

Problemi tratti dall'Algebra di Eulero (compilazione e traduzione a cura del prof. G. Artico)

NOTA: nel 1767 Eulero compose il trattato, in tedesco, dal titolo "Vollständige Anleitung zur Algebra" [*Introduzione completa all'algebra*], un testo più volte ristampato in varie lingue e usato nelle scuole europee. Nella biblioteca del Centro Morin esiste una traduzione inglese del 1840 del Rev. John I. Hewlett, da cui sono tratti i problemi riportati qui sotto. Nonostante l'età, il testo è di sicuro interesse per chi insegna nel biennio delle scuole superiori, e per parecchi aspetti è migliore di molti manuali in circolazione. In particolare, è da rilevare l'uso estensivo dei problemi per l'introduzione dei concetti e delle regole, abitudine ormai perduta nella didattica, benché proclamata nei programmi.

Abbiamo compilato questa raccolta per metterla a disposizione dei docenti che volessero farne uso nelle loro classi. I problemi sono per lo più di carattere economico, e risultano assenti quelli di geometria. Alcuni sono comuni anche nei manuali attuali, ma altri ricreano l'atmosfera dell'epoca di Eulero e si prestano ad interessanti digressioni storiche, per chi volesse approfittarne. Nel libro una parte dei problemi è risolta e commentata [li abbiamo indicati come Problemi risolti], mentre altri sono dati come esercitazione [Esercizi]. La numerazione dei capitoli e degli esercizi segue quella del libro, in modo che chi è interessato possa risalire all'originale.

Sezione IV

Capitolo 3 - Equazioni di primo grado

Problemi risolti

1. Dividere 7 in due parti tali che la maggiore superi di 3 la minore.
2. Dividere a in due parti tali che la maggiore superi di b la minore.
3. Un padre lascia 1600 sterline da dividere tra i tre figli in questo modo: il più vecchio deve avere 200 sterline più del secondo, e questi deve avere 100 sterline più del più giovane. Trovare quanto spetta ad ognuno.
4. Un padre lascia ai suoi quattro figli 8000 L., e dispone che il più vecchio abbia il doppio del secondo meno 100 L., il secondo abbia il triplo del terzo meno 200 L. e il terzo abbia il quadruplo del quarto meno 300 L. Quanto avrà ognuno ?
5. Un uomo lascia 11000 corone da dividere tra la vedova, due figli maschi e tre femmine. Vuole che la vedova abbia il doppio di ognuno dei figli maschi e che ogni maschio riceva il doppio di ogni figlia femmina. Quanto avrà ognuno ?

6. Un padre dispone nel testamento che i suoi tre figli si dividano l'eredità in questo modo: il più vecchio abbia 1000 corone in meno della metà dell'intero patrimonio; il secondo riceva 800 corone in meno della terza parte del patrimonio; e il terzo abbia 600 corone in meno della quarta parte del patrimonio. Trovare l'ammontare del patrimonio e la parte di ognuno.

7. Un padre lascia quattro figli, che si spartiscono il patrimonio in questo modo: il primo prende metà del patrimonio, meno 3000 L., il secondo prende un terzo, meno 1000 L., il terzo prende esattamente un quarto del patrimonio. Trovare l'ammontare del patrimonio e le somme toccate ad ogni figlio.

8. Trovare un numero tale che se lo aggiungiamo alla sua metà, il risultato supera 60 della stessa quantità che manca al numero per arrivare a 65.

9. Dividere il numero 32 in due parti tali che se il minore viene diviso per 6 e il maggiore per 5, i due quozienti sommati danno 6.

10. Trovare un numero tale che il suo quintuplo è inferiore a 40 della stessa quantità che manca al numero per arrivare a 12.

11. Dividere 25 in due parti tali che la maggiore sia uguale a 49 volte la minore.

12. Dividere 48 in nove parti, in modo che ogni parte sia sempre $\frac{1}{2}$ più grande di quella che la precede.

13. Trovare una progressione aritmetica il cui primo termine è 5, l'ultimo 10 e la somma dei termini 60.

14. Trovare un numero tale che sottraendogli 1, raddoppiando il risultato, sottraendo a questo 2 e dividendo il resto per 4, risulti un numero di una unità inferiore a quello cercato.

15. Ho comprato alcune braccia di stoffa a 7 corone per 5 braccia, e ho rivenduto tutto al prezzo di 11 corone per 7 braccia, guadagnando così 100 corone. Quante braccia di stoffa ho comprato ?

16. Una persona compra 12 pezzi di stoffa per 140 L. ; di essi 2 sono bianchi, 3 neri e 7 blu: inoltre, un pezzo di stoffa nera costa 2 L. più di un pezzo di stoffa bianca, e un pezzo blu costa 3 L. più di un pezzo nero.

Trovare il prezzo di ogni tipo di stoffa.

17. Un uomo che ha comprato alcune noci moscate, dice che tre di esse costano più di 4 penny quanto quattro di esse costano più di 10 penny. Si chiede il prezzo di una noce.

18. Una persona ha due tazze d'argento, e solo un coperchio. La prima tazza pesa 12 onces; e quando le si mette il coperchio pesa il doppio dell'altra tazza;

mentre quando l'altra tazza ha il coperchio, pesa il triplo della prima. Trovare il peso delle tazze e del coperchio.

19. Un banchiere ha due tipi di cambio: ci vogliono a pezzi del primo per fare una corona, e b pezzi del secondo per fare lo stesso. Ora, una persona vuole avere c pezzi per una corona. Quanti pezzi di ogni tipo deve dargli il banchiere ?

20. Un banchiere ha due tipi di monete per il cambio: ci vogliono 10 pezzi della prima per fare una corona, e 20 pezzi della seconda per fare lo stesso. Ora, una persona vuole avere 17 pezzi per una corona. Quanti pezzi di ogni tipo deve dargli il banchiere ?

21. Un padre lascia alla sua morte parecchi figli, che si dividono l'eredità in questo modo: il primo riceve 100 sterline e la decima parte del rimanente; il secondo riceve 200 sterline e la decima parte del rimanente; il terzo 300 sterline e la decima parte del rimanente; e così via per gli altri figli. Alla fine si scopre che tutti i figli hanno avuto la stessa quantità. Trovare quanto valeva l'eredità, quanti sono i figli e quanto ha avuto ogni figlio.

Esercizi

1. Trovare un numero tale che aggiungendogli la metà, un terzo e un quarto di se stesso risulta 50.

2. Una persona a cui è stata chiesta l'età, replica che $\frac{3}{4}$ della sua età moltiplicati per $\frac{1}{12}$ dell'età dà un prodotto uguale all'età. Quanti anni ha ?

3. La somma di 660 L. fu raccolta tra quattro persone, A, B, C, D. B contribuì il doppio di A; C tanto come A e B insieme; e D tanto come B e C insieme. Quale fu il contributo di ognuno ?

4. Trovare un numero la cui terza parte supera di 12 la sua quarta parte.

5. Qual è la somma di denaro tale che sommando la sua terza, quarta e quinta parte si ottiene 94 sterline ?

6. In un miscuglio di rame, stagno e piombo, metà del tutto meno 16 gr. era rame; un terzo del tutto meno 12 gr. era stagno; un quarto del tutto più 4 gr. era piombo. Trovare le quantità dei tre metalli.

7. Un conto di 120 sterline (1 sterlina=20 scellini) fu pagato con ghinee (1 ghinea=21 scellini) e moidores (1 moidore=27 scellini), e il numero di pezzi totale fu 100. Trovare quante monete c'erano di ogni tipo.

8. Trovare due numeri in proporzione di 2 a 1, in modo che se ad entrambi si aggiunge 4 le due somme si trovano in proporzione di 3 a 2.

9. Un commerciante destina annualmente 100 L. per le spese di famiglia, e ogni anno aumenta la parte rimasta di un terzo di essa. Alla fine di tre anni il suo capitale risulta raddoppiato. Quanto era il capitale iniziale ?
10. Fu pescato un pesce la cui coda pesava 9 libbre. La testa pesava come la coda più metà del tronco; e il tronco pesava come coda e testa insieme: qual era il peso complessivo del pesce ?
11. Un tale aveva un affitto di 99 anni; essendogli stato chiesto quanti anni fossero già trascorsi, rispose che due terzi del tempo trascorso equivalevano ai $\frac{4}{5}$ di quello ancora da passare. Si chiede quanto tempo era già trascorso.
12. Si domanda di dividere il numero 48 in due parti tali che la prima superi il 20 di una quantità tripla di quella che manca alla seconda per arrivare a 20.
13. Un tale prende in affitto 25 acri di terra a 7 sterline e 12 scellini all'anno: consistendo la terra in due appezzamenti di diverso tipo, paga il migliore a 8 scellini per acro, e il peggiore a 5. Trovare l'estensione dell'appezzamento migliore. (1 sterlina=20 scellini)
14. Una cisterna, che sarebbe riempita in 12 minuti da due rubinetti insieme, può essere riempita in 20 minuti da uno dei rubinetti da solo. Si chiede quanto impiegherebbe da solo l'altro rubinetto.
15. Trovare due numeri, la cui somma sia s , e che stiano tra loro come a sta a b .
16. Una nave corsara che corre alla velocità di 20 miglia all'ora, scopre una nave lontana 18 miglia che si muove alla velocità di 8 miglia all'ora: si chiede di trovare quante miglia la nave può percorrere prima di essere raggiunta.
17. Un signore distribuendo denaro tra alcuni poveri, trovò che gli servivano dieci soldi per poterne dare 5 a testa; perciò egli diede solo quattro soldi a ognuno e trovò che gli rimanevano cinque soldi: si chiede di trovare quanti soldi aveva e quanti poveri c'erano.
18. Ci sono due numeri la cui somma è la sesta parte del loro prodotto, e il maggiore sta al minore come 3 sta a 2. Trovare i due numeri.
19. Trovare tre numeri in modo che il primo sommato con la metà degli altri due, il secondo sommato con un terzo degli altri due e il terzo sommato con un quarto degli altri due, dia 34.
20. Trovare un numero di tre cifre, le cui cifre sono in progressione aritmetica: se il numero viene diviso per la somma delle sue cifre, il quoziente sarà 48; e se dal numero si sottrae 198, le cifre saranno invertite.
21. Trovare tre numeri, in modo che la metà del primo, un terzo del secondo, e un quarto del terzo faccia 62: un terzo del primo, un quarto del secondo e un

quinto del terzo faccia 47; e un quarto del primo, un quinto del secondo e un sesto del terzo, faccia 38.

22. Se A e B, insieme, possono compiere un lavoro in otto giorni; A e C insieme in nove giorni; e B e C in dieci giorni; quanti giorni impiegherebbe ogni persona, da sola, a compiere lo stesso lavoro ?

23. Qual è la frazione che diventa uguale a un terzo, se si aggiunge una unità al numeratore; ma al contrario, diventa un quarto se si aggiunge una unità al denominatore ?

24. Le dimensioni di una stanza rettangolare sono tali che se fosse stata due piedi più larga e tre piedi più lunga sarebbe stata più grande di 64 piedi quadrati; ma se fosse stata tre piedi più larga e due piedi più lunga, allora sarebbe stata più grande di 68 piedi quadrati: trovare la lunghezza e la larghezza della stanza.

25. Una lepre è 50 salti davanti a un levriero, e fa 4 salti quando il levriero ne fa 3; ma due salti del levriero equivalgono a tre salti della lepre: quanti salti deve fare il levriero per prendere la lepre ?

capitolo 4 - Sistemi di equazioni lineari

Problemi risolti

1. Trovare due numeri la cui somma sia 15 e la differenza 7.

2. Trovare due numeri la cui somma sia a e la differenza sia b .

3. Un mulo e un asino portavano dei bagagli pesanti varie centinaia di chili. L'asino si lamentava di questo e disse al mulo: "Mi basta soltanto un centinaio di chili del tuo carico per rendere il mio doppio del tuo"; e il mulo gli rispose: "Ma se tu dai a me un centinaio di chili del tuo carico io sarò caricato il triplo rispetto a te". Quante centinaia di chili portava ognuno?

4. Tre persone A, B, C giocano insieme; nella prima partita, A perde in favore di ognuno degli altri due tanto quanto ognuno di loro aveva. Nella partita successiva, B perde in favore degli altri due tanto quanto ognuno di loro aveva. Infine, nella terza partita, A e B guadagnano ognuno, da C, tanto denaro quanto ne avevano prima. Alla fine ognuno scopre di avere 24 ghinee. Trovare quanto aveva ognuno inizialmente. [*Eulero fa notare che il problema si può risolvere anche senza usare equazioni, con un procedimento a ritroso*].

5. Due persone hanno insieme un debito di 29 pistole. Ambedue hanno del denaro, ma nessuna delle due ne ha abbastanza per permetterle di pagare, singolarmente, l'intero debito. Il primo debitore dice perciò al secondo: "Se mi dai due terzi del tuo denaro, posso immediatamente pagare il debito". Il secondo

risponde: " Anch'io potrei pagare il debito se tu mi dessi tre quarti del tuo denaro ". Trovare quanto possedeva ognuno.

6. Tre fratelli comprano una vigna per 100 ghinee. Il più giovane dice che potrebbe pagarla tutta da solo se il secondo gli desse metà di quanto ha; il secondo dice che se il più vecchio gli desse soltanto un terzo del suo denaro, potrebbe comprare la vigna da solo; da ultimo, il più vecchio chiede solo un quarto del denaro del più giovane per pagare la vigna da solo. Quanto denaro ha ognuno?

7. Un capitano ha tre compagnie, una di Svizzeri, una di Scozzesi e una terza di Sassoni. Egli vuole attaccare con parte di queste truppe, e promette un premio di 901 corone, a questa condizione; ossia, che ogni soldato della compagnia che va all'assalto riceverà una corona e il resto del denaro sarà equamente distribuito tra le altre due compagnie. Ora, si trova che: se gli Svizzeri vanno all'assalto, ogni soldato delle altre compagnie riceverà mezza corona; se gli Scozzesi vanno all'assalto, ognuno degli altri riceverà un terzo di corona; se i Sassoni assaltano, ognuno degli altri riceverà un quarto di corona. Trovare il numero di uomini in ogni compagnia.

Capitolo 5 - Risoluzione di equazioni quadratiche pure.

Problemi risolti

1. Trovare un numero tale che moltiplicando la sua metà per la sua terza parte risulti 24.

2. Trovare un numero tale che aumentandolo di 5 e diminuendolo di 5 e moltiplicando i due risultati risulti 96.

3. Trovare un numero tale che aumentandolo di 10 e diminuendolo di 10 e moltiplicando i due risultati risulti 51.

4. Tre persone, che stavano giocando, terminano; il denaro del primo è nel rapporto di 7 a 3 col denaro del secondo; quello del secondo nel rapporto di 17 a 15 con quello del terzo. Inoltre, se moltiplichiamo il denaro del primo per il denaro del secondo, e il denaro del secondo per il denaro del terzo, e infine il denaro del terzo per quello del primo, la somma di questi tre prodotti sarà 3830 e $\frac{2}{3}$. Quanto denaro ha ciascuno?

5. Una compagnia di mercanti nomina un agente ad Arcangelo. Ognuno di loro contribuisce all'affare, che hanno in vista, con una somma in corone dieci volte il numero dei soci e il profitto dell'agente è fissato in percentuale come il doppio del numero di soci. Inoltre, se la centesima parte del suo guadagno totale viene moltiplicata per $2+\frac{2}{9}$, questo dà il numero di soci, che è da trovare.

Esercizi

1. Prendi un numero, aggiungigli 20 e fa' il quadrato del risultato; poi togligli 10 e fa' il doppio del quadrato del risultato. Somma i due risultati parziali e avrai 17475. Qual è il numero ?
2. Trovare due numeri che stanno tra loro come 3 sta a 5 e i cui quadrati sommati insieme fanno 1666.
3. Dati la somma $2a$ e la somma dei quadrati $2b$ di due numeri, trovare i numeri.
4. Dividere il numero 100 in due parti tali che la somma delle loro radici quadrate sia 14.
5. Trovare tre numeri in modo che la somma dei primi due moltiplicata per il terzo dia 63; la somma del secondo e terzo moltiplicata per il primo dia 28; e la somma del primo e del terzo moltiplicata per il secondo dia 55.
6. Trovare due numeri tali che la loro somma sta al maggiore come 11 sta a 7 e la differenza dei loro quadrati sia 132.

Capitolo 6 - Equazioni complete di secondo grado

Problemi risolti.

1. Trovare due numeri tali che il maggiore supera di 6 il minore e il loro prodotto è 96.
2. Trovare un numero tale che se si sottrae 9 al suo quadrato si ottiene un numero che supera 100 della stessa quantità di cui il numero originario è inferiore a 23.
3. Trovare un numero tale che moltiplicando la sua metà per la sua terza parte e aggiungendo al prodotto la metà del numero cercato il risultato sia 30.
4. Trovare due numeri, uno doppio dell'altro, e tali che aggiungendo la loro somma al loro prodotto si ottiene 90.
5. Un allevatore comprò un cavallo per un certo numero di corone, e lo rivendette per 119 corone, cosicché il suo guadagno percentuale fu uguale al costo del cavallo. A quanto lo comprò ?
6. Una persona compra un certo numero di pezze di stoffa: paga per la prima 2 corone, per la seconda 4 corone, per la terza 6 corone, e così via per le successive, aumentando ogni volta la spesa di 2. Siccome tutte le pezze costarono 110 corone, quante pezze comprò?

7. Una persona comprò un certo numero di pezze di stoffa per 180 corone; e se per la stessa somma avesse ricevuto tre pezze di più, le avrebbe pagate ognuna 3 corone di meno. Quante pezze comprò?
8. Due mercanti costituirono in società un capitale totale di 100 sterline. Uno lasciò a fruttare la sua parte di denaro per 3 mesi, mentre l'altro per 2 mesi. Alla fine entrambi portarono a casa un montante di 99 sterline. Quale frazione del capitale iniziale aveva versato ognuno ?
9. Due ragazze portarono 100 uova al mercato; una ne aveva più dell'altra, però ricavarono la stessa somma. La prima dice alla seconda: "Se io avessi avuto le tue uova, avrei ricavato 15 pence". L'altra risponde: "Se io avessi avuto le tue, avrei ricevuto 6 e 1/2 pence". Quante uova aveva portato ciascuna?
10. Due mercanti vendono ognuno una certa quantità di seta; il secondo ne vende 3 braccia più del primo, e insieme ricavano 35 corone. Ora, il primo dice al secondo: "Io avrei ricavato 24 corone per la tua seta", "E io avrei ricavato 12 corone e mezza per la tua" risponde l'altro. Quante braccia di stoffa aveva ognuno ?

Capitolo 8 - Estrazione di radice quadrata di binomi

Problemi risolti

1. Trovare due numeri la cui differenza è 15 e tali che la metà del loro prodotto sia uguale al cubo del minore.
2. Trovare due numeri che hanno per somma 100 e prodotto 2059.
3. Ci sono tre numeri in progressione geometrica: la somma dei primi due è 10 e la differenza del secondo e terzo è 24. Che numeri sono ?
4. Un mercante avendo investito una certa somma di denaro in beni, li rivende per 24 sterline, guadagnando in percentuale tanto quanto aveva speso in sterline. Quanto aveva speso ?
5. La somma di due numeri è a e il prodotto b . Trovare i numeri.
6. La somma di due numeri è a e la somma dei loro quadrati b . Trovare i due numeri.
7. Dividere 36 in tre parti tali che la seconda superi la prima di 4 e la somma di tutti i loro quadrati sia 464.
8. Una persona che compra 120 libbre di pepe e altrettante di zenzero, scopre che con una corona compra una libbra in più di zenzero che di pepe. Ora, il prezzo totale del pepe supera quello dello zenzero di 6 corone. Quante libbre di ognuno le vengono con una corona ?

9. Trovare tre numeri in proporzione continua, di cui il medio è 60, in modo che la somma degli estremi sia 125.
10. Una persona comprò un certo numero di buoi per 80 ghinee: se ne avesse ricevuto 4 in più con la stessa somma, li avrebbe pagati una ghinea in meno all'uno. Quanti erano i buoi ?
11. Dividere il numero 10 in due parti tali aggiungendo il loro prodotto alla somma dei loro quadrati si ottiene 76.
12. Due viaggiatori, A e B, partirono contemporaneamente da due posti Γ e Δ ; A partì da Γ avendo intenzione di passare anche per Δ , e B da Δ nella stessa direzione di A: quando A raggiunse B, trovarono, calcolando i loro percorsi, che insieme avevano percorso 30 miglia; che A era passato da Δ 4 giorni prima e che B si trovava a 9 giornate di cammino, con la sua velocità, da Γ . Trovare la distanza tra Γ e Δ .