PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

La somma degli angoli d' ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

Poichè 1. ciascun angolo di un triangolo sferico è minore di due angoli retti (*vedete lo Scolio seguente*); dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2. La misura di ciascun angolo d' un triangolo sferico è uguale alla semi-circonferenza meno il lato corrispondente del triangolo polare*; dunque la somma * 10.
dei tre angoli ha per misura tre semi-circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora questa ultima somma è minore di una circonferenza*; * 4.
dunque togliendola da tre semi-circonferenze, il resto sarà maggiore d' una semi-circonferenza; che è la misura di due angoli retti; dunque, la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

Corollario I. La somma degli angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei: dessa varia da due angoli retti fino a sei, senza poter essere uguale nè all' uno, nè all' altro limite. Quindi è che due angoli dati non fanno conoscere il terzo.

Corollario II. Un triangolo sferico può avere due, o tre angoli retti, o due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC è *bi-rettangolo*, cioè se ha due Fig. 235.
angoli retti B, e C, il vertice A sarà il polo della base BC, ed i lati AB, AC saranno dei quadranti. * 6.

Se in oltre l' angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *tri-rettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, ed i suoi lati dei quadranti. Il triangolo tri-rettangolo è contenuto otto volte nella superficie della sfera; ciò si vede per mezzo della fig. 236, supponendo l' arco MN uguale ad un quadrante.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede,

e conformemente alla Definizione VI. che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori della semi-circonferenza; allora ne segue che gli angoli sono sempre minori di due angoli retti; perchè se il lato AB
Fig. 224. è minore della semi-circonferenza, come pure AC, questi archi deggiono essere prolungati ambedue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD, presi insieme equivalgono a due angoli retti; dunque l'angolo ABC è da se solo minore di due angoli retti.

Osserveremo però che esistono dei triangoli sferici, di cui certi lati sono maggiori della semi-circonferenza, e certi angoli maggiori di due angoli retti. Perchè, se si prolunga il lato AC in una circonferenza intera ACE, ciò che resta togliendo dalla semi-sfera il triangolo ABC, è un nuovo triangolo, che si può anch' esso indicare con ABC, e i di cui lati sono AB, BC, AEDC. Si vede dunque che il lato AEDC è maggiore della semi-circonferenza AED; ma nel medesimo tempo l' angolo opposto in B supera due angoli retti di quanto è l' angolo CBD.

Del resto si sono esclusi dalla definizione i triangoli, i di cui lati ed angoli sono sì grandi, perchè la loro risoluzione, o la determinazione delle loro parti, si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione suddetta. Infatti si vede facilmente che, se si conoscono gli angoli e i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente gli angoli e i lati del triangolo del medesimo nome, ch' è il resto della semi sfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Fig. 236. *Il fuso* AMBNA *sta alla superficie della sfera come l' angolo* MAN *di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l' arco* MN, *che misura quell' angolo, sta alla circonferenza.*

Supponiamo primieramente che l' arco MN stia alla circonferenza MNPQ in un rapporto razionale per esemp'o, come 5 sta a 48. Si dividerà la circonferenza MNPQ in 48 parti uguali, di cui MN ne conterrà 5; congiungendo dipoi il polo A, ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno 48 triangoli nella semi-sfera AMNPQ, che saranno tutti uguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti uguali. La sfera intera conterrà dunque 96 di questi triangoli parziali, ed il fuso AMBNA ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla superficie della sfera come 10 sta 96, o come 5 sta a 48, cioè come l' arco MN sta alla circonferenza.

Se l' arco MN non è commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento, di cui si sono già veduti molti esempj, che il fuso sta sempre alla superficie della sfera come l' arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

Corollario II. Si è già veduto che la superficie intera della sfera è uguale a otto triangoli tri-rettangoli,* dunque, se si prende per unità l' area di uno di questi triangoli, la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Posto ciò, la superficie del fuso, il cui angolo è A, sarà esprèssa da 2A (se però l' angolo A è valutato nella supposizione che l' angolo retto sia ugule all' unità); poichè si ha 2A : 8 :: A : 4. Vi sono qui dunque due unità differenti, l' una per gli angoli, ch' è l' angolo retto; l' altra per le superficie, che è il triangolo sferico tri-rettangolo, ossia quello di cui tutti gli angoli sono retti, ed i lati sono quarte parti di circonferenza.

* 19.

Scolio. L' unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB sta al solido intero della sfera come l' angolo A sta a quattro angoli retti. Poichè essendo uguali i fusi, le unghie sferiche saranno parimente uguali: dunque due unghie sferiche stanno fra loro come gli angoli formati dai piani che le comprendono.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA

Due triangoli sferici simmetrici sono eguali in superficie.

Fig. 237. Siano ABC, DEF due triangoli simmetrici, vale a dire due triangoli, che hanno i lati eguali, cioè AB =DE, AC=DF, BC=EF, e che tuttavia non possono essere soprapposti; dico che la superficie ABC è uguale alla superficie DEF.

Sia P il polo del piccolo circolo, che passerebbe per i tre punti A, B, C (1); da questo punto siano condotti gli archi uguali* PA, PB, PC; al punto F fate
* 6.
l'angolo DFQ=ACP, l'arco FQ=CP, e tirate DQ, EQ.

I lati DF, FQ, sono uguali ai lati AC, CP; l'angolo DFQ=ACP; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono eguali in tutte le loro parti*; dunque il lato DQ=
* 12.
AP, e l'angolo DQF=APC.

Nei triangoli proposti DFE, ABC gli angoli DFE, ACB, opposti ai lati uguali DE, AB essendo uguali,*
* 11.
se si tolgono gli angoli DFQ, ACP, uguali per costruzione, resterà l'angolo QFE eguale a PCB. D'altronde i lati QF, FE sono eguali ai lati PC, CB; dunque i due triangoli FQE, CPB sono eguali in tutte le loro parti; dunque il lato QE=PB, e l'angolo FQE=CPB.

Se si osserva adesso che i triangoli DFQ, ACP, che hanno i lati respettivamente eguali, sono nel medesimo tempo isosceli, si vedrà che possono essere soprapposti l'uno all'altro; perchè, avendo situato PA sopra il suo eguale QF, il lato PC cadrà sopra il suo eguale QD, e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque sono eguali; dunque la superficie DQF=APC. Per una simil ragione, la superficie FQE=

(1) Il circolo, che passa per i tre punti A, B, C, o che è circoscritto al triangolo ABC, non può essere che un piccolo circolo della sfera; perchè, se questo fosse un gran circolo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati in un medesimo piano, e il triangolo ABC si ridurrebbe ad uno dei suoi lati.

CPB, e la superficie DQE=APB; dunque si ha DQF+FQE—DQE=APC+CPB—APB; ovvero DFE=ABC; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono eguali in superficie.

Scolio. I poli P, e Q potrebbero essere situati al didentro dei triangoli ABC, DEF; allora, bisognerebbe riunire i tre triangoli DQF, FQE, DQE affine di comporre il triangolo DEF; e similmente bisognerebbe riunire i tre triangoli APC, CPB, APB, per comporne il triangolo ABC: d'altronde la dimostrazione e la conclusione sarebbero sempre le stesse.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Se due circoli grandi AOB, COD, *si tagliano come si voglia nell' emisfero* AOCBD, *la somma dei triangoli opposti* AOC, BOD, *sarà uguale al fuso*, *il cui angolo è* BOD. Fig. 238.

Poichè, prolungando gli archi OB, OD, nell' altro emisfero finchè s' incontrino in N, OBN sarà una semi-circonferenza, come pure AOB; togliendo da ambo le parti OB, si avrà BN=AO. Per una simile ragione si ha DN=CO, e BD=AC; dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati respettivamente uguali; d' altronde la loro posizione è tale ch' essi sono simmetrici l' uno dell' altro; dunque sono eguali in superficie*, e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente al fuso OBNDO, il cui angolo è BOD. *21.

Scolio. E' chiaro pure che le due piramidi sferiche, che hanno per basi i triangoli AOC, BOD, prese insieme, equivalgono all' unghia sferica, di cui l' angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

La superficie d' un triangolo sferico qualunque ha *per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.*

Fig. 239. Sia ABC il triangolo proposto; prolungate i suoi lati finchè incontrino il gran circolo DEFG condotto a piacere fuor del triangolo. In virtù del teorema precedente, i due triangoli ADE, AGH presi insieme, equivalgono al fuso, il cui angolo è A, e che ha per
* 20. misura 2A*; laonde si avrà $ADE+AGH=2A$: per una simil ragione, $BGF+BID=2B$, $CIH+CFE=2C$. Ma la somma di questi sei triangoli supera la superficie della semi-sfera di due volte quella del triangolo ABC; d' altronde la semi-sfera è rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è uguale a $2A+2B+2C-4$, e per conseguenza $ABC=A+B+C-2$: dunque ogni triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli tri-rettangoli, od ottave parti di sfera, ciascuna delle quali è l' unità di su-
* 20. perficie*, saranno contenute nel triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli sono tutti uguali a $^4/_3$ d' un angolo retto, allora i tre angoli insieme varranno 4 angoli retti, ed il triangolo proposto sarà rappresentato da $4-2$, ovvero 2: essa dunque sarà uguale a due triangoli tri-rettangoli, o al quarto della superficie della sfera.

Corollario II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso, il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$; parimente la piramide sferica, la cui base è ABC, equivale all' unghia sferica il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica, che ha per base ABC, si paragona colla piramide tri-rettangola, e ne resulta la medesima proporzione. L' angolo solido al vertice della piramide si paragona parimente coll' angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola: infatti il paragone si stabilisce mediante la coincidenza delle parti. Ora, se le basi delle piramidi coincidono, è chiaro che le piramidi stesse coincideranno, come pure gli angoli solidi al loro vertice. Da ciò resultano più conseguenze.

1. Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona può dividersi in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni, che loro servono di basi.

2. Gli angoli solidi al vertice delle medesime piramidi stanno ugualmente nella proporzione delle basi; dunque, per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare i loro vertici al centro di due sfere uguali; e questi angoli solidi staranno fra loro come le superficie dei poligoni sferici intercetti fra i loro piani o facce.

L' angolo al vertice della piramide tri-rettangola è formato da tre piani perpendicolari fra loro: quest'angolo, che si può chiamare *angolo solido retto*, è adattatissimo per servire d' unità di misura agli altri angoli solidi.

Posto ciò il medesimo numero che dà la superficie d' un poligono sferico, darà la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esempio, se la superficie d'un poligono sferico è $^3/_4$, vale a dire, se è i $^3/_4$ del triangolo tri-rettangolo, l' angolo solido corrispondente sarà pure i $^3/_4$ dell' angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

La superficie d' un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli, meno il prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due.

Da un medesimo vertice A siano condotte a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati meno due. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due an- Fig. 240.

goli retti; ed è chiaro che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli del poligono, dunque la superficie del poligono è uguale alla somma dei suoi angoli diminuita di tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati meno due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli d' un poligono sferico, n il numero dei suoi lati; essendo supposto l' angolo retto per unità; la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$, ovvero $s-2n+4$.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Sia S *il numero degli angoli solidi di un poliedro,* H *il numero delle sue facce,* A *il numero delle sue costole; dico che avremo sempre* $S+H=A+2$.

Prendete al di dentro del poliedro un punto, da cui condurrete delle linee rette ai vertici di tutti i suoi angoli; immaginate dipoi che dal medesimo punto, come centro, si descriva una superficie sferica, che sia incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; congiungete questi punti con archi di circoli grandi, in modo che si formino sulla superficie della sfera dei poligoni corrispondenti, ed uguali in numero alle facce
Fig. 240. del poliedro. Sia ABCDE uno di questi poligoni, e sia n il numero dei suoi lati: la sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di ciascuno degli altri poligoni sferici, e si sommino tutte insieme, se ne conchiuderà che la loro somma, o la superficie della sfera, rappresentata da 8, è uguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni, meno due volte il numero dei loro lati, più 4 preso tante volte quante sono le facce del poliedro. Ora, siccome tutti gli angoli, che si formano intorno ad un medesimo punto A, equivalgono a quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è uguale a 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono: dessa è dunque uguale a 4S. Di più il doppio del numero dei lati AB, BC,

CD, ec. è uguale al quadruplo del numero delle costole, ossia $=4A$, giacchè la medesima costola serve di lato a due facce; dunque si avrà $8=4S-4A+4H$; ovvero, prendendo il quarto di ciascun membro, $2=S-A+H$; dunque $S+H=A+2$.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli piani, che formano gli angoli solidi d' un poliedro, è uguale a tante volte quattro angoli retti quante unità vi sono in* $S-2$, *essendo* S *il numero degli angoli solidi del poliedro.*

Poichè, se si considera una faccia, il cui numero di lati sia n, la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n-4$ angoli retti.* Ma la somma di tutti i $2n$, * 25. 1.
o il doppio del numero dei lati di tutte le facce, $=4A$, e 4 preso tante volte quante sono le facce $=4H$; dunque la somma degli angoli di tutte le facce $=4A-4H$. Ora, pel teorema che abbiamo già dimostrato, si ha $A-H=S-2$, e per conseguenza $4A-4H=4(S-2)$. Dunque *la somma degli angoli piani* ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Di tuttti i triangoli sferici formati con due lati dati Fig. 241. *a*
CB, CA, *ed un terzo a piacimento, il più grande* ABC e 241. *b*
è quello, nel quale l' angolo C, *compreso fra i lati dati, è uguale alla somma degli altri due angoli* A, *e* B.

Prolungate i due lati AC, AB fino al loro incontro in D; avrete un triangolo sferico BCD, nel quale l'angolo DBC sarà parimente eguale alla somma degli altri due angoli BDC, BCD; perchè $BCD+BCA$ essendo uguale a due angoli retti, come pure $CBA+CBD$, si ha $BCD+BCA=CBA+CBD$: aggiungendo da ambe le parti $BDC=BAC$, si avrà $BCD+BCA+BDC=CBA+CBD+BAC$. Ora, per ipotesi, $BCA=CBA+BAC$; dunque $CBD=BCD+BDC$.

Conducete BI, che faccia l' angolo $CBI=BCD$, e per conseguenza $IBD=BDC$; i due triangoli IBC, IBD saranno isosceli, e si avrà $IC=IB=ID$; dunque il punto I,