tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sint referenda. Quanquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, vt alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO
NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM, QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA SVNT PRAEDITA.

Auct. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aeque merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex quibus

bus formatio solidorum consequatur, eorumque praecipue proprietates demonstrari queant. In quo negotio maxime mirum visum est, quod cum Stereometria iam a tot seculis aeque ac Geometria sit exculta, eius tamen prima quasi elementa adhuc essent incognita, neque quisquam in tam longo temporis interuallo sit inuentus, qui ea inuestigare, atque in ordinem redigere sit conatus. Hoc autem labore suscepto, cum plures insignes proprietates, quae omnibus corporibus hedris planis contentis sunt communes, detexissem, et quae omnino similes videbantur earum, quae inter elementa figurarum planarum rectilinearum referri solent, non sine summa admiratione deprehendi, praecipuas earum tantopere esse reconditas, vt tum temporis omne studium in earum demonstratione eruenda frustra impendissem. Neque etiam ab amicis in his rebus alias versatissimis, quibuscum illas proprietates communicaueram quicquam luminis mihi est accensum, vnde has demonstrationes desideratas haurire potuissem. Contemplatione enim plurium corporum generum eo sum deductus, vt proprietates, quas in illis deprehenderam, ad omnia plane corpora patere intellexissem, etiamsi id mihi rigida demonstratione ostendere non licuisset; sicque istas proprietates in eam veritatum classem referendas censebam, quas nobis quidem agnoscere, non vero demonstrare esset concessum.

Solidorum autem proprietates generales, quae demonstratione adhuc indigent, ab vna pendent, ita vt si hanc demonstrare liceret, cuncta, quae exhibui, Stereometriae elementa aeque essent firmata, atque elementa Geometriae. Proprietas vero ista nondum demonstrata, quae

 plures

plures alias in se complectitur, hac continetur propositione:

In omni solido hedris planis incluso numerus angulorum solidorum vna cum numero hedrarum binario superat numerum acierum.

Hinc aliam deriuaui non minus insignem proprietatem omnibus huius generis solidis communem, quae ita se habet:

In omni solido hedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, quibus anguli solidi constituuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo.

Haecque propositio ita cum praecedente cohaeret, vt si altera demonstrari posset, simul alterius demonstratio haberetur; vnde defectus elementorum Stereometriae, quae in medium protuli, supplebitur, si harum duarum propositionum alterutrius demonstratio reperietur.

Cum autem hoc argumentum denuo perpendissem, desideratas harum propositionum demonstrationes tandem sum adeptus, ad quas simili fere modo perueni, quo in Geometria propositio analoga de summa angulorum figurae cuiusuis rectilineae demonstrari solet. Quemadmodum enim in Geometria figura quaecunque rectilinea resecandis continuo angulis tandem ad triangulum reducitur, ita proposito quocunque solido hedris planis incluso, obseruaui, inde continuo angulos solidos resecari posse, vt tandem pyramis triangularis remaneat, quae cum sit figura inter solida simplicissima, ex cognitis eius proprietatibus hoc modo perspexi, viciffim ad proprietates omnium solidorum ascendi posse. In pyramide enim trigonali numerus angulorum solidorum est $= 4$, nume-

rus

rus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, cuius duplum 12 dat numerum angulorum planorum, quorum summa aequalis est 8 angulis rectis.

Sumto quidem puncto quocunque intra solidum, si inde ad singulos angulos solidos lineae rectae ductae concipiantur, solidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot sunt hedrae, quippe quae singulae bases pyramidum constituent, dum earum vertices in illo puncto vniuntur. Atque hae pyramides, nisi sint triangulares, porro facile in triangulares dissecabuntur. Verum hic modus solidum quodcunque in pyramides triangulares resoluendi ad praesens institutum parum confert; alterum ergo modum, quo quoduis solidum resecandis successiue eius angulis solidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, vnde deinceps demonstratio memoratarum propositionum facile concinnabitur.

Similis autem haec operatio est eius, qua quaelibet figura rectilinea, dum eius anguli successiue resecantur, tandem in triangulum redigi solet. Si enim habeatur figura plana quotcunque laterum ABCDEFGA, si ab ea per rectam CE triangulum CDE resecetur, remanebit figura ABCEFGA, cuius numerus angulorum vnitate erit minor. Si iam denuo recta CF triangulum CFE resecetur, figura remanebit ABCFGA; vnde si porro triangulum BCF, tumque triangulum BGF abscindatur, relinquetur tandem triangulum ABG. Tab. III. Fig. 1.

Ex hac resolutione facile ambae palmariae figurarum planarum proprietates demonstrantur: Sit enim figurae ABCDEFG numerus laterum $= L$, et numerus angulorum $= A$; ac si ducenda recta CE inde

angulus

angulus D resecetur, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - 1$; numerus autem laterum, quia duo latera C D, et D E sunt sublata, eorum autem loco nouum latus C E accessit, erit $= L - 1$. Hinc patet, si denuo vnus angulus resecetur, numerum angulorum fore $= A - 2$, numeromque laterum $= L - 2$; atque si iam hoc modo n anguli fuerint resecti, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - n$, et numerus laterum $= L - n$. Sit iam haec figura residua triangulum, erit $A - n = 3$, et $L - n = 3$; vnde sequitur fore $L = A$, seu in quauis figura rectilinea numerum laterum aequalem esse numero angulorum.

Deinde sit R numerus angulorum rectorum, quibus omnes anguli figurae propositae A B C D E F G simul sumti sunt aequales, atque resecto angulo D, seu triangulo C D E, ab angulis figurae auferantur tres anguli trianguli C D E, qui cum aequales sint duobus rectis, summa angulorum figurae residuae A B C E F G aequabitur $R - 2$ angulis rectis, numero angulorum existente iam $= A - 1$. Si denuo angulus resecetur, vt numerus angulorum sit $= A - 2$, eorum summa erit $= R - 4$ rectis; atque si iam n angulos absciderimus, vt figurae residuae numerus angulorum sit $= A - n$, eorum summa aequabitur $R - 2n$ angulis rectis. Sit nunc ista figura residua triangulum, seu $A - n = 3$, quia summa angulorum est $= 2$ rectis, erit $R - 2n = 2$; inde vero est $2A - 2n = 6$, a qua, si ista aequatio auferatur, erit $2A - R = 4$, seu $R = 2A - 4 = 2L - 4$: sicque constat, in quouis polygono summam omnium angulorum aequalem esse bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor.

Simili

Simili igitur modo, quo ex tali figurarum rectilinearum sectione duas praecipuas huiusmodi figurarum proprietates elicui, pro solidis inuestigationem instituam, dum omnia solida hedris planis inclusa successiua angulorum solidorum resectione tandem ad pyramides triangulares sim reducturus; quorsum cum peruenero, numerus angulorum solidorum, numerus hedrarum, numerus acierum, et summa angulorum planorum omnium erunt cognita. Quae quo fiant planiora, totam rem sequentibus propositionibus complectar.

PROPOSITIO I. PROBLEMA

1. *Proposito solido quocunque hedris planis incluso inde datum angulum solidum ita resecare, vt in solido residuo numerus angulorum solidorum vnitate sit minor.*

SOLVTIO.

Sit O angulus solidus obtruncandus, in quo coeant acies AO, BO, CO, DO, EO, FO, ita, vt is formatus sit ab angulis planis AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, atque puncta A, B, C, D, E, F repraesentent angulos solidos vicinos corporis, qui cum angulo O cohaerent rectis AO, BO, CO, DO, EO, FO. Cum iam eiusmodi pars a solido abscindi debeat, vt angulus solidus O inde penitus auferatur, reliqui vero omnes relinquantur, neque tamen nouus angulus solidus efformetur, prima sectio instituatur per angulum quempiam vicinum B, secundum planum ABC, donec pertingat ad angulos A et C, tum ex O fiat sectio AOC; quo pacto a so- Fig. 2.

 lido

lido resecabitur pyramis triangularis OABC. Tum cultro ad AC applicato sectio dirigatur ad angulum F per planum AFC, et ex O alia sectio FOC fiat, vt separetur pyramis triangularis OACF. Porro secetur solidum secundum planum CDF, et ex O alia sectio ad DF vsque instituatur, vt hoc modo rescindatur pyramis triangularis OCDF. Denique sectio secundum DEF facta resecabit pyramidem triangularem ODEF; sicque angulus solidus O omnino erit obtruncatus, et quia reliqui anguli solidi manent, nullusque nouus per sectiones factas est formatus, numerus angulorum solidorum in corpore residuo vnitate erit diminutus. Q. E. D.

COROLL. 1.

2. Si solidum ipsum fuerit pyramis triangularis, per huiusmodi sectionem tota remouebitur, vt nihil relinquatur. Verum quia hanc sectionem ideo instituimus, vt tandem ad pyramidem triangularem corpus reducamus, si iam fuerit huiusmodi pyramis, sectione plane non erit opus.

COROLL. 2.

3. Si angulus solidus O, a corpore resecandus, a tribus tantum angulis planis formetur; seu si tres tantum acies in eo concurrant, tum vnica sectione a corpore abscindetur, hocque modo vnica pyramis triangularis auferetur.

COROLL. 3.

4. Si angulus solidus O a quatuor angulis planis formetur,

formetur, totidemque acies in eo concurrant, tum ad eum obtruncandum duae pyramides triangulares resecari debent. Hoc autem duplici modo fieri poterit; nam duae pyramides resecandae erunt vel OABC et OACD, vel OABD et OBCD. Ac nisi puncta A, B, C, D fuerint in eodem plano, inde solidum residuum diuersam accipiet figuram. Fig. 3.

COROLL. 4.

5. Si angulus solidus a quinque angulis planis formetur, rectaeque in eo coeuntes ad quinque alios angulos solidos porrigantur, tum angulus O resecabitur tribus pyramidibus triangularibus abscindendis, hocque quinque diuersis modis fieri poterit, qui diuersa quoque residua relinquant, nisi quinque anguli solidi vicini fuerint in eodem plano siti.

COROLL. 5.

6. Cum igitur ista vnius anguli solidi resectio in quolibet corporis propositi angulo suscipi queat, eaque nisi tres tantum anguli plani ad angulum solidum formandum concurrant, pluribus modis institui possit, patet, quodlibet corpus solidum, nisi iam sit pyramis triangularis, pluribus modis vno angulo solido mutilari posse.

COROLL. 6.

7. Quotcunque ergo corpus propositum habuerit angulos solidos, dum hoc modo eorum numerus continuo vnitate diminuitur, tandem cum quatuor tantum an-

guli solidi superfuerint, id in pyramidem triangularem erit redactum, et quoniam singulae partes abscissae sunt pyramides triangulares, hoc modo totum corpus in pyramides triangulares dissecabitur.

SCHOLION.

8. Si in solido proposito numerus angulorum solidorum sit $= S$, postquam modo indicato vnus eorum fuerit resectus, in corpore residuo numerus angulorum solidorum erit $= S - 1$. In qua diminutione cum vis propositionis contineatur, ea pluribus casibus exceptione indigere videtur; si enim corpus propositum fuerit pyramis triangularis, resecto vno angulo simul tota pyramis aufertur, ita, vt nihil relinquatur. Sectione enim facta secundum planum $A B C$, quod basin pyramidis $O A B C$ constituit simul tota pyramis rescinditur. Verum hoc casu res ita concipi potest, ac si basis $A B C$ relinquatur, quae etsi est figura plana nulla crassitie praedita, tamen instar solidi tribus tantum angulis constantis spectari potest, quod duas hedras, tresque acies habere censendum est; referet scilicet prisma triangulare altitudinis euanescentis, in quo hedrae laterales in nihilum abeant, et basis superior cum suis angulis in basin inferiorem incidat. Hoc autem modo ambae supra memoratae solidorum proprietates in saluo manent; quia enim numerus angulorum solidorum hoc casu fit $S = 3$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = 3$, patet, esse $S + H = A + 2$. Tum vero summa angulorum planorum in vtraque hedra contentorum aequa-

Fig. 4

tur

tur 4 angulis rectis, qui numerus eſt $= 4S - 8$. Idem euenit in omnibus pyramidibus, ſi angulus verticalis O inde reſecatur, vbi tota pyramis ſimul tollitur, tunc autem ſola baſis relinqui concipienda eſt, quae ſi ſit polygonum n laterum, ſpectari poterit inſtar ſolidi, in quo numerus angulorum ſolidorum ſit $S = n$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = n$, ita vt denuo ſit $S + H = A + 2$. Deinde cum vtraque hedra ſit polygonum n laterum, omnes anguli in ambabus contenti aequabuntur $4n - 8 = 4S - 8$ angulis rectis, vti alterum Theorema poſtulat. Etſi autem hi caſus veritati non aduerſantur, tamen in praeſenti negotio non opus eſt ad eos attendere; cum enim propoſitum ſit omnia ſolida ad pyramides triangulares reuocare, ſi ſolidum iam fuerit iſtiusmodi pyramis, reſectione cuiuspiam anguli penitus erit ſuperſedendum; ſin autem ſit pyramis baſin habens plurium laterum, tum non angulum verticalem, ſed quempiam angulorum ad baſin ſitorum inde abſcindi conueniet, qui tribus tantum angulis planis formantur; hoc modo ſemper poſt reſectionem pyramis relinquetur, cuius angulorum ſolidorum numerus vno erit minor, quam ante. Atque generatim quodcunque proponatur ſolidum, ſemper conueniet reſectionem incipi ab angulo ſolido, qui quam pauciſſimis angulis planis ſit formatus, vt ſemper quaedam ſolidi portio ſit remanſura, donec ad pyramidem triangularem perueniatur. Interim tamen vis ſequentium demonſtrationum ab hac limitatione non pendet, quippe quam tantum eum in finem adieci, vt incommodum apparens non verum euitetur.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

9. *Si a corpore proposito angulus quispiam solidus modo ante exposito resecetur, sicque numerus angulorum solidorum vnitate diminuatur, determinare in corpore relicto tam numerum hedrarum, quam numerum acierum, itemque summam omnium angulorum planorum.*

SOLVTIO.

Pro solido proposito sit numerus angulorum solidorum $= S$, numerus hedrarum $= H$, numerus acierum $= A$, et omnium angulorum planorum summa aequetur
Fig. 2. R angulis rectis. Sit iam O angulus solidus resecandus, ita, vt eo resecto in solido reliquo numerus angulorum solidorum futurus sit $= S - 1$; atque vt reliquas solidi remanentis affectiones cognoscamus, contemplemur primo summam angulorum planorum, quam in solido integro ponimus $= R$ angulis rectis. Primo autem resectione anguli O ex computo angulorum planorum egrediuntur omnes anguli in triangulis A O B, B O C, C O D, D O E, E O F, et F O A contenti, quoniam haec triangula a superficie corporis abscinduntur. Sit n numerus horum triangulorum, seu angulorum vicinorum A, B, C, D, etc; atque summa angulorum ablatorum erit $= 2n$ angulis rectis. At abscissis his triangulis eorum loco superficies corporis iam terminabitur triangulis A B C, A C F, C F D, et D F E, quorum numerus illo est binario minor, ideoque $= n - 2$. Cum nunc horum triangulorum anguli superaccedant, eorumque summa sit $= 2n - 4$ angulis rectis, manifestum est, per resectionem anguli

anguli solidi O summam angulorum planorum R primo imminui $2n$ angulis rectis, tum vero iterum augeri $2n - 4$ angulis rectis, ex quo diminutio erit 4 ang. rect. Hinc in solido residuo summa omnium angulorum planorum aequabitur $R - 4$ rectis, sicque quouis angulo solido resecto summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis.

Si omnes hedrae in O concurrentes fuerint triangula, abscissione anguli O cunctae istae hedrae resecantur, quarum numerus si dicatur n; hinc numerus hedrarum H diminuetur numero n; at loco harum hedrarum nouae ex sectione ortae hedrae triangulares in superficie corporis apparebunt, scilicet ABC, ACF, CFD, DFE, quarum numerus est $= n - 2$; hinc numerus hedrarum, qui ante erat H, nunc erit $H - n + (n - 2) = H - 2$. Verum si eueniat, vt horum triangulorum duo pluraue in eodem plano sint sita, veluti si triangula ABC, et ACF sint in eodem plano constituta, ea iam non duas, sed vnicam hedram quadrilateram exhibere censentur, ita vt numerus hedrarum futurus sit $= H - 3$; ac si huius modi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, numerus hedrarum erit $= H - 2 - \mu$. At si hedrarum in O concurrentium non omnes fuerint triangulares, sed vna veluti AOFQP pluribus lateribus constet, manifestum est, resectione trianguli AOF non totam hedram auferri, sed partem reliquam AFQP etiam nunc in censum hedrarum ingredi; ita numerus hedrarum erit $= H - 2 - \mu + 1$; atque si inter hedras in O coeuntes reperiantur ν hedrae non triangulares, numerus hedrarum reliquarum erit $= H - 2 - \mu + \nu$.

Pro

Pro numero acierum, quae post resectionem anguli O supererunt, inuestigando, ponamus primo vt ante, omnes hedras in O conuenientes esse triangula; ac primo quidem ex acierum numero recedent acies O A, O B, O C, O D, etc. quarum numerus est $= n$, earum vero loco de nouo accedent acies A C, C F, F D, quarum numerus est $= n - 3$; sicque acierum numerus erit $= A - n + (n - 3) = A - 3$, si quidem nouae hedrae A B C, A C F, etc. fuerint inuicem inclinatae: At si duae earum A B C, et A C F in eodem plano sint sitae, vt vnicam hedram constituere censeantur, euanescet acies A C, eritque acierum numerus $A - 3 - 1$: ac si huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, vt ante posuimus, numerus acierum erit $= A - 3 - \mu$. Deinde si quaepiam hedrarum angulum O formantium non sit trigonalis, videlicet hedra AOFQP, tum abscissione trianguli AOF noua acies existit AF, quae ante non aderat, vnde numerus acierum hoc casu vnitate augebitur. Ac si, vt ante posuimus, inter hedras in O coeuntes ν hedrae non triangulares reperiantur, numerus acierum in corpore propoposito post resectionem anguli O erit $= A - 3 - \mu + \nu$, cum ante fuisset $= A$. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Quod si ergo solidum hedris planis inclusum vno angulo solido mutiletur, vt angulorum solidorum numerus nunc sit $= S - 1$, cum ante esset $= S$, summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis, seu cum ante fuisset $= R$ angulis rectis, nunc erit $= R - 4$ angulis rectis.

COROLL.

COROLL. 2.

11. Cum numerus hedrarum, qui ante erat $=H$, nunc poſt detruncationem anguli O fit $= H - 2 - \mu + \nu$, patet, fieri poſſe, vt numerus hedrarum maior euadat, id quod eueniet, ſi ſit $\nu > 2 + \mu$, vbi μ et ν eos obtinent valores, qui in ſolutione ſunt aſſignati.

COROLL. 3.

12. Idem patet euenire poſſe in numero acierum, qui cum ante mutilationem anguli O eſſet $= A$, nunc repertus eſt $= A - 3 - \mu + \nu$; qui numerus illo maior eſt, ſi $\nu > 3 + \mu$; hoc ergo caſu multo magis numerus hedrarum augetur.

COROLL. 4.

13. Cum in expreſſionibus $H - 2 - \mu + \nu$, et $A - 3 - \mu + \nu$ litterae μ et ν idem ſignificent, patet, decrementum numeri acierum A vnitate maius eſſe, quam decrementum numeri hedrarum. Ita ſi numerus hedrarum poſt obtruncationem vnius anguli ſolidi fiat $= H - \alpha$, numerus acierum fiet $= A - \alpha - 1$.

COROLL. 5.

14. Hinc ergo differentia inter numerum hedrarum, et numerum acierum, quae initio erat $= A - H$, nunc poſt remotionem vnius anguli ſolidi erit $= A - H - 1$. Haec ſcilicet differentia ſemper vnitate fit minor, vtcunque corpus ratione litterarum μ et ν fuerit comparatum.

SCHOLION.

15. Ex his iam facillime Theorematum ſupra memoratorum demonſtrationes concinnare licebit, quae nulla re inferiores ſint demonſtrationibus in Geometria

 vſitatis

vſitatis, niſi quod hic ob ſolidorum indolem plus imaginationi ſit tribuendum, ſiquidem ſolida ſuper plano depingantur: at ſi huiusmodi figurae corporeae formarentur, omnia aeque clara eſſent futura. Ceterum quae in ſolutione iſtius problematis aſſumſi, per ſe ſunt manifeſta; ſi enim habeatur polygonum A B C D E F, n lateribus terminatum, leuiter attendenti mox patebit, ſi ea figura diagonalibus ducendis in triangula diſſecetur, numerum horum triangulorum fore $= n - 2$, numerumque diagonalium hoc modo ductarum $= n - 3$: quadrilaterum enim vna diagonali in dua triangula, pentagonum duabus diagonalibus in tria triangula, et hexagonum tribus diagonalibus in quatuor triangula diſpertitur, et ita porro.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

16. *In omni ſolido hedris planis incluſo ſumma omnium angulorum planorum, qui in eius hedris exiſtunt, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot ſunt anguli ſolidi, demtis octo; ſeu ſi numerus angulorum ſolidorum ſit* $= S$, *ſumma omnium angulorum planorum aequatur* $4S - 8$ *angulis rectis.*

DEMONSTRATIO.

In ſolido quocunque ſit numerus angulorum ſolidorum $= S$, ſumma autem omnium angulorum planorum aequetur R angulis rectis, ita vt demonſtrari oporteat, eſſe $R = 4S - 8$. Iam modo ante indicato abſcindatur a ſolido vnus angulus ſolidus, vt numerus angulorum ſolidorum, quos habebit, ſit $= S - 1$, et ſumma angulorum

lorum planorum erit $= R - 4$ angulis rectis. Si denuo angulus solidus resecetur, vt reliquorum numerus sit $S - 2$, angulorum planorum summa erit $= R - 8$, atque ita pergendo patebit, pro quouis angulorum solidorum numero summam omnium angulorum planorum fore, vt tabella sequens indicat.

Numerus angulorum solidorum	Summa omnium angulorum planorum
S	R angulis rectis
$S - 1$	$R - 4$
$S - 2$	$R - 8$
$S - 3$	$R - 12$
:	:
:	:
$S - n$	$R - 4n$

Cum igitur hac continua mutilatione peruenerimus ad $S - n$ angulos solidos, summa angulorum planorum erit $= R - 4n$ angulis rectis. At hoc modo tandem peruenietur ad 4 angulos solidos, quo casu corpus abibit in pyramidem triangularem, in qua constat, summam omnium angulorum planorum esse aequalem 8 angulis rectis: hoc est, si sit $S - n = 4$, erit $R - 4n = 8$, seu $R = 4n + 8$. At inde est $n = S - 4$, quo valore hic substituto fiet $R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$, ita vt in quouis solido summa angulorum planorum aequetur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. Q. E. D.

 SCHOLION

SCHOLION.

17. Quanquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, vt cum hoc fuerit demonstratum, simul illius veritas sit euicta, tamen ex problemate praemisso etiam alterius Theorematis demonstratio confici potest sequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

18. *In omni solido hedris planis incluso numerus hedrarum vna cum numero angulorum solidorum, binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Sit in solido quocunque proposito:
numerus angulorum solidorum $= S$
numerus hedrarum - - - $= H$
numerus acierum - - - $= A$
atque ante vidimus, si resectione vnius anguli solidi numerus S vnitate minuatur, vt sit $S-1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram esse $= A-H-1$. Continuata ergo hac mutilatione,

si numerus angulorum solidorum sit,	Ecceſſus numeri acierum super numerum hedrarum erit
S	$A-H$
$S-1$	$A-H-1$
$S-2$	$A-H-2$
$S-3$	$A-H-3$
:	:
:	:
$S-n$	$A-H-n$

Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum solidorum est $= 4$, numerus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, ita vt excessus numeri acierum supra numerum hedrarum futurus sit $= 2$; euidens est, si fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$. Inde ergo est $n = S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; sicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, seu $H + S = A + 2$; vnde constat, in omni solido hedris planis incluso numerum hedrarum H vna cum numero angulorum solidorum S binario superare numerum acierum A. Q. E. D.

SCHOLION.

19. Demonstratis ergo his Theorematibus, elementa Stereometriae, quae ante aliquod tempus explicaui, firmissimis demonstrationibus sunt munita, ita vt elementis Geometriae nihil plane concedant. Verum prima tantum Stereometriae elementa sic in medium attulisse fateor, quibus haec scientia vlterius excolenda superstrui debeat: quippe quae plurimas praeclaras corporum affectiones in se complectitur, quas adhuc omnino ignoramus. Cum autem cuiusque solidi propositi soliditas quaeri soleat, coronidis loco modum tradam, soliditatem cuiusuis pyramidis triangularis inueniendi; cum enim puncto quocunque intra solidum hedris planis inclusum assumto, solidum in tot pyramides resoluatur, quot habet hedras, dum quaelibet hedra basin pyramidis constituit, quaeuis autem pyramis, cuius basis non est triangularis, facile in pyramides triangulares resoluatur; sufficit, pyramidis triangularis soliditatem inuenisse. Quae cum obtineatur, si basis per tertiam

partem altitudinis multiplicetur, ostendam, quem ad modum, si latera pyramidis fuerint data, ex iis soliditas definiri queat; perinde ac area trianguli ex datis tribus lateribus determinari solet.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

20. *Datis sex lateribus seu aciebus pyramidis triangularis, eius soliditatem inuenire.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Sit $ABCD$ pyramidis triangularis, cuius basis triangulum ABC, et vertex D; ac ponantur eius latera: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Iam in hedris ADB, et ADC ex D ad bases oppositas demittantur perpendicula DP, et DQ, et in basi ABC ex punctis P, et Q educantur ad latera AB, et AC normales PO, et QO se mutuo secantes in O, erit recta DO perpendicularis ex vertice D in basin ABC, vnde soliditas pyramidis erit $= \frac{1}{3} DO \times$ aream ABC; at ducta AO, erit $DO = \sqrt{(AD^2 - AO^2)} = \sqrt{(AD^2 - AP^2 - PO^2)}$. Iam ex elementis Geometriae constat, esse, $AP = \frac{aa + dd - ee}{2a}$. et $AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$ Hinc producta QO in S, si angulus BAC vocetur $= \alpha$, erit $QS = AQ \,\text{tang.}\, \alpha$, et $AS = \frac{AQ}{\text{cos.}\, \alpha}$, hinc $PS = \frac{AQ}{\text{cos.}\, \alpha} - AP$. At cum sit $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$, erit $PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{tang.}\, \alpha} = \frac{AQ}{\text{sin.}\, \alpha} - \frac{AP}{\text{tang.}\, \alpha}$, seu $PO = \frac{AQ - AP\, \text{cos.}\, \alpha}{\text{sin.}\, \alpha}$; tum vero $OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{sin.}\, \alpha} = \frac{AQ}{\text{sin.}\, \alpha\, \text{cos.}\, \alpha} - \frac{AP}{\text{sin.}\, \alpha}$, ideoque $QO = QS - OS = AQ \,\text{tang.}\, \alpha$

$- AQ$

$-\frac{AQ}{\sin.\alpha\cos.\alpha}+\frac{AP}{\sin.\alpha}=\frac{AP-AQ\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$. Hinc erit $AO^2=AP^2+PO^2=\frac{AP^2+AQ^2-2AP.AQ\cos.\alpha}{\sin.\alpha^2}$; ideoque $DO^2=\frac{AD^2\sin.\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ\cos.\alpha}{\sin.\alpha^2}$. Verum area trianguli ABC est $=\frac{1}{2}ab\sin.\alpha$, ex quo erit soliditas pyramidis $=\frac{1}{6}ab\sqrt{(AD^2\sin.\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ.\cos.\alpha)}=\frac{1}{6}\sqrt{[aabbdd\sin.\alpha^2-\frac{1}{4}bb(aa+dd-ee)^2-\frac{1}{4}aa(bb+dd-ff)^2+\frac{1}{2}ab(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\cos.\alpha]}$. Deinde ex triangulo ABC est $\cos.\alpha=\frac{aa+bb-cc}{2ab}$, ideoque $\sin.\alpha^2=1-\frac{1}{4aabb}(aa+bb-cc)^2$, quibus valoribus substitutis prodibit soliditas pyramidis:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left(\begin{array}{c}4aabbdd-dd(aa+bb-cc)^2-bb(aa+dd-ee)^2-aa(bb+dd-ff)^2\\+(aa+bb-cc)(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\end{array}\right)}$$

quae terminis euolutis in sequentem abit formam:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left(\begin{array}{c}aaccdd+aabbee+aabbff+aaddff+bbccdd+bbddee\\aaccff+aaeeff+bbccee+bbeeff+ccddee+ccddff\\-aabbcc-aaddee-bbddff-cceeff\\-a^4ff-aaf^4-b^4ee-bbe^4-c^4dd-ccd^4\end{array}\right)}$$

quae adhuc commodius ita exhiberi posse videtur:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l}+aaff(bb+cc+dd+ee)-aaff(aa+ff)-aabbcc\\+bbee(aa+cc+dd+ff)-bbee(bb+ee)-aaddee\\+ccdd(aa+bb+ee+ff)-ccdd(cc+dd)-bbddff\\\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-cceeff\end{array}\right)}$$

Sicque ex datis sex lateribus a, b, c, d, e, f pyramidis triangularis eius soliditas definitur. Q. E. I.

SCHOLION I.

21. Quo ratio, qua in hac expressione latera a, b, c, d, e, f inter se combinantur, clarius perspiciatur, notandum est, ex iis quatuor formari triangula, scilicet

Δ ABC constat lateribus a, b, c
Δ ABD - - - - a, d, e
Δ ACD - - - - b, d, f

Δ BCD

$\triangle$ BCD - - - - c, e, f

vnde patet, latus a cum fingulis reliquorum ad triangula conftituenda concurrere, praeter quam cum latere f, quamob rem haec latera a et f disiuncta appellabo, quia inter fe non iunguntur; fimili modo latera b et e erunt disiuncta, itemque latera c et d.

Occurrunt ergo poft fignum radicale primo termini ex lateribus disiunctis formati $aaff$, $bbee$, $ccdd$, qui funt multiplicati per fummam quadratorum reliquorum, deinde iidem termini negatiue fumti multiplicantur per fummam fuorum quadratorum, hincque denique fubtrahuntur producta ex quadratis ternorum laterum cuiusque trianguli.

SCHOLION 2.

22. Formula quoque pro foliditate pyramidis inveniri poteft aliquanto fimplicior, fi tria tantum latera in vno angulo folido coeuntia dantur, vna cum angulis planis, quos ibi conftituunt.

Sint enim tria latera in angulo folido A coeuntia

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d$$

deinde anguli plani:

$$BAC = p; \; BAD = q; \; CAD = r.$$

Atque ex his foliditas pyramidis erit

$$\tfrac{1}{6}\, abd \sqrt{(1 - \mathrm{cof.}\, p^2 - \mathrm{cof.}\, q^2 - \mathrm{cof.}\, r^2 + 2\, \mathrm{cof.}\, p \,.\, \mathrm{cof.}\, q \,.\, \mathrm{cof.}\, r)}$$

quae reducitur ad formam fequentem:

$$\tfrac{1}{3}\, abd \sqrt{\mathrm{fin.}\, \tfrac{p+q+r}{2}\, \mathrm{fin.}\, \tfrac{p+q-r}{2}\, \mathrm{fin.}\, \tfrac{p+r-q}{2}\, \mathrm{fin.}\, \tfrac{q+r-p}{2}};$$

vnde patet, vt area prodeat realis, trium angulorum planorum p, q, et r, in angulo quouis folido coeuntium binos fimul fumtos tertio maiores effe debere.

DE MO-

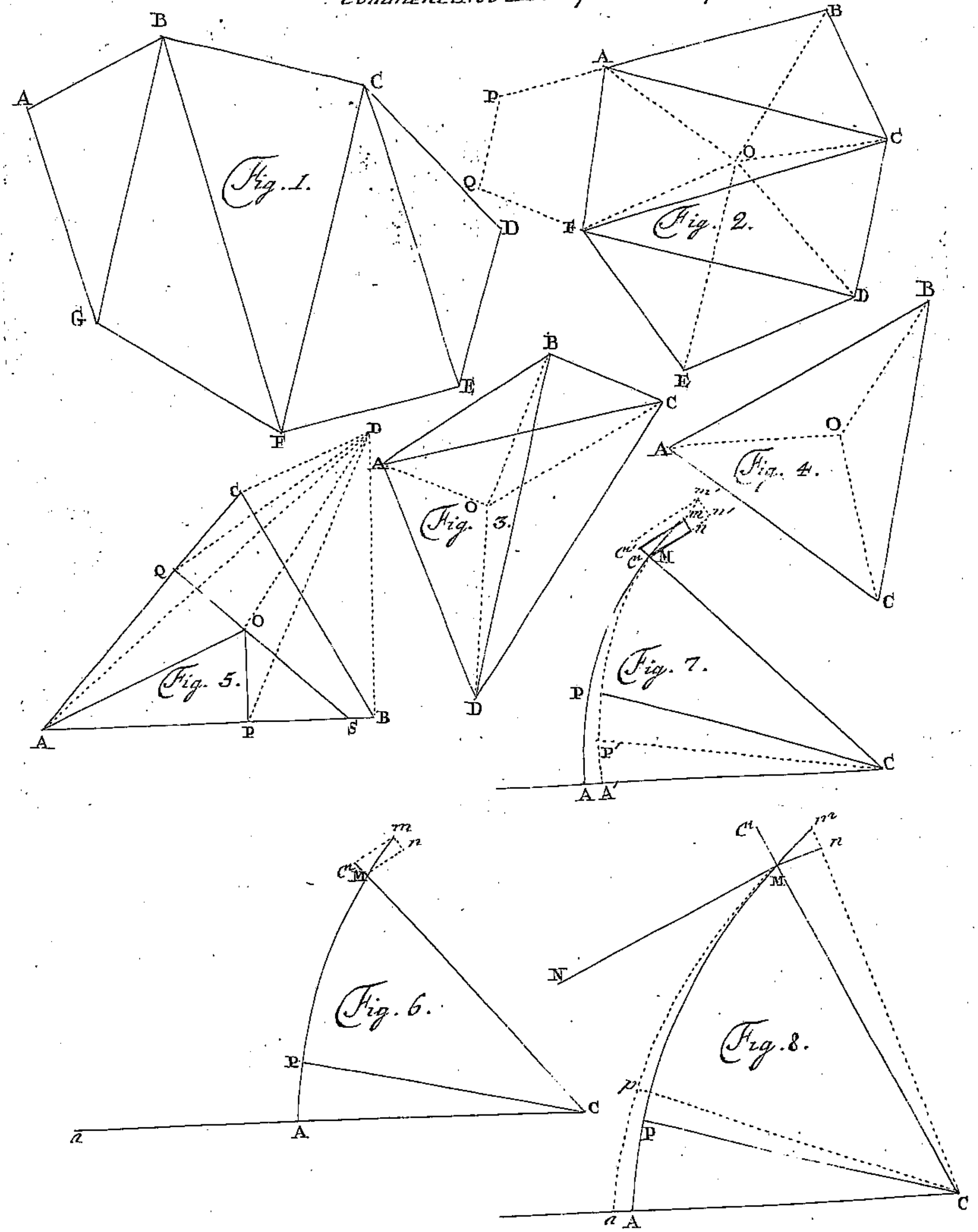
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.