surface extérieure du polyèdre donné, et n'enlevant dans la suite que celles dont une ou plusieurs faces auront été découvertes par des suppressions antérieures. Chaque pyramide que l'on enlèvera, aura une, deux ou trois faces découvertes. Soit p' le nombre des pyramides qui ont une face découverte au moment où on les enlève, p'' le nombre des pyramides qui ont alors deux faces découvertes, et p''' le nombre des pyramides qui ont alors trois faces découvertes; la destruction de chaque pyramide sera suivie, dans le premier cas, de la destruction d'une face; dans le second cas, de la destruction de deux faces et de l'arête commune à ces deux faces; dans le troisième cas, de la destruction d'un sommet de trois faces et de trois arêtes. Il suit de là, qu'au moment où on aura détruit toutes les pyramides, à l'exception d'une seule, le nombre des sommets détruits sera

$$p''',$$

celui des pyramides détruites,

$$p' + p'' + p''';$$

celui des triangles détruits,

$$p' + 2p'' + 3p''';$$

et celui des arêtes détruites,

$$p'' + 3p'''.$$

Le nombre des sommets restans pourra donc être représenté par

$$S - p''' = 4;$$

celui des pyramides restantes, par

$$P + p - (p' + p'' + p''') = 1;$$

celui des triangles restans, par

$$F + n + a + p - (p' + 2p'' + 3p''') = 4;$$

et celui des arêtes restantes, par

$$A + n + a - (p'' + 3p''') = 6.$$

Si l'on ajoute la première des équations précédentes à la troisième, on aura

$$S + F + n + a + p - (p' + 2p'' + 4p''') = 8.$$

Si l'on ajoute la seconde à la quatrième, on aura

$$A + P + n + a + p - (p' + 2p'' + 4p''') = 7.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre, les deux équations que nous venons de trouver, on aura

$$S + F - A - P = 1,$$

ou

$$S + F = A + P + 1. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On peut encore arriver à l'équation précédente, sans avoir recours à la décomposition des polyèdres en pyramides triangulaires. En effet, supposons les divers polyèdres réunis successivement autour de l'un d'eux pris à volonté. Soient a, f et s les nombres d'arêtes, de faces et de sommets de ce premier polyèdre; a', f', s' les nombres des arêtes, faces et sommets du second polyèdre, qui ne lui sont pas communs avec le premier; a'', f'', s'' les nombres des arêtes, faces et sommets du troisième polyèdre, qui ne lui sont pas communs avec les deux premiers : vous aurez, en vertu du théorème d'*Euler*, et du théorème sur les polygones (Voyez le *Corollaire*, page 80.)

$$\begin{aligned} s + f &= a + 2, \\ s' + f' &= a' + 1, \\ s'' + f'' &= a'' + 1, \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations, qui sont en nombre égal à P, et observant que

$$s + s' + s'' + \text{\&c.} = S, \quad f + f' + f'' + \text{\&c.} = F,$$
$$a + a' + a'' + \text{\&c.} = A,$$

on aura

$$S + F = A + P + 1. \qquad (3)$$

Corollaire. Si l'on représente par s, a et f les nombres de sommets, arêtes et faces compris dans la surface extérieure du polyèdre donné, par $s_{,}$, $a_{,}$ et $f_{,}$ les nombres de sommets, arêtes et faces situés à l'intérieur, on aura

$$S = s + s_{,}, \quad A = a + a_{,}, \quad F + f + f_{,}.$$

On aura d'ailleurs, en vertu du théorème d'*Euler*,

$$s + f = a + P + 2.$$

Par suite, l'équation (3) deviendra

$$s_{,} + f_{,} = a_{,} + P + 1.$$